1

1. A $m \times n$, $Ax = 0$ $x \in R^n$. $A = 0$.

2. $n \times n$ N nilpotent k $N^k = 0$. nilpotent π .

3. Αν N $n \times n$ nilpotent π, $N^k = 0$, $I_n - N$ ε . N.

4. Αν A, B
1)A αντιμετα B.
2)A αντιμετα B^{-1}.
3)A^{-1} αντιμετα B^{-1}.
4)A^t αντιμετα B^t.

5. 2 επί 2 A
1) $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, 2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 3) A .

6. Αν $A^3 = 2I$ και $B = A^2 - 2A + 2I$ B .

7. Για t $A = \begin{bmatrix} t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t \end{bmatrix}$ 3;

8. Βρε $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Αν A, B $n \times n$ $AB = 0$

$$A + \quad B \leq n.$$

10. $n \times n$ A $A^2 = A$ $A + \quad (A - I_n) = n.$

-- .. .

11. k R^n. $k < n$, $k = n$ $k > n$.
1) ;
2) R^n;
3)Αποτ R^n;

12. a_1, a_2, a_3 γρα a_2, a_3, a_4 .
1) a_1 ο a_2 a_3.
2) a_4 δεν ε a_1, a_2, a_3.

13. $a_1, a_2, \ldots a_n$ .. V $n \geq 2$. Δε $a_1, a_1 + a_2, \ldots a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ V.

$$\{a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots, a_{n-1} + a_n, a_n + a_1\}$$

V; Το α ;

14. $\{a_1, a_2, a_3\}$ R^3 $a_4 = -a_1 - a_2 - a_3$. Δε v το R^3 $v = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4$ x_1, x_2, x_3, x_4 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Γενι n- .

15. $a_1, a_2, \ldots, a_r$. u $a_1, \ldots, a_r$ v $tu + v, a_1, a_2, \ldots a_r$ t.

16. U, V R^n $a_1, a_2, \ldots a_r$ και $b_1, b_2, \ldots b_s$ αντ. W R^n $a_i + b_j$ με $i = 1, \ldots, r$ και $j = 1, \ldots, s$. $dimV = k$ και $dimU = m$, δε

$$dimW \leq min\{n, k + m\}.$$

17. S . V.
1) $dimS \leq dimV$
2) $dimS = dimV$ αν και μονο αν $S = V$.
3) S V.
4) V S.

18. Αν W_1, W_2 εν V $W_1, W_2 \neq \{0\}, V$.
1) $a \in V$, $a \notin W_1, a \notin W_2$.
2) B τοψ V W_1 ή στο W_2. Ι ;

19. W_1, W_2 V

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 / w_i \in W_i\}.$$

1) $W_1 \cap W_2$, και $W_1 + W_2$ ε V.
2) $W_1 \cap W_2 \subseteq W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$. $V = \mathbf{R}^2$.
3) $W_1 \cup W_2$ V;
4) $W_1 + W_2$ V $W_1 \cup W_2$ δηλ. S V $W_1 \cup W_2 \subseteq S$ $W_1 + W_2 \subseteq S$.

20. W_1, W_2 .. V. $dim(W_1 + W_2) = dim(W_1 \cap W_2) + 1$ $W_1 + W_2$ W_1 ή W_2 και η $W_1 \cap W_2$ W_2 W_1 . W_1, W_2

$$dim(W_1 + W_2) \geq dim(W_1 \cap W_2) + 2.$$

21. Αν $T : R^3 \to R^2$ και $U : R^2 \to R^3$, UT .

22. Αν T ε

$$KerT \subseteq Im(1-T)$$

και

$$ImT \subseteq Ker(1-T).$$

23. T μ R^n. Αν $T^{n-1}(x)$ $\emptyset$ και $T^n(x) = 0$ $x \in R^n$, δε

$$x, T(x), T^2(x), \ldots, T^{n-1}(x),$$

ε R^n.

24. $T : V \to W$. ;

1) $KerT = 0$
2) Αν $T(x) = 0$ μόνο για $x = 0$, τοτε $dimV = dimW$.
3) Αν $ImT = 0$, τότε $T = 0$.
4) Αν $V = W$ και $ImT \subseteq KerT$ τότε $T = 0$.
5) Αν $V = W$ και $ImT \subseteq KerT$ τότε $T^2 = 0$.
6) Αν $dimV = dimW$ τότε ο T .
7) $dimV = dimImT$ $KerT = \{0\}$.
8) $KerT \subseteq KerT^2$.
9) $dimKerT \leq dimImT$.
10) $dimkerT \leq dimV$.
11) T 1-1 $KerT = \{0\}$.
12) T 1-1 $dimV \leq dimW$.
13) T $ImT = W$.
14) T $dimV \geq dimW$.
15) Αν $v_1, \ldots v_k$ τ V $T(v_1), \ldots T(v_k)$.
16) $T(v_1), \ldots T(v_r)$ τ $v_1, \ldots v_k$.