

Γραμμική Άλγεβρα 1
 QUIZ 1
 23/2/11

Όνοματεπώνυμο:

Λύβει

1. Στο σύστημα

$$\begin{aligned} 4x + ry &= 2, \\ rx + y &= 1 \end{aligned}$$

προσδιορίστε το r ώστε

- α) να έχει μοναδική λύση (και να υπολογιστεί)
- β) να έχει άπειρες λύσεις (και να υπολογιστούν)
- γ) να μην έχει καμία λύση.

2. Θεωρούμε τα εξής επίπεδα του R^3 , $x + y + z = 1$, $2x - y + z = 2$ και $x + 2y + z = 1$. Βρείτε την τομή τους στον R^3 . Μπορείτε να αλλάξετε την τρίτη εξίσωση ώστε να πάρετε ένα σύστημα που δεν έχει λύσεις;

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|c} 4 & r & 2 \\ r & 1 & 1 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & r/4 & 1/2 \\ 0 & 1 - r^2/4 & 1 - r/2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $1 - \frac{r^2}{4} \neq 0 \Leftrightarrow r \neq \pm 2$

Σ'αυτή την περίπτωση η μοναδική λύση είναι η:

$$x = \frac{1}{2} - \frac{r}{4}y$$

$$y = \frac{1 - r/2}{1 - r^2/4} = \frac{1}{1 + r/2}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} - \frac{r}{4(1+r/2)} \\ y &= \frac{1}{1+r/2} \end{aligned}$$

Αν $r = 2$

το σύστημα γίνεται

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

οπότε έχουμε άπειρες

λύσεις της μορφής

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 - 1/2y \\ y \end{pmatrix}$$

= y ελεύθερη μεταβλητή

Αν $r = -2$

το σύστημα γίνεται

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

οπότε είναι αδύνατο

2 Το 3×3 σύστημα $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$

έχει επανωρισμένο πίνακα των

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Άρα έχει μοναδική λύση την $(x, y, z) = (1, 0, 0)$

Αν αλείψω την $x + y + z = 1$ παραμένει η $x + y + z = 2$. το σύστημα είναι αδύνατο (αφού η $1^{\text{η}}$ και η $3^{\text{η}}$ δεν μπορούν να συμβούν συγχρόνως) Μπορείτε να πάρετε πολλές εξισώσεις στην θέση της $3^{\text{ης}}$ και να σας δώσουν αδύνατο σύστημα περισσότερο ή λιγότερο περίηχοις απ'αυτή που έδωσα παραπάνω.