Γραμμική Αλγεβρα 1
Τεστ 4
7/4/11

Λύσεις

Ονοματεπώνυμο, ΑΜ:

8 **1.** Δίνεται ο εξής υπόχωρος του R^4 : $K = \{(x,y,z,w) : 2x - y + z + w = 0\}$.
2 1)Βρείτε μία βάση του K.
3 2)Να επεκταθεί σε βάση του R^4. (με δικαιολόγηση δηλ. γραμ. ανεξαρτ. + 4 το πλήθος).
2 3)Βρείτε έναν 3 επί 4 πίνακα A του οποίου ο μηδενόχωρος ισούται με K.
1 4)Ποια είναι η τάξη του πίνακα A;

2 **2.** Έστω A ένας $m\times n$ πίνακας του οποίου οι γραμμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Τότε η τάξη του είναι .... 0.5 ο χώρος στηλών του είναι ο 0.5 .... ο μηδενόχωρός του έχει διάσταση 0.5 .... και ο αριστερός μηδενόχωρός του είναι ο 0.5 ....

1 Τα διανύσματα του K είναι της μορφής $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1/2\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1/2\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} -1/2\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

1) Άρα μία βάση του K είναι η $\left\{\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 2\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 0\\ 2\end{pmatrix}\right\} = \mathcal{B}$

2) Η $\mathcal{B}$ μαζί με το $\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^4$ γιατί και 4 διανύσματα μαζί είναι γραμ. ανεξ. (και $\dim \mathbb{R}^4 = 4$)
Θα είναι γραμ. ανεξάρτητα φαίνεται από τον πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

3) Ο πίνακας A πρέπει να έχει τάξη 1 (αφού ο μηδενόχωρός του έχει διάσταση 3.) Ένας τέτοιος είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix} \text{ και ο } A' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

4) Οποιον A και να βρούμε η τάξη του θα είναι 1 άρα οι γραμμές (όπως και οι στήλες) του είναι όλες πολ/σια μιας γραμμής (στήλης)

(Γενικά $R(A) \subset \mathbb{R}^m$, $N(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ σε κάθε $m\times n$ πίνακα A)

2 Τάξη του $A = m$
$R(A)$ = χώρος στηλών του $A \overset{1}{=} \mathbb{R}^m$
$\dim(N(A)) = n - m$ $\quad$ $\dim(N(A^t)) = m - m = 0$ άρα
$N(A^t) = 0$