Λύσεις

Γραμμική Αλγεβρα 1
Τεστ 5
4/5/11

Ονοματεπώνυμο, ΑΜ:

1. Έστω f η γραμμική απεικόνιση του R^3 ώστε

$$f(1,0,0)=(1,1,0),\ f(0,1,0)=(0,0,1),\ f(1,1,1)=(0,0,0).$$

2 1) Βρείτε τον πίνακα A της παραπάνω απεικόνισης.
1 2) Βρείτε τις διαστάσεις του πυρήνα και της εικόνας της f.
2 3) Βρείτε τον πυρήνα της f.
2 4) Βρείτε την εικόνα της f.

Μονάδες

3. **2.** Αν f γραμμική απεικόνιση του R^n δείξτε ότι $Kerf \subseteq Kerf^2$.

$\boxed{1}$ Ο πίνακας της f έχει στήλες τα $f(1,0,0)$, $f(0,1,0)$, και $f(0,0,1)$

1) $f(0,0,1) = f[(1,1,1)-(1,0,0)-(0,1,0)] = f(1,1,1)-f(1,0,0)-f(0,1,0) =$
$= (0,0,0)-(1,1,0)-(0,0,1) = (-1,-1,-1)$

Επομένως $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

2) $A \overset{\text{Gauss}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\text{κλιμ.}}$ Επομένως η τάξη του A είναι 2 και άρα $\dim Imf = 2$, $\dim kerf = 1$.

3) $kerf = N(A)$ Λύνουμε το ομογενές $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ και έχουμε
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z\in\mathbb{R}$ άρα $Kerf = \left\{ z\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} / z\in\mathbb{R} \right\}$ (Το $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι βάση του πυρήνα)

4) $Imf = \mathcal{R}(A)$ ο χώρος στηλών του A. Οι δυο πρώτες στήλες του A είναι γραμ. ανεξάρτητες άρα
$Imf = \mathcal{R}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ (Τα $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ αποτελούν βάση του Imf)

$\boxed{2}$ Έστω $x\in Kerf$ τότε $f(x)=0$ και αφού f γραμμική έχουμε $f(f(x)) = f(0) = 0$ ... Επομένως $f^2(x)=0$ και άρα $x\in kerf^2$, δηλαδή $kerf \subseteq Kerf^2$

Επίσης μπορείτε να δείξετε ότι $Imf \supseteq Imf^2$.