Σ.Κ. ΠΗΧΩΡΙΔΗΣ

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι

(Πρόχειρες σημειώσεις)

ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΕΠΟΧΗ

ΑΘΗΝΑ 1996

ISBN 960-224-766-5
Σύγχρονη Εποχή Εκδοτική ΑΕΒΕ
Σόλωνος 130, 106 81 Αθήνα, Τηλ.: 3820835, 3823649, Fax: 3813354

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΗΜΕΙΩΜΑ ΤΩΝ ΕΠΙΜΕΛΗΤΩΝ

Ο Στέλιος Πηχωρίδης (1940-1992) ήλθε στο Πανεπιστήμιο Κρήτης το 1983. Υπήρξε καθηγητής του Μαθηματικού Τμήματος, στο οποίο δίδασκε κάθε εξάμηνο και από ένα διαφορετικό μάθημα.

Για πολλά από αυτά τα μαθήματα (και ιδιαίτερα για τα μαθήματα της Ανάλυσης) έγραψε διδακτικές σημειώσεις, μερικές από τις οποίες χρησιμοποιούνται ακόμη από άλλους διδάσκοντες, αλλά όχι συστηματικά. Εξαίρεση αποτελούν οι «πρόχειρες σημειώσεις» που έγραψε ο Στέλιος την άνοιξη του 1986 για το μάθημα "Απειροστικός Λογισμός Ι" και καθιερώθηκαν από τότε ως ένα από τα βασικά βοηθήματα των πρωτοετών φοιτητών τόσο του Μαθηματικού Τμήματος, όσο και του Τμήματος της Επιστήμης Υπολογιστών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Μάλιστα, από όσο γνωρίζουμε, τις ίδιες σημειώσεις χρησιμοποιούν και στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Κύπρου.

Ας τονίσουμε, όμως, εδώ ότι και ο ίδιος ο Στέλιος τις σημειώσεις αυτές τις φρόντισε ιδιαίτερα από την αρχή. Μ' αυτό εννοούμε ότι είναι οι μόνες σημειώσεις του, για τις οποίες θέλησε να αντικαταστήσει το αρχικό του χειρόγραφο με ένα πιο ευπαρουσίαστο κείμενο (ο ίδιος δεν θεωρούσε τα γράμματά του ευανάγνωστα και ο αναγνώστης μπορεί να κρίνει μόνος του από μερικές ασκήσεις που, εκ των υστέρων, πρόσθεσε ο Στέλιος σε κάποια κεφάλαια).

Έτσι άρχισε να δακτυλογραφεί μόνος του τα χειρόγραφα, αλλά οι δυσκολίες που συνάντησε τον ανάγκασαν, μετά τις 29 πρώτες σελίδες, να σταματήσει.

Το υπόλοιπο κείμενο γράφτηκε από τη Γιάννα Κυρέζη, υποψήφια φοιτήτρια τότε του Μαθηματικού Τμήματος, η οποία αντέγραψε με τον ωραίο γραφικό της χαρακτήρα τις ιδιόχειρες σημειώσεις του Στέλιου.

Παρά την επιμέλεια, όμως, και τη φροντίδα με την οποία ο Στέλιος ετοίμαζε τις σημειώσεις του, ουδέποτε συμφώνησε να εκδόσει σε βιβλίο κάποιες από αυτές. Η απάντησή του στις προτροπές πολλών συναδέλφων του ήταν πάντοτε η εξής: «Αυτές δεν είναι ούτε καν σημειώσεις. Είναι πρόχειρες σημειώσεις. Είναι γραμμένες αναγκαστικά σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα και ακολουθούν υποχρεωτικά το περιεχόμενο και τους στόχους, που τη στιγμή εκείνη πρόβλεπε ο Οδηγός Σπουδών μας. Αν κάποτε έχω το χρόνο και αποφασίσω να γράψω ένα βιβλίο π.χ. για τον Απειροστικό Λογισμό, δεν είμαι καθόλου σίγουρος ότι θα μοιάζει και πολύ με τις τωρινές μου σημειώσεις.»

Δυστυχώς, η ζωή δεν έδωσε στον Στέλιο την ευκαιρία αυτή. Μας έμειναν μόνο οι «πρόχειρες σημειώσεις» του.

Έτσι, στην Ημερίδα που διοργάνωσε το Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης, στις 7 Μαΐου 1993, στη μνήμη του Στέλιου, διατυπώθηκε από πολλούς η άποψη να εκδοθούν σε βιβλίο τουλάχιστον οι σημειώσεις του Απειροστικού Λογισμού.

Όλοι συμφώνησαν για μια τέτοια έκδοση και μάλιστα έδωσαν στον Μανόλη Κατσοπρινάκη αρκετές παρατηρήσεις τους, για κάποιες παραλήψεις, αβλεψίες και διευκρινίσεις που κατά τη γνώμη τους έπρεπε να μπουν στο κείμενο.

Με αυτόν τον τρόπο, όμως, μαζεύτηκαν (εκτός από κάποιες ουσιαστικές διορθώσεις, που έπρεπε να γίνουν και τις περισσότερες από τις οποίες γνώριζε ήδη ο Στέλιος) από τη μια αρκετές ακόμα επεξηγήσεις και λεπτομέρειες, και από την άλλη ένας μεγάλος αριθμός ασκήσεων, που η ενσωμάτωσή τους μέσα στο κείμενο θα άλλαζε αρκετά το ύφος του συγγραφέα.

Για το λόγο αυτό αποφασίσαμε να εκδοθεί τώρα το πρωτότυπο κείμενο, αφού κάναμε μόνο μερικές απαραίτητες διορθώσεις σε αυτό, με τέτοιον τρόπο ώστε να μπορεί να διαβαστεί και ταυτόχρονα να φαίνονται τα σημεία όπου έγιναν οι διορθώσεις. Για διευκόλυνση του αναγνώστη προσθέσαμε περιεχόμενα με βάση τους τίτλους του κειμένου. Έτσι, παραδίνουμε στον καλοπροαίρετο αναγνώστη φωτογραφική μεταφορά του πρωτότυπου κειμένου, ελπίζοντας να μας συγχωρήσει για όσες άλλες διορθώσεις διαπιστώσει ότι δεν κάναμε. Ο ίδιος ο Στέλιος έβαζε πρώτη άσκηση στους φοιτητές του να του βρουν όσο γίνεται περισσότερα σφάλματα ("λάθη", όπως έλεγε) στις σημειώσεις του.

Μια τέτοια έκδοση, χωρίς ιδιαίτερα πολλές μεταβολές και αλλοιώσεις του αρχικού κειμένου, ανταποκρίνεται και σε επιθυμία της αδελφής του Στέλιου, Χρυσάνθης Πηχωρίδου, η οποία και ανέλαβε να την προωθήσει. Ας ευχηθούμε ότι μελλοντικά θα παρουσιαστεί μια έκδοση βελτιωμένη και επιμελημένη, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις των συναδέλφων που δίδαξαν από αυτές τις σημειώσεις.

Δεκέμβριος 1995
Οι μαθητές του Στέλιου Πηχωρίδη
Μανόλης Κατσοπρινάκης και Σταύρος Παπαδόπουλος

Ε Ι Σ Α Γ Ω Γ Η

Σκοπός του μέρους του Απειροστικού Λογισμού με το οποίο θα ασχοληθούμε είναι **η μελέτη ορισμένων βασικών ιδιοτήτων των πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής.**

Στους περισσότερους κλάδους των Μαθηματικών αρχίζουμε με τη μελέτη ενός βασικού συνόλου, τα στοιχεία του οποίου ικανοποιούν κάποιες θεμελιώδεις σχέσεις, τις οποίες δεχόμαστε αξιωματικά. Στη συνέχεια προχωρούμε στη μελέτη συναρτήσεων οι οποίες ορίζονται σε κατάλληλα υποσύνολα του βασικού αυτού συνόλου. Στον Απειροστικό Λογισμό το βασικό σύνολο είναι το σύνολο R των πραγματικών αριθμών.

Στο σημείο αυτό πρέπει να κάνουμε δύο παρατηρήσεις : α) Ιστορικά η ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού, καθώς και των περισσοτέρων άλλων κλάδων των Μαθηματικών, δεν έγινε με αυτό τον τρόπο. Αν και η αξιωματική μέθοδος στα Μαθηματικά πρωτοεμφανίστηκε από τους κλασσικούς χρόνους (και παρέμεινε σαν μέθοδος στα Μαθηματικά ουσιαστικά μοναδική), η "αξιωματικοποίηση του Απειροστικού Λογισμού επιτεύχθηκε μόλις στο τέλος του περασμένου αιώνα. β) Τόσο το βασικό σύνολο όσο και οι κλάσεις συναρτήσεων που μελετάμε στους διάφορους κλάδους των Μαθηματικών μέχρι σήμερα, έχουν άμεση σχέση τόσο με άλλους κλάδους των Μαθηματικών όσο και με άλλες επιστήμες. Π.χ. τα πρώτα ίχνη του Απειροστικού Λογισμού στην κλασσική εποχή ήταν άμεσα συνδεδεμένα με τη Γεωμετρία (μήκος περιφέρειας, εμβαδά και όγκοι γεωμετρικών σχημάτων κ.λ.π.). Η σημαντική ανάπτυξη που γνώρισε ο κλάδος μετά την Αναγέννηση υπαγορεύτηκε σε πολύ μεγάλο βαθμό από ανάγκες Φυσικών Επιστημών (Αστρονομία, Μηχανική,...).

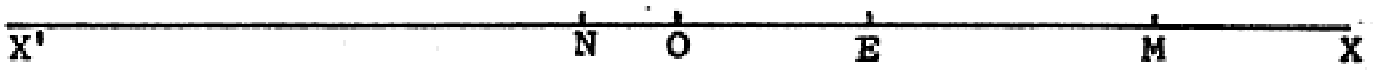
Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι ο Απειροστικός Λογισμός αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα επιστημονικά επιτεύγματα του ανθρώπου. Ξεκινώντας από διαισθητικά απλές και γενικά παραδεκτές αρχές, πετυχαίνει μια σύνθεση που προκαλεί θαυμασμό τόσο για τη λογική ενότητά της όσο και για τον πλούτο των αποτελεσμάτων της. Οι εφαρμογές του και η αλληλεπίδραση με άλλους κλάδους της επιστήμης, σε ολοένα και αυξανόμενο ρυθμό, είναι αναρίθμητες και αναντικατάστατες.

Είναι απολύτως απαραίτητο να κατανοήσει ο νεοεισαγόμενος στο θέμα και τις δύο αυτές όψεις της θεωρίας. Η κάθε μία, όσο σημαντική και ενδιαφέρουσα και να είναι, μόνη της οδηγεί είτε σε ένα όμορφο, αλλά ίσως άχρηστο κομψοτέχνημα, ή σε ένα απέραντο δάσος από λογικά σωστούς, και ίσως αποκρουστικούς, τύπους, που η μόνη σημασία τους θα είναι ότι είναι "αναγκαίο κακό".

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : Οι πραγματικοί αριθμοί

1.1. Η γεωμετρική παράσταση.

Θεωρούμε δύο διαφορετικά σημεία Ο και Ε, το Ε δεξιά του Ο, πάνω σε μία ευθεία Χ'Χ. Μπορούμε να θεωρήσουμε τους πραγματικούς αριθμούς σαν τα σημεία αυτής της ευθείας. Η διαισθητική εικόνα που έχουμε στο μυαλό μας είναι να αντιστοιχίσουμε σε κάθε σημείο Μ της Χ'Χ την απόσταση του Μ από το Ο, αν το Μ βρίσκεται ~~αριστε-~~ δεξιά από το Ο (σχ. 1) και πάρουμε το ΟΕ για μονάδα.



Σχ. 1

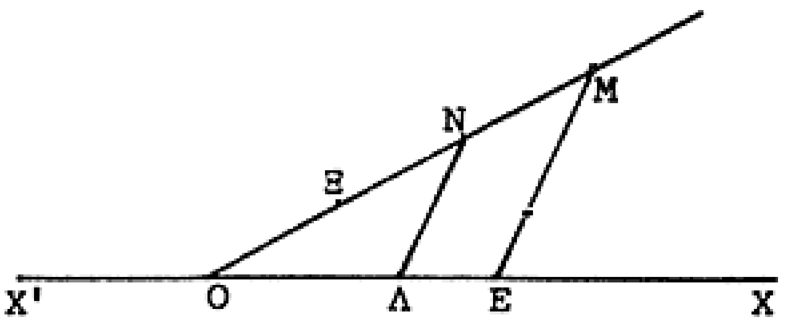
Έτσι π.χ. το Μ αντιστοιχεί (προσεγγιστικά) στον αριθμό 2,5 και το Ν στον −0,5.

1.2. Φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί αριθμοί.

Η μελέτη των πραγματικών αριθμών αρχίζει συνήθως με **το σύνολο N των φυσικών** αριθμών 1,2,3,... . Το άθροισμα και το γινόμενο δύο φυσικών είναι πάντοτε ένας φυσικός αριθμός. Αν στους φυσικούς επισυνάψουμε το 0 και τους αντίθετούς τους, παίρνουμε **το σύνολο Z** των ακεραίων αριθμών 0, ±1,±2,... . Το άθροισμα, το γινόμενο και (κατ' αντίθεση προς τους φυσικούς) η διαφορά δύο ακεραίων είναι πάντοτε ένας ακέραιος αριθμός. Αν στους ακεραίους επισυνάψουμε και όλα τα κλάσματα m/n, όπου m,n ακέραιοι και $n\neq 0$, τότε παίρνουμε **το σύνολο Q των ρητών αριθμών.** Εκτός του αθροίσματος, του γινομένου και της διαφοράς τώρα και το πηλίκο (κατ' αντίθεση προς τους ακεραίους) δύο ρητών q/r, όπου $r\neq 0$, είναι πάντοτε ρητός αριθμός.

Απλές γεωμετρικές κατασκευές στο επίπεδο δίνουν τη γεωμετρική παράσταση των ρητών αριθμών. Στο σχ. 2 π.χ. βλέπουμε την κατασκευή του ρητού 2/3 (σημείο Λ)

Σχ. 2



1.3. <u>Άρρητοι αριθμοί</u>.

Ήδη από την αρχαιότητα ανακαλύφτηκαν πραγματικοί αριθμοί οι οποίοι δεν είναι ρητοί. Π.χ. **το μήκος της διαγωνίου ενός τετραγώνου με πλευρά 1 δεν είναι ρητός αριθμός.**

Η πολύ ωραία απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι γνωστή από τους κλασσικούς χρόνους και έχει ως εξής :

Αν γράψουμε x για το μήκος της διαγωνίου, τότε θα έχουμε (Πυθαγόρειο θεώρημα)

$$x^2=1^2+1^2=2$$

Ας υποθέσουμε λοιπόν, για να οδηγηθούμε σε άτοπο, ότι ο x είναι ρητός, δηλ. $x=\frac{m}{n}$ όπου m,n ακέραιοι με $n\neq0$. Απλοποιώντας, αν χρειαστεί, το κλάσμα m/n μπορούμε ακόμη να υποθέσουμε ότι "οι m και n δεν είναι και οι δύο ζυγοί".

Θα έχουμε λοιπόν

$$2=m^2/n^2 \text{ ή } m^2=2n^2$$

και επομένως ο m^2, άρα και ο m, είναι ζυγός, δηλ. $m=2m_1$ για κάποιο ακέραιο m_1. Τότε όμως

$$2n^2=4m_1^2 \text{ ή } n^2=2m_1^2$$

και επομένως ο n^2, άρα και ο n, είναι ζυγός. Φτάσαμε λοιπόν σε άτοπο και έτσι συμπεραίνουμε ότι ο x δεν είναι ρητός.

Οι πραγματικοί αριθμοί οι οποίοι δεν είναι ρητοί λέγονται άρρητοι.

Το σύνολο όλων των πραγματικών, ρητών και αρρήτων, θα συμβολίζουμε με το γράμμα R. Από τα όσα είπαμε μέχρι τώρα γίνεται φανερό ότι

$$N \subsetneq Z \subsetneq Q \subsetneq R.$$

Μόνο η σχέση $Q\neq R$ δεν είναι τετριμμένη. Είναι όμως άμεση συνέπεια της προηγούμενης πρότασης.

1.4. <u>Ένα αξιωματικό σύστημα για τους πραγματικούς αριθμούς</u>.

Ένας τρόπος αυστηρής εισαγωγής των πραγματικών αριθμών θα ήταν να δώσουμε ένα αξιωματικό χαρακτηρισμό των φυσικών αριθμών (π.χ. με τα λεγόμενα αξιώματα του Peano) και, στη συνέχεια, να δώσουμε μία ακριβή έννοια στις διαδοχικές επισυνάψεις νέων στοιχείων που αναφέραμε στις προηγούμενες παραγράφους. Θα μπορούσαμε π.χ. να ορίσουμε τους ακεραίους σαν διατεταγμένα ζεύγη φυσικών (m,n) μαζί με κατάλληλους νόμους για ισότητα, πρόσθεση και πολλαπλασιασμό ακεραίων.

Στο μυαλό μας φυσικά θα έχουμε την αντιστοίχιση του (m,n) με τον ακέραιο $m-n$ και επομένως θα ορίζαμε : $(m,n)=(m',n')$ αν και μόνο αν $m+n'=n+m'$, $(m,n)+(m',n')=(m+m',n+n')$, $(m,n)(m',n')=(mm'+nn', mn'+nm')$.

Δεν θα ακολουθήσουμε αυτήν την "κατασκευαστική" πορεία, παρά το μεγάλο ενδιαφέρον που παρουσιάζει, αλλά **θα θεωρήσουμε τους πραγματικούς αριθμούς σαν ένα μη κενό σύνολο R με τις εξής χαρακτηριστικές ιδιότητες :**

α) Το R είναι διατεταγμένο σώμα.

β) Κάθε μη κενό και φραγμένο προς τα πάνω υποσύνολο του R έχει άνω πέρας (αξίωμα συνέχειας).

Οφείλουμε βέβαια να επεξηγήσουμε τους όρους που εμφανίζονται στον παραπάνω χαρακτηρισμό των πραγματικών αριθμών.

Διατεταγμένο σώμα. Η ιδιότητα α εκφράζει συνοπτικά ότι οι συνήθεις πράξεις (πρόσθεση, πολλαπλασιασμός, ύπαρξη 0,1, ύπαρξη αντιθέτου και αντιστρόφου) καθώς και η σχέση διατάξεως $\alpha\leq\beta$ είναι ορισμένες στο R και έχουν τις ιδιότητες που περιμένουμε. Υποθέτουμε ότι ο αναγνώστης είναι εξοικειωμένος με αυτές τις ιδιότητες και γι' αυτό δεν τις επαναλαμβάνουμε εδώ (βλ. § 7.1)

Αξίωμα συνεχείας. Πρέπει να εξηγήσουμε τους όρους "φραγμένο προς τα πάνω" και "άνω πέρας".

Ένα υποσύνολο A του R λέγεται φραγμένο προς τα πάνω, αν υπάρχει $a\in R$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in A$ να ισχύει, $x\leq a$. Κάθε τέτοιο α λέγεται "άνω φράγμα" του A.

Άνω πέρας ή supremum ενός προς τα πάνω φραγμένου συνόλου A λέγεται ένα άνω φράγμα α του A το οποίο έχει την ιδιότητα : $\alpha\leq\alpha'$ για κάθε άνω φράγμα α' του A (συμβολισμός : α=supA).

Είναι φανερό ότι **"το άνω πέρας, αν υπάρχει, είναι μοναδικό".** Πραγματικά αν α,α' είναι άνω πέρατα ενός συνόλου A ($\subset R$) τότε $\alpha\leq\alpha'$ και $\alpha'\leq\alpha$ δηλ. $\alpha=\alpha'$.

Το αξίωμα της συνεχείας λέει, ότι για κάθε φραγμένο προς τα πάνω και μη κενό υποσύνολο των πραγματικών A, το supA υπάρχει (στο R). Όπως θα γίνει φανερό από τα παραδείγματα που ακολουθούν η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει αν αντικαταστήσουμε το R με το Q.

Παραδείγματα

Εξετάζουμε τα σύνολα

$A=\{0,1,3\}$, $B=\{x:x<0\}$

$\Gamma=\{x\in\mathbb{R}:x>0\&x^2<2\}$, $\Delta=\{x\in\mathbb{R}:x>0\&x^2\leq 2\}$

$E=\{x\in Z:x$ διαιρείται με το $3\}$

Τα A,B,Γ,Δ είναι φραγμένα προς τα πάνω. Για τα A,B π.χ. ο αριθμός 3 είναι ένα φράγμα τους (τετριμμένο). Επίσης τετριμμένο είναι να δούμε ότι $\sup A=3$.

Τα Γ και Δ είναι επίσης φραγμένα προς τα πάνω. Επειδή προφανώς $\Gamma\subset\Delta$ αρκεί να δείξουμε ότι το Δ είναι φραγμένο προς τα πάνω (και μάλιστα κάθε άνω φράγμα του Δ είναι και άνω φράγμα του Γ· γιατί;). Ισχυρίζομαι πράγματι ότι π.χ. το 2 είναι άνω φράγμα του Δ. Έστω πραγματικά $x\in\Delta$ πρέπει να δείξω ότι $x\leq 2$. Αν όμως $x>2$, τότε $x^2>4$ και έτσι αποκλείεται το x να ανήκει στο Δ, διότι τότε $x^2\leq 2<4<x^2$.

Το αξίωμα της συνέχειας μας εξασφαλίζει ότι υπάρχουν τα $\sup A$ $(=3)$, $\sup B$, $\sup\Gamma$, $\sup\Delta$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι **$\sup B=0$**.

Πραγματικά αν $x\in B$, τότε $x\leq 0$ άρα το 0 είναι άνω φράγμα του B. Αν α ένα άλλο άνω φράγμα του B, τότε αποκλείεται $\alpha<0$ (διότι τότε $\frac{\alpha}{2}<0$, άρα και $\frac{\alpha}{2}\in B$, και θα έπρεπε $\frac{\alpha}{2}<\alpha$, οπότε (αφού $\alpha<0$) και $\frac{1}{2}>1$, που φυσικά είναι άτοπο). Συνάγουμε λοιπόν ότι $0\leq\alpha$ που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.

Παρατήρηση. Τα παραδείγματα A,B δείχνουν ότι **το sup ενός συνόλου μπορεί να ανήκει** (περίπτωση συνόλου A) **ή να μην ανήκει** (περίπτωση συνόλου B) **στο θεωρούμενο σύνολο.**

supΓ. Είναι φανερό ότι $\Gamma\neq\phi$ (π.χ. $1\in\Gamma$) άρα, από το αξίωμα της συνέχειας, υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός x τέτοιος ώστε $x=\sup\Gamma$.

<u>Ισχυρισμός</u> : "$x^2=2$ και $x>0$"

Ο ισχυρισμός δείχνει ότι υπάρχει (στο R) η "θετική τετραγωνική ρίζα του 2", ενώ γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχει στο Q.

Απόδειξη. Για την απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι και οι δύο υποθέσεις $x^2<2$ και $x^2>2$ οδηγούν σε άτοπο. Είναι προφανές ότι $x>0$.

Έστω πρώτα $x^2<2$. Θα δείξω ότι υπάρχει ε με $0<\varepsilon\leq 1$ τέτοιο ώστε $x+\varepsilon\in\Gamma$, το οποίο προφανώς αντιφάσκει με το ότι το x είναι το $\sup\Gamma$ (και άρα άνω φράγμα του Γ). Αρκεί λοιπόν να διαλέξω το ε

έτσι ώστε

$$(x+\varepsilon)^2=x^2+2\varepsilon x+\varepsilon^2<2 \text{ και } 0<\varepsilon\leq 1, \text{ δηλ. } \varepsilon(2x+\varepsilon)<2-x^2 \text{ και } 0<\varepsilon\leq 1.$$

Αρκεί π.χ. να πάρω

$$\varepsilon=\min\{1, \frac{1}{2}\ \frac{2-x^2}{2x+1}\}$$

($\min\{\alpha,\beta\}$ σημαίνει τον πιο μικρό από τους α,β, αν $\alpha\neq\beta$, και τον α αν $\alpha=\beta$. Ανάλογα ορίζεται το $\max\{\alpha,\beta\}$. **Άσκηση** : $\min\{\alpha,\beta\}=$ $\dfrac{\alpha+\beta-|\alpha-\beta|}{2}$, $\max\{\alpha,\beta\}=\dfrac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2}$.

Πράγματι με αυτήν την επιλογή του ε, και επειδή υποθέσαμε $x^2<2$, θά έχουμε $0<\varepsilon\leq 1$ και

$$\varepsilon(2x+\varepsilon)\leq\varepsilon(2x+1)\leq \frac{1}{2}\ \frac{2-x^2}{2x+1}(2x+1)<2-x^2$$

Έστω τώρα $x^2>2$. Θα δείξω τώρα, για να φτάσω πάλι σε άτοπο, ότι υπάρχει $\varepsilon>0$ τέτοιο ώστε το $x-\varepsilon$ είναι άνω φράγμα του Γ. Αρκεί λοιπόν να διαλέξουμε το $\varepsilon>0$ έτσι ώστε $x-\varepsilon>0$ και $(x-\varepsilon)^2>2$, διότι τότε για κάθε $y\in\Gamma$ θα έχουμε $y^2<2<(x-\varepsilon)^2$, δηλ. $y<x-\varepsilon$.

Θέλω λοιπόν να βρω $\varepsilon>0$ τέτοιο ώστε $0<\varepsilon<x$ και $x^2-2\varepsilon x+\varepsilon^2>2$. Αρκεί π.χ. να πάρω $\varepsilon=\dfrac{x^2-2}{2x}$ (γιατί;)

supΔ. Όπως και στην περίπτωση Γ το supΔ υπάρχει και μάλιστα $\sup\Gamma\leq\sup\Delta$. Αν τώρα $y\in\Delta$, τότε $y^2<2$ ή $y^2=2$. Στην πρώτη περίπτωση $y\in\Gamma$ και άρα $y\leq\sup\Gamma$ και στη δεύτερη $y=\sup\Gamma$, δηλ. $y\leq\sup\Gamma$. Και στις δύο περιπτώσεις λοιπόν συνάγουμε ότι το supΓ είναι άνω φράγμα του Δ, επομένως $\sup\Delta\leq\sup\Gamma$. Τελικά λοιπόν **supΓ=supΔ**.

Ας εξετάσουμε τέλος το σύνολο Ε. Είναι διαισθητικά φανερό ότι το Ε δεν είναι φραγμένο προς τα πάνω. Πρέπει να το δείξουμε βασιζόμενοι στα αξιώματα των πραγματικών α και β μόνο.

Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι $E=\{3\kappa:\kappa\in\mathbb{Z}\}$. Ας υποθέσουμε ότι το Ε είναι φραγμένο. Επειδή το Ε είναι προφανώς μη κενό (π.χ. $3\in E$) θα υπάρχει το supE, έστω $\beta=\sup E$. Τότε όμως, $\beta-1<\beta$ και άρα θα υπάρχει στοιχείο του Ε που είναι $>\beta-1$, δηλ. θα υπάρχει $\kappa\in\mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε $3\kappa>\beta-1$. Συνάγουμε ότι $3(\kappa+1)=3\kappa+3>\beta-1+3=\beta+2>\beta$ και $3(\kappa+1)\in E$, που είναι φυσικά άτοπο (γιατί βρήκαμε στοιχείο του Ε γνήσια μεγαλύτερο από το supE).

Παρατήρηση. Για μη κενά σύνολα Α που δεν είναι φραγμένα προς τα πάνω γράφουμε $\sup A=+\infty$ (Το σύμβολο $+\infty$ διαβάζεται "συν άπειρο". Θα το συναντάμε συχνά στη συνέχεια).

Θα δούμε τώρα μία διαισθητική φανερή και πολύ σημαντική ιδιότητα των πραγματικών.

"Αν ε τυχαίος θετικός πραγματικός αριθμός και α ένας άλλος πραγματικός τότε υπάρχει ένας φυσικός n τέτοιος ώστε nε>α".

Συνήθως εκφράζουμε την ιδιότητα αυτή λέγοντας "Το σώμα των πραγματικών R είναι **Αρχιμήδεια διατεταγμένο**". Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του αξιώματος της συνέχειας και ουσιαστικά τη δώσαμε στο παραπάνω παράδειγμα Ε. Πραγματικά, αν δεν υπάρχει τέτοιο $n\in N$, τότε το σύνολο $A=\{n\varepsilon : n\in N\}$ θα είναι φραγμένο προς τα πάνω και (προφανώς) μη κενό. Θα υπάρχει επομένως το supA, έστω $\sup A=\beta$. Επειδή $\beta-\varepsilon<\beta$, θα υπάρχει ένα στοιχείο $m\varepsilon$, $m\in N$, του A τέτοιο ώστε $\beta-\varepsilon<m\varepsilon$, δηλ. $\beta<(m+1)\varepsilon$. Αλλά $(m+1)\varepsilon\in A$ και φτάσαμε σε άτοπο.

Παρατήρηση. Μπορεί να δειχτεί ότι υπάρχουν διατεταγμένα σώματα στα οποία δεν ισχύει η ιδιότητα αυτή. Επομένως η ισχύς της στους πραγματικούς αριθμούς εξαρτάται ουσιαστικά από το αξίωμα της συνέχειας(βλ. § 7.1)

Είναι ιστορικά ενδιαφέρον να σημειώσουμε εδώ ότι η παραπάνω πρόταση αναφέρεται με θαυμαστή σαφήνεια από τον Αρχιμήδη στο έργο του "Τετραγωνισμός της ορθογωνίου κώνου τομής (παραβολής)" όπου και διαβλέπει, σε μία εποχή που κάθε άλλο παρά ξεκαθαρισμένη ήταν η έννοια του πραγματικού αριθμού, την ανάγκη να υποθέσει την ιδιότητα αυτή αξιωματικά. Γράφει μεταξύ άλλων : "... συμβαίνει δε των προειρημένων θεωρημάτων έκαστον μηδενός ήσσον των άνευ τούτου του λήμματος αποδεδειγμένων πεπιστευκέναι· αρκεί δε ες ταν όμοιαν πίστιν τούτοις αναγμένων των υφ' αμών εκδιδομένων...". (... πιστεύεται δε ότι έκαστον των ανωτέρω θεωρημάτων* δεν υστερεί των θεωρημάτων, τα οποία απεδείχθησαν χωρίς τη βοήθειαν του λήμματος τούτου. μου είναι δε αρκετόν, εάν τα υπ' εμού ευρεθέντα θεωρήματα έχουν τον αυτόν βαθμόν αληθείας, όπως τα ανωτέρω αναφερόμενα..." (Ε.Σ.Σταμάτη : Αρχιμήδους τετραγωνισμός παραβολής).

Τελείως ανάλογα με τον ορισμό των φραγμένων προς τα πάνω συνόλων και του supremum ορίζονται τα φραγμένα προς τα κάτω σύνολα και το infimum (κάτω πέρας), το οποίο συμβολίζουμε inf. Πιο συγκεκριμένα αν $A\subset R$ και για κάθε $x\in A$, $\alpha\leq x$, τότε το α λέγεται **κάτω φράγμα** του A. Το infA είναι ένα κάτω φράγμα $\geq$ από κάθε άλλο κάτω φράγμα. Αν γράψουμε $-A$ για το σύνολο $\{x:-x\in A\}$, τότε είναι τετριμμένο να δούμε ότι $\inf A=-\sup(-A)$, απ'όπου συνάγουμε άμεσα το θεώρημα (όχι αξίωμα !):

"Κάθε μη κενό φραγμένο προς τα κάτω σύνολο έχει κάτω πέρας".

(*) που αποδεικνύονται με τη βοήθεια αυτής της ιδιότητας.

1.5 Ασκήσεις

1) Δείξτε ότι γιά κάθε θετικό αριθμό m υπάρχει ακριβώς μία θετική τετραγωνική ρίζα του, δηλ. ακριβώς ένας θετικός αριθμός m τέτοιος ώστε $(\sqrt{m})^2=m$.

2) Είναι ο αριθμός $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ρητός; 'Ιδια ερώτηση γιά τον αριθμό $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

3) Δείξτε ότι μία ικανή συνθήκη γιά να ισχύει η σχέση : $|\alpha-\beta| < \varepsilon$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon>0$, είναι να υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε : $|\alpha-x| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $|\beta-x| < \frac{\varepsilon}{2}$, Είναι η συνθήκη αυτή αναγκαία; Αν ναί τότε βρήτε όλα τα $x \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την αναγκαία συνθήκη.

4) Δείξτε ότι μεταξύ δύο τυχαίων διαφορετικών πραγματικών αριθμών υπάρχει ένας άρρητος.

5) Δείξτε ότι κάθε φραγμένο πρός τά πάνω υποσύνολο του N είναι πεπερασμένο. Ισχύει η ίδια ιδιότητα γιά το Z; γιά το Q;

6) Δώστε παραδείγματα, ανάλογα με τα παραδείγματα της παραγράφου 1.4, γιά κάτω φράγματα και μελετήστέ τα με τον ίδιο τρόπο.

7) Πραγματευτείτε την ύπαρξη της $\sqrt{2}$ σαν infimum ενός κατάλλου συνόλου A.

8) Ἂν $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, καὶ θέσουμε $-A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$, τότε $\inf A = -\sup(-A)$.

9) Δίνεται $A = \{|\alpha\beta| : -2 < \alpha \leq 5, -4 < \beta \leq 3\}$. Βρῆτε, ἂν ὑπάρχουν, τὸ $\sup A$, $\inf A$ καὶ ἐξετάστε ἂν ἀνήκουν ἢ ὄχι στὸ A.

10) Ἂν $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, καὶ τὸ A δὲν εἶναι φραγμένο πρὸς τὸ πάνω, τότε ὁρίζουμε τὸ $\sup A$ νὰ εἶναι τὸ σύμβολο $+\infty$. Δεῖξτε ὅτι: $\sup A = +\infty$ ἂν καὶ μόνο ἂν ἰσχύει "γιὰ κάθε $M \in \mathbb{R}$ ὑπάρχει $x \in A$ τ.ὥ. $x > M$. Δῶστε ἀνάλογο ὁρισμὸ γιὰ τὸ $\inf A = -\infty$.

11) Ἂν θέλατε νὰ ἐπεκτείνετε τὸν ὁρισμὸ τῶν $\sup A$, $\inf A$ στὴν περίπτωση $A = \emptyset$, τί θὰ προτείνατε; Πάρτε γιὰ δεδομένο ὅτι προτάσεις τῆς μορφῆς "$\Pi_1 \Rightarrow \Pi_2$" θεωροῦνται ἀληθεῖς ἂν ἡ πρόταση Π_1 εἶναι ψευδής, ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὸ ἂν εἶναι ἀληθὴς ἢ ὄχι ἡ Π_2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : Πραγματικές συναρτήσεις.

2.1. Μερικά χρήσιμα υποσύνολα του R.

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, το κύριο μέλημά μας θα είναι να μελετήσουμε συναρτήσεις ορισμένες πάνω σε υποσύνολα των πραγματικών.

Γενικά, με τον όρο συνάρτηση, εννοούμε μία αντιστοίχιση μεταξύ των στοιχείων ενός συνόλου A, το οποίο θα ονομάζουμε πεδίο ορισμού της συνάρτησης, και στοιχείων ενός συνόλου B, το οποίο θα ονομάζουμε πεδίο τιμών, τέτοια ώστε σε κάθε στοιχείο α του A να αντιστοιχεί ακριβώς ένα στοιχείο του B. Συχνά χρησιμοποιούμε τα γράμματα f,g,h,.. για συναρτήσεις και γράφουμε f(α) για το στοιχείο του πεδίου τιμών που αντιστοιχεί στο α. Πριν προχωρήσουμε σε παραδείγματα, θα εξετάσουμε μερικά υποσύνολα του R που εμφανίζονται συνήθως σαν πεδία ορισμού. Σχεδόν πάντοτε σ' αυτό το μάθημα το πεδίο τιμών B θα είναι το R (τέτοιες συναρτήσεις λέγονται **πραγματικές**).

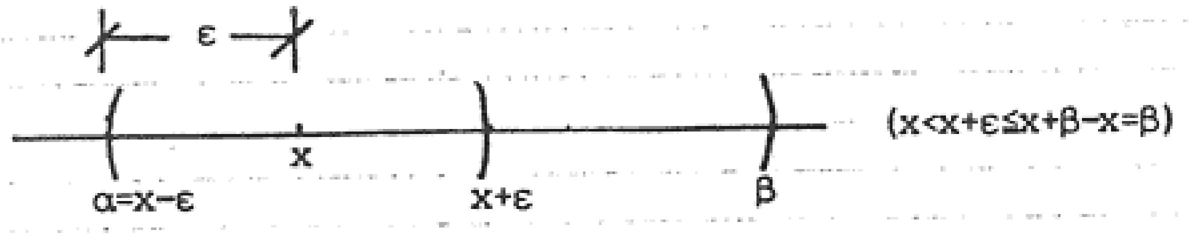
2.1.1. Διαστήματα. Τα πεδία ορισμού των πραγματικών συναρτήσεων θα είναι συνήθως διαστήματα. Με τον όρο αυτό εννοούμε υποσύνολα του R της μορφής :

Σύνολο	**Σύμβολο**	**Ονομασία**
$\{x: \alpha<x<\beta\}$	(α,β)	ανοιχτό διάστημα α,β
$\{x: \alpha<x\}$	(α,∞)	" " α,∞
$\{x: \alpha>x\}$	$(-\infty,\alpha)$	" " $-\infty,\alpha$
R	$(-\infty,\infty)$	Πραγματικοί
$\{x: \alpha\leq x\leq\beta\}$	$[\alpha,\beta]$	κλειστό διάστημα α,β
$\{x: \alpha\leq x\}$	$[\alpha,\infty)$	" " α,∞
$\{x: \alpha\geq x\}$	$(-\infty,\alpha]$	" " $-\infty,\alpha$
$\{x: \alpha<x\leq\beta\}$	$(\alpha,\beta]$	
$\{x: \alpha\leq x<\beta\}$	$[\alpha,\beta)$	

Το προτελευταίο διάστημα λέγεται ημιανοιχτό (ή ημίκλειστο) ακριβέστερα ανοιχτό αριστερά και κλειστό δεξιά. Ανάλογη ονομασία έχει και το τελευταίο διάστημα. Στα παραπάνω τα α,β είναι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha<\beta$. Τα σύμβολα $-\infty,+\infty$, διαβάζονται "μείον άπειρο" και "συν άπειρο" αντίστοιχα.

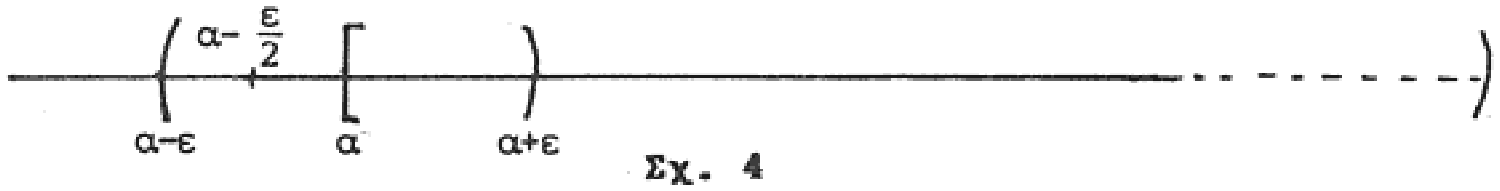
2.1.2. <u>Εσωτερικά σημεία</u>. Ένα σημείο x ενός υποσυνόλου A του R λέγεται **εσωτερικό** σημείο του A αν υπάρχει $\varepsilon>0$ τέτοιο ώστε το ανοιχτό διάστημα $(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$, που θα το ονομάζουμε και **ε-περιοχή** του x, να περιέχεται στο A: $(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)\subset A$.

Παρατηρείστε ότι όλα τα σημεία των διαστημάτων της μορφής (α,β), (α,∞), $(-\infty,\alpha)$, $(-\infty,\infty)$ είναι εσωτερικά σημεία. Έστω π.χ. $x\in(\alpha,\beta)$, δηλ. $\alpha<x<\beta$. Αν γράψουμε $\varepsilon=\min\{x-\alpha,\ \beta-x\}$, τότε $(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)\subset(\alpha,\beta)$ (βλ. σχ. 3).



Σχ. 3

Τα σημεία των υπολοίπων διαστημάτων είναι επίσης εσωτερικά με πιθανή εξαίρεση κάποια άκρα. Π.χ. $\alpha\in[\alpha,\infty)$ αλλά οποιαδήποτε ε-περιοχή του α, $(\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon)$ με $\varepsilon>0$, περιέχει αριθμούς μικρότερους του α (π.χ. τον $\alpha-\frac{\varepsilon}{2}$) και επομένως δεν περιέχεται στο $[\alpha,\infty)$ (σχ.4)



Σχ. 4

Σε πάρα πολλές περιπτώσεις η μελέτη μιας πραγματικής συνάρτησης απλουστεύεται στα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της και το γεγονός αυτό δικαιολογεί την εισαγωγή αυτής της έννοιας.

2.2. <u>Παραδείγματα πραγματικών συναρτήσεων</u>.

2.2.1. <u>Ακολουθίες</u>. Αν μία συνάρτηση α έχει πεδίο ορισμού τους φυσικούς N, $\alpha:N\to R$, τότε λέγεται **ακολουθία.** Στην περίπτωση αυτή γράφουμε συνήθως α_n αντί $\alpha(n)$, $n=1,2,\ldots$ και μιλάμε για την ακολουθία $\{\alpha_n\}$, $n=1,2,\ldots$ αντί για τη συνάρτηση $\alpha:N\to R$. Θα γράφουμε επίσης $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\ldots$ για την ακολουθία $\{\alpha_n\}$, $n=1,2,\ldots$

Παραδείγματα : $\alpha_n=\frac{1}{n}$, $n=1,2,\ldots$; $\beta_n=n$, $n=1,2,\ldots$; $\gamma_n=(-1)^n$, $n=1,2,\ldots$.

2.2.2. <u>Πολυωνυμικές συναρτήσεις</u>. Με τον όρο αυτό εννοούμε φυσικά συναρτήσεις $f:R\to R$ που ορίζονται από τύπους της μορφής :

$$f(x)=\alpha_o+\alpha_1x+\ldots+\alpha_nx^n, \quad x\in R,$$

όπου $\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ είναι δεδομένοι πραγματικοί αριθμοί και $\alpha_n\neq 0$. Ο αριθμός n λέγεται βαθμός της πολυωνυμικής συνάρτησης. Αν $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0$, δηλ. αν $f(x)=\alpha_o$, $x\in R$, η συνάρτηση λέγεται σταθερά και ο βαθμός της είναι 0 αν $\alpha_o\neq 0$, ενώ δεν ορίζεται βαθμός αν $\alpha_o=0$ (ορισμένοι συγγραφείς ορίζουν στην περίπτωση αυτή σαν βαθμό το $-\infty$). Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις πρώτου βαθμού λέγονται συνήθως γραμμικές.

2.2.3. <u>Ρητές συναρτήσεις</u>. Με τον όρο αυτό εννοούμε συναρτήσεις $f:A\to R$ που ορίζονται από τύπους της μορφής

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\alpha_o+\alpha_1x+\ldots+\alpha_nx^n}{b_o+b_1x+\ldots+b_mx^m}$$

δηλ. είναι πηλίκα δύο πολυωνύμων. Το A εδώ είναι το σύνολο των πραγματικών x για τους οποίους $Q(x)\neq 0$ και υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο Q δεν είναι η σταθερά 0. Αποδεικνύεται ότι σ' αυτή την περίπτωση υπάρχουν το πολύ m πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $Q(x)=0$. Οι αριθμοί αυτοί λέγονται ρίζες του Q. Η απόδειξη είναι εύκολη με επαγωγή ως προς το βαθμό m του Q. Για $m=1$, δηλ. για Q γραμμική, έχουμε ακριβώς μία ρίζα. Έστω τώρα $m>1$ και α μία ρίζα του Q. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του Q με $x-\alpha$ θα έχει βαθμό <1, δηλ. θα είναι μία σταθερά και επομένως $Q(x)=(x-\alpha)\pi(x)+c$ για κάποιο πολυώνυμο $\pi(x)$. Θέτοντας $x=\alpha$ βλέπουμε ότι $c=0$ και επομένως $Q(x)=(x-\alpha)\pi(x)$. Το $\pi(x)$ έχει βαθμό $m-1$ και για κάθε ρίζα β του Q με $\beta\neq\alpha$ θα έχουμε $Q(\beta)=0=(\beta-\alpha)\pi(\beta)$, δηλ. $\pi(\beta)=0$. Κάνοντας την επαγωγική υπόθεση ότι το $\pi(x)$ έχει το πολύ $m-1$ ρίζες συνάγουμε ότι το $Q(x)$ έχει πράγματι το πολύ m ρίζες (τις ρίζες του π και την α).

Παρατηρήσεις : α) υπάρχει ένα σοβαρό λογικό κενό σε όσα είπαμε. Η αρχή της επαγωγής ισχύει φυσικά και θα τη χρησιμοποιήσουμε ελεύθερα και στη συνέχεια. Θα πρέπει όμως να δείξουμε ότι είναι συνέπεια των αξιωμάτων που παραδεχτήκαμε (α και β).
Υπάρχει ένα ακόμη σοβαρότερο κενό. Δεν έχουμε ακόμη ορίσει ποιοι από τους πραγματικούς είναι οι Φυσικοί. Θέλουμε βέβαια το σύνολο των Φυσικών να περιέχει τους 1, 1+1(=2), 2+1(=3),... και μόνον αυτούς. Πρέπει λοιπόν να είναι ένα σύνολο N που ικανοποιεί :

i) $1 \in N$, ii) αν $n \in N$ τότε και $n+1 \in N$. Τέτοια όμως σύνολα μπορεί να υπάρχουν πολλά (π.χ. το ίδιο το R, το Q,...). Ορίζουμε λοιπόν το σύνολο των Φυσικών N να είναι η τομή όλων των υποσυνόλων των πραγματικών που ικανοποιούν τις i) και ii), με άλλα λόγια το N είναι το "μικρότερο" σύνολο πραγματικών που ικανοποιεί τις i) και ii) (γιατί;).

β) Οι ρητές συναρτήσεις $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ που εξετάσαμε, είναι ειδικές περιπτώσεις των λεγομένων **αλγεβρικών συναρτήσεων**, δηλ. συναρτήσεων f που ικανοποιούν ταυτοτικά στο πεδίο ορισμού τους μία πολυωνυμική εξίσωση δύο μεταβλητών :

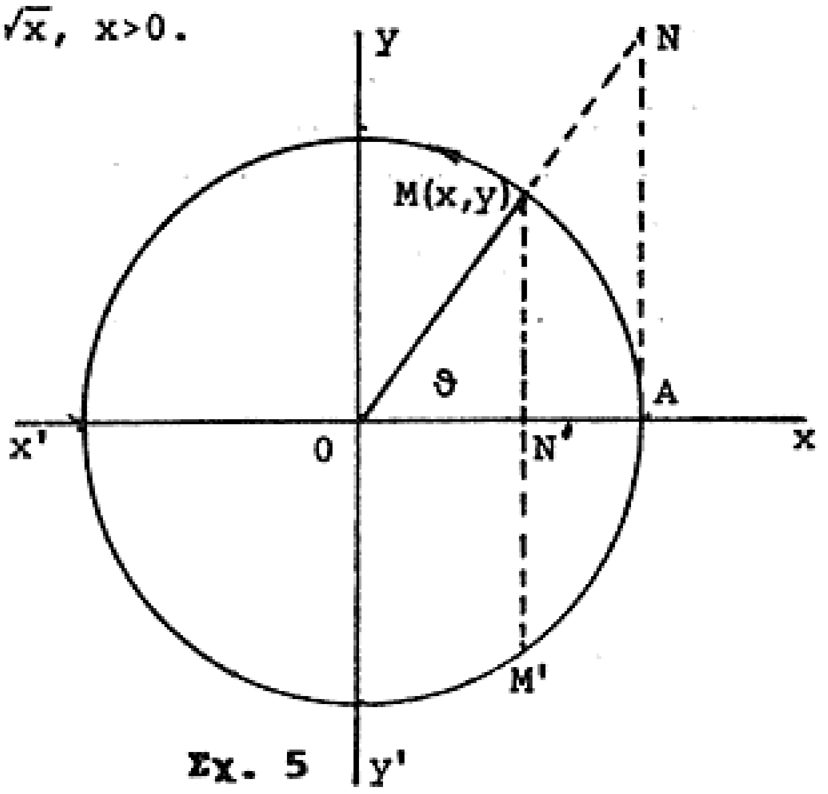
$$\alpha_o(x)+\alpha_1(x)f(x)+\ldots+\alpha_\varkappa(x)(f(x))^\varkappa=0$$

όπου $\alpha_o,\alpha_1,\ldots,\alpha_\varkappa$, πολυωνυμικές συναρτήσεις και η $\alpha_\varkappa$ δεν είναι η σταθερά συνάρτηση 0. Η ρητή $f=\frac{P}{Q}$ π.χ. ικανοποιεί την $P(x)+Q(x)f(x)=0$.

Θα γνωρίσουμε αργότερα και άλλα σημαντικά παραδείγματα αλγεβρικών συναρτήσεων, όπως π.χ. $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$.

2.2.4. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Θεωρούμε δύο κάθετους άξονες X'OX, Y'OY στο επίπεδο και θυμόμαστε ότι σε κάθε (διατεταγμένο) ζευγάρι πραγματικών αριθμών (x,y) αντιστοιχεί μονοσήμαντα ένα σημείο του επιπέδου με τετμημένη x (δηλ. προσημασμένη προβολή στον άξονα X'OX) και τεταγμένη (δηλ. προσημασμένη προβολή στον άξονα Y'OY) y.



Σχ. 5

Θεωρούμε επίσης μια περιφέρεια με κέντρο O και ακτίνα 1 διαγραμμένη με φορά αντίθετη με τη φορά των δεικτών του ωρολογίου. Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι για κάθε πραγματικό ϑ υπάρχει ένα σημείο M(x,y) πάνω στην περιφέρεια τέτοιο ώστε το τόξο $\widehat{AM}$ να είναι ϑ ακτίνια. Φυσικά σε δύο διαφορετικούς αριθμούς ϑ,φ, είναι δυνατόν να αντιστοιχεί το ίδιο σημείο M. Η ικανή και αναγκαία συνθήκη γι' αυτό είναι : "ϑ-φ= ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π".

Οι συναρτήσεις sin (ημίτονο), cos (συνημίτονο) και tan (εφαπτομένη) ορίζονται τώρα ως εξής :

$\sin\vartheta = y \qquad \vartheta \in R$

$\cos\vartheta = x \qquad \vartheta \in R$

$\tan\vartheta = y/x \qquad \vartheta \in R-\{(2\varkappa+1)\frac{\pi}{2} : \varkappa \in Z\}$

Με βάση τους ορισμούς αυτούς μπορούμε εύκολα να βρούμε τις γνωστές σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αυτών συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι ο αναγνώστης είναι εξοικειωμένος με αυτές.

Υπενθυμίζουμε μόνο την εξής ανισότητα που θα μας χρειαστεί αργότερα

$$|\sin\vartheta| \le |\vartheta| \le |\tan\vartheta|, \quad |\vartheta| < \frac{\pi}{2}.$$

Αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση $0<\vartheta<\frac{\pi}{2}$ (γιατί;) και να παρατηρήσουμε ότι (βλ. σχ. 5)

$$2\sin\vartheta = MM' \le \widehat{MM'} = 2\vartheta \quad \text{και}$$

$$\frac{1}{2}\,\vartheta = \text{εμβαδόν } OAM \le \text{εμβαδόν } OAN = \frac{1}{2}\,AN = \frac{1}{2}\tan\vartheta$$

(η τελευταία ισότητα προκύπτει άμεσα από την ομοιότητα των τριγώνων ONM και OAN. Η AN είναι φυσικά η εφαπτομένη της περιφέρειας στο A).

Μια απλή παρατήρηση για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\sin\vartheta$ και $\cos\vartheta$ είναι ότι είναι **περιοδικές** με περίοδο 2π, δηλ. ικανοποιούν τη σχέση $f(\vartheta+2\pi)=f(\vartheta)$, $\vartheta\in\mathbb{R}$, $f=\sin$ ή $f=\cos$. Αν τώρα κ είναι ένας φυσικός αριθμός τότε για το sin (και όμοια για το cos) θα έχουμε :

$\sin(x+\kappa.2\pi)=\sin(x+(\kappa-1)2\pi)=\ldots=\sin(x+2\pi)=\sin x$, δηλ. όχι μόνο το 2π αλλά και κάθε πολλαπλάσιο του $2\pi\kappa$, $\kappa\in\mathbb{N}$, είναι περίοδος. Τό 2π είναι μάλιστα η πιο μικρή θετική περίοδος. Πραγματικά αν $0<\alpha<2\pi$ και $\sin(\vartheta+\alpha)=\sin\vartheta$ για όλα τα ϑ, τότε, παίρνοντας $\vartheta=0$, έχουμε $\sin\alpha=\sin 0=0$, δηλ. (αφού $0<\alpha<2\pi$) $\alpha=\pi$. Παίρνοντας τώρα $\vartheta=\frac{\pi}{2}$ έχουμε $\sin(\pi+\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}$, δηλ. $-1=1$ που είναι άτοπο.

Παρατήρηση. Η εισαγωγή των τριγωνομετρικών συναρτήσεων που δώσαμε παραπάνω, έχει το "μειονέκτημα", ότι στηρίχτηκε στη γεωμετρική εποπτεία. Θα έπρεπε λοιπόν, ή να δικαιολογήσουμε, με βάση τα αξιώματα των πραγματικών αριθμών, τα γεωμετρικά επιχειρήματα που χρησιμοποιήσαμε, ή να δώσουμε άλλους ορισμούς, χωρίς αυτό το μειονέκτημα. Στη συνέχεια έπρεπε να δώσουμε επιχειρήματα, που πείθουν ότι οι νέοι ορισμοί οδηγούν σε συναρτήσεις που έχουν τη γεωμετρική ερμηνεία που θέλουμε. Θα σκιαγραφήσουμε την τελευταία μέθοδο αργότερα (μετά την εισαγωγή της έννοιας του ολοκληρώματος).

2.2.5. Πρόσημο (sgn) ενός πραγματικού αριθμού.

Σε πολλές περιπτώσεις χρήσιμες συναρτήσεις δίνονται "κατά τμήματα". Π.χ.

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή συμβολίζεται συνήθως με sgnx και έχει την ονομασία "πρόσημο του x". Η απλή σχέση

$x=(\mathrm{sgn}x)|x|$

δικαιολογεί αυτή την ονομασία.

2.2.6. Ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αριθμού.

Έστω x ένας πραγματικός αριθμός.

Ισχυρισμός :"Υπάρχει ακριβώς ένας ακέραιος n τέτοιος ώστε $n\le x<n+1$"

Αν πιστέψουμε τον ισχυρισμό, τότε μπορούμε να ορίσουμε μία συνάρτηση, η οποία σε κάθε x αντιστοιχεί αυτόν τον ακέραιο n. Ονομάζουμε αυτή τη συνάρτηση "ακέραιο μέρος του x" και τη συμβολίζουμε $[x]$. Έχουμε λοιπόν :

$$[x]=\begin{cases} \cdots\cdots & \\ -1 & -1\le x<0 \\ 0 & 0\le x<1 \\ 1 & 1\le x<2 \\ 2 & 2\le x<3 \\ \cdots\cdots & \end{cases}$$

Γυρνάμε τώρα στον ισχυρισμό, ο οποίος, όσο φανερός και να είναι διαισθητικά, χρειάζεται απόδειξη. Κατ' αρχήν αν υπήρχαν δύο τέτοιοι ακέραιοι m και n, τότε $n\le x<n+1$ & $m\le x<m+1$ και επομένως $n<m+1$ και $m<n+1$, δηλ. $m=n$.

Παρατηρούμε τώρα ότι υπάρχει φυσικός M τέτοιος ώστε $M>|x|$ (λόγω της Αρχιμήδειας διάταξης των πραγματικών) δηλ. $-M<x<M$. Προφανώς όμως το x θα ανήκει σε ένα από τα ημίκλειστα διαστήματα $[\kappa,\kappa+1)$, $\kappa=-M,\ldots,M-1$, που είναι αυτό ακριβώς που θέλαμε να δείξουμε.

Με τη βοήθεια της συνάρτησης $[x]$ μπορούμε εύκολα να δείξουμε μια πολύ σημαντική ιδιότητα των ρητών αριθμών: **"Αν $\alpha<\beta$ είναι δύο τυχαίοι πραγματικοί, τότε υπάρχει ρητός q τέτοιος ώστε $\alpha<q<\beta$"**. Η σημασία της πρότασης είναι ότι μας εξασφαλίζει όσο θέλουμε καλή "προσέγγιση" των πραγματικών με ρητούς. Πραγματικά, για οποιοδήποτε $x\in R$ και $\varepsilon>0$ υπάρχει ρητός q στο διάστημα $(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$ και επομένως $|x-q|<\varepsilon$. Φυσικά μια τέτοια προσέγγιση μπορούμε να πάρουμε με κατάλληλα μεγάλο κομμάτι της "δεκαδικής" ανάπτυξης ενός πραγματικού x (π.χ. $1{,}41=\frac{141}{100}$ είναι μία ρητή προσέγγιση του $\sqrt{2}$). Σε επόμενη παράγραφο θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη της δυνατότητας παράστασης των πραγματικών με δεκαδικούς και θα έχουμε έτσι και μια άλλη, διαισθητικά τουλάχιστον πιο φυσιολογική, απόδειξη για την ιδιότητα των ρητών που αναφέραμε. Πολύ συχνά στη βιβλιογραφία η ιδιότητα αυτή εκφράζεται και ως εξής : **"Οι ρητοί αποτελούν πυκνό υποσύνολο των πραγματικών"**.

Απόδειξη : Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών ξέρουμε ότι υπάρχει $n\in N$ τέτοιο ώστε $n(\beta-\alpha)>2$ και επομένως $n\beta>n\alpha+2>[n\alpha]+1>n\alpha$. Γράφοντας $q=\dfrac{[n\alpha]+1}{n}$, έχουμε $\alpha<q<\beta$.

Εξ ίσου απλό είναι να δείξουμε ότι **"μεταξύ δύο ρητών** $q_1<q_2$ **υπάρχει άρρητος"**. Πραγματικά, οι αριθμοί $q_1+\frac{\sqrt{2}}{n}$, $n\in N$, είναι όλοι άρρητοι (γιατί;) και μεγαλύτεροι του q_1. Αν διαλέξουμε το n έτσι ώστε $n>\dfrac{\sqrt{2}}{q_2-q_1}$, το οποίο είναι δυνατόν λόγω της Αρχιμήδειας ιδιότητας, τότε ο άρρητος $\alpha=q_1+\dfrac{\sqrt{2}}{n}$ ικανοποιεί την ανισότητα $q_1<\alpha<q_2$.

2.2.7. Αν $A\subset R$, ονομάζουμε **χαρακτηριστική συνάρτηση** του A (συμβολισμός χ_A) τη συνάρτηση :

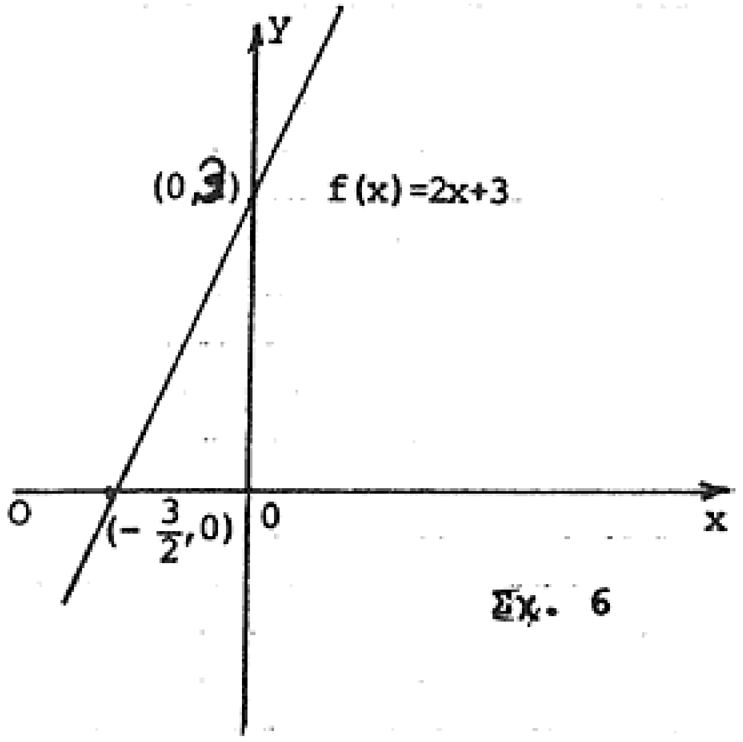
$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$$

Χαρακτηριστικές συναρτήσεις συναντάμε συχνά στον Απειροστικό Λογισμό. Έτσι π.χ. η χ_Q, όπου Q το σύνολο των ρητών, που ονομάζεται και "συνάρτηση του Dirichlet", θα είναι αρκετά συχνή πηγή αντιπαραδειγμάτων.

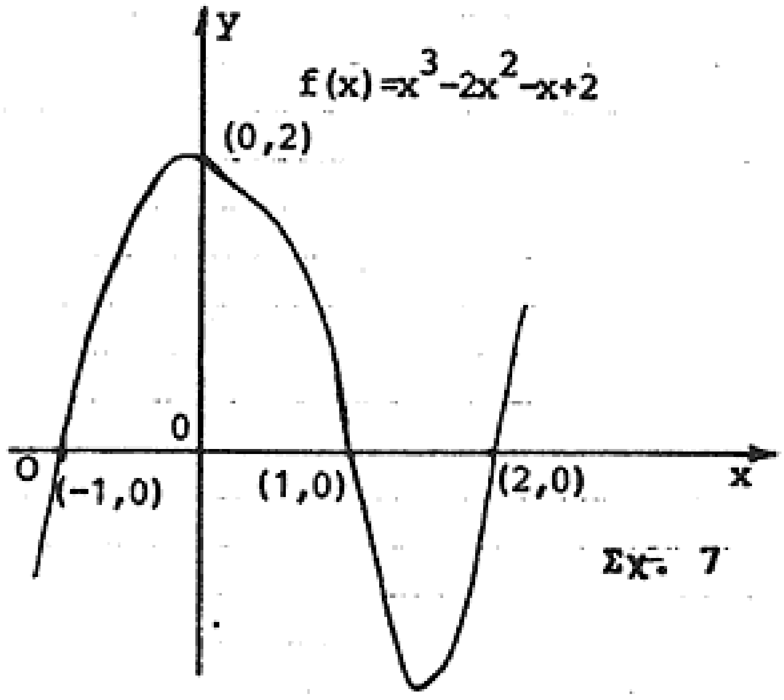
2.2.8. Γραφική παράσταση συναρτήσεων.

Έστω $f:A\to R$, $A\subset R$, μία πραγματική συνάρτηση. Το υποσύνολο του επιπέδου με συντεταγμένες $(x,f(x))$, $x\in A$, λέγεται **γράφημα** της f. Φυσικά εννοούμε εδώ ότι οι συντεταγμένες παίρνονται ως προς ένα ορθογώνιο δεξιόστροφο σύστημα Καρτεσιανών συν/νων (πρβλ. 2.2.3).

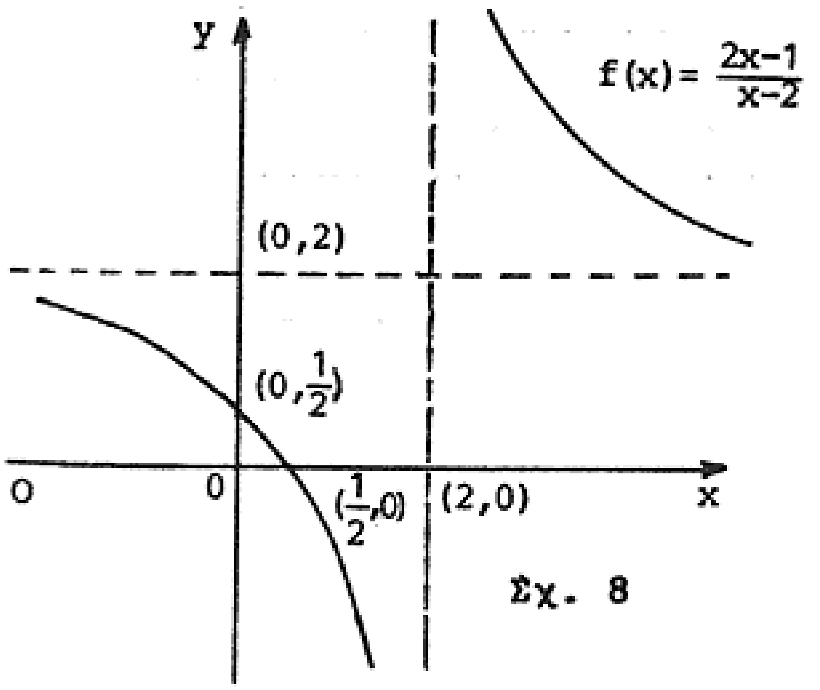
Ιδού οι γραφικές παραστάσεις (που είναι όρος συνώνυμος με το γράφημα) μερικών από τις συναρτήσεις που ορίσαμε πιο πάνω.



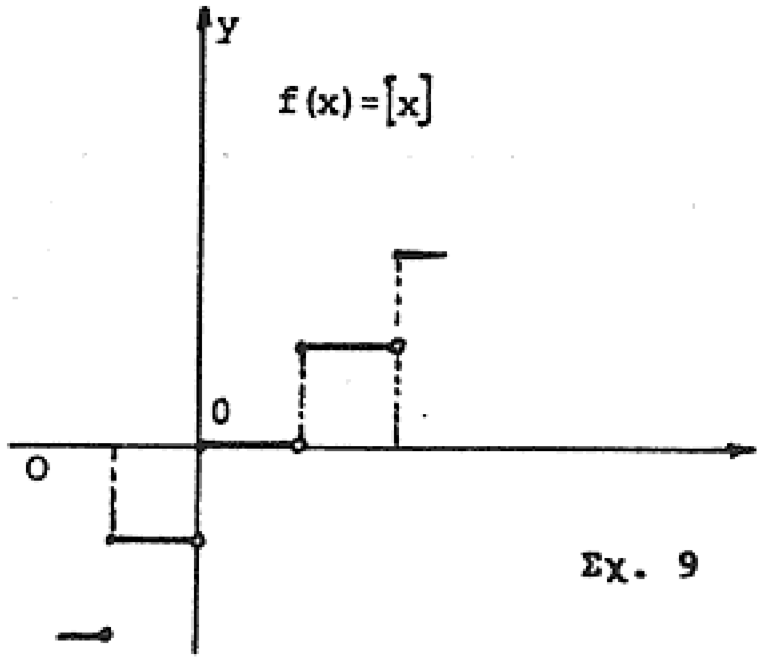
Σχ. 6



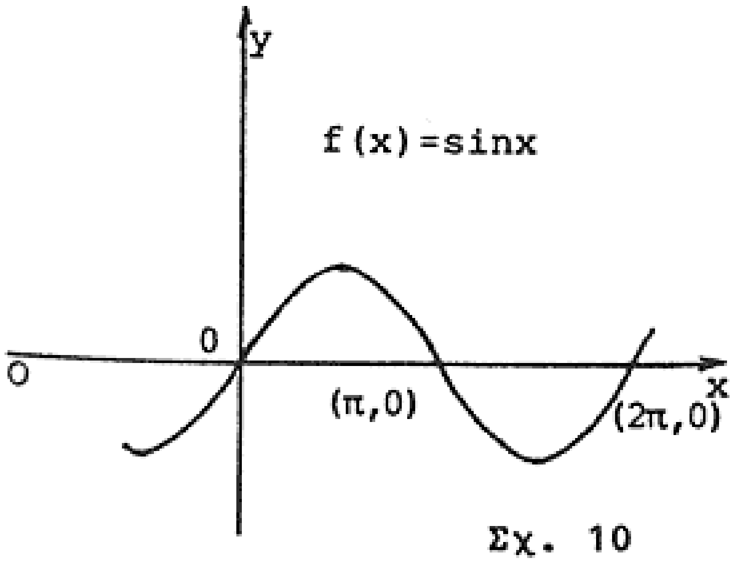
Σχ. 7



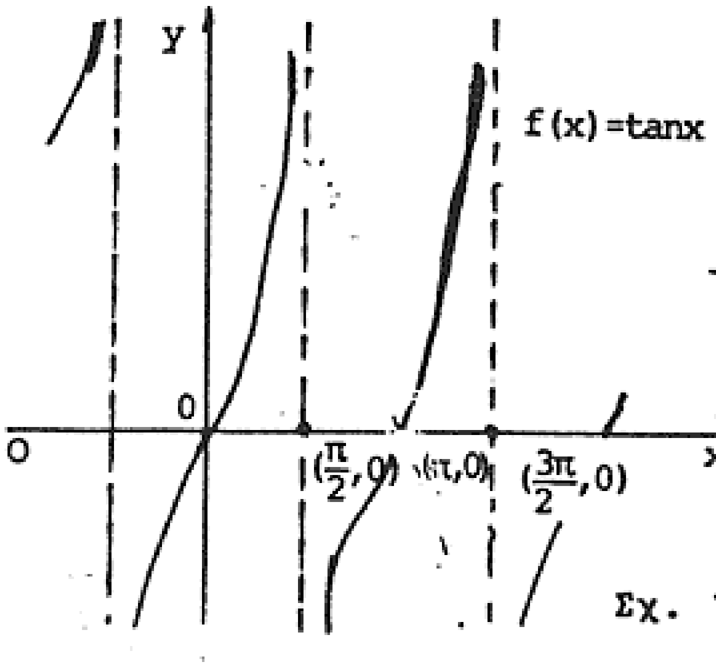
Σχ. 8



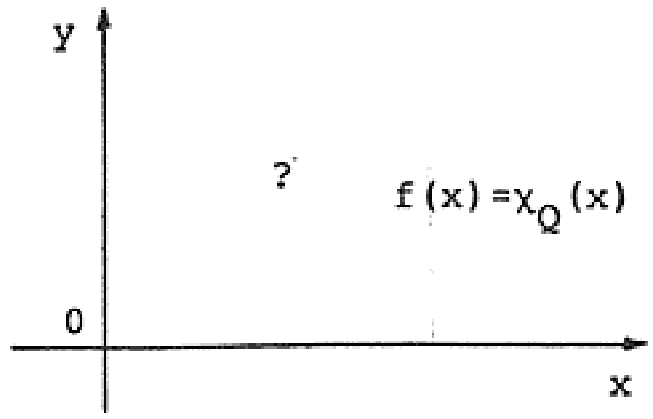
Σχ. 9



Σχ. 10



Σχ. 11



Σχ. 12

2.3 <u>Ασκήσεις</u>

1) Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x)=x-[x]\,,\quad x\in R,\qquad g(x)=\begin{cases} x-[x]\,, & [x]\le x\le [x]+\frac{1}{2}\\ [x]+1-x\,, & [x]+\frac{1}{2}<x<[x]+1\end{cases}$$

Δείξτε ότι οι f και g είναι περιοδικές και βρείτε την περίοδό τους. Δείξτε επίσης $0\le g(x)\le|\sin\pi x|$ και βρείτε τα x γιά τα οποία ισχύουν ισότητες.

Έστω

Αού

2) Ένα μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών A έχει μόνο εσωτερικά σημεία (τέτοια σύνολα λέγονται **ανοιχτά**). Εστω $x_o\in A$. Δείξτε ότι υπάρχει διάστημα I πού περιέχει τό x_o καί περιέχεται στό A καί πού έχει την επιπλέον ιδιότητα: Γιά κάθε άλλο διάστημα $J\supsetneq I$, $J\not\subset A$. Με άλλα λόγια το I είναι το "μεγαλύτερο" ανοιχτό διάστημα που περιέχει το x_o και περιέχεται στο A (**υπόδειξη** : αξίωμα συνεχείας). Δώστε παραδείγματα, αν υπάρχουν, στά οποία το A δεν είναι διάστημα, όπου το I έχει τη μορφή (α,β) $(-\infty,\alpha)\,(\alpha,\infty)$, $(-\infty,\infty)$.

3) Με βάση τον ορισμό των φυσικών που δώσαμε στην παρατήρηση α της παραγράφου 2.2.3 δείξτε την αρχή της τελείας επαγωγής:
"Αν $A\subset N$, $1\in A$, $n\in A \Rightarrow n+1\in A$, τότε $A = N$".

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : Σύγκλιση, συνέχεια

Ίσως η σημαντικότερη έννοια του Απειροστικού Λογισμού είναι η έννοια του **ορίου**. Μπορούμε να πούμε ότι ο Απειροστικός Λογισμός μελετάει εκείνες τις ιδιότητες των πραγματικών συναρτήσεων που έμμεσα ή άμεσα συνδέονται με όρια. Θα διακρίνουμε διάφορες περιπτώσεις : όρια συναρτήσεων $f(x)$ όταν το x τείνει σε ένα πραγματικό αριθμό x_0, όταν το x τείνει στο $+\infty$, όταν το x τείνει στο $-\infty$, όρια ακολουθιών κ.λ.π. Είναι δυνατόν να ενοποιηθούν αυτές οι περιπτώσεις, όπως μας διδάσκει ένας κλάδος των Μαθηματικών που ονομάζεται Τοπολογία, αλλά δεν κρίνεται σκόπιμο να επιλεγεί αυτή η μέθοδος τώρα.

3.1. Ακολουθίες

3.1.1. Σύγκλιση σε πραγματικό αριθμό

Έστω α_n μία ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η διαισθητική εικόνα που έχουμε στο μυαλό μας, όταν λέμε "Η α_n συγκλίνει στον αριθμό α" είναι φυσικά, ότι οι τιμές α_n βρίσκονται "όσο θέλουμε κοντά" στο α "για αρκετά μεγάλα n".

Ας προσπαθήσουμε να μεταφράσουμε σε μαθηματικό ορισμό αυτές τις απαιτήσεις.

"Όσο θέλουμε κοντά" σημαίνει ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς $\alpha_n-\alpha$ γίνεται όσο θέλουμε μικρή "για αρκετά μεγάλα n", δηλ. όποιος και να είναι ο θετικός αριθμός ε, "για αρκετά μεγάλα n", έχουμε $|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon$.

"Για αρκετά μεγάλα n" σημαίνει φυσικά ότι για κάποιο φυσικό αριθμό n_0, $n>n_0$.

Κάνοντας τη σύνθεση των όσων είπαμε, φτάνουμε στον παρακάτω ορισμό, ο οποίος αποδίδεται συνήθως στο Γάλλο μαθηματικό A.Cauchy (αρχές 19ου αιώνα).

Ορισμός : "Η ακολουθία α_n συγκλίνει στον αριθμό α (συμβολισμός : $\lim\alpha_n=\alpha$ ή $\alpha_n\to\alpha$), αν για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει φυσικός n_0 τέτοιος ώστε η ανισότητα $n>n_0$ να συνεπάγεται $|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon$.

Μία λίγο "ποιητική" έκφραση που χρησιμοποιούσαν οι μαθηματικοί παλιότερα ήταν η εξής :

"$\alpha_n\to\alpha$, αν για οποιοδήποτε $\varepsilon>0$, οσονδήποτε μικρό, η διαφορά $\alpha_n-\alpha$ μπορεί **να γίνει** (υπάρχουν n) **και να μείνει** (για όλα τα $n>n_0$), σε απόλυτη τιμή, μικρότερη του ε". Μίλαγαν επίσης για "δυνάμει" άπειρο και "γίγνεσθαι" άπειρο και άλλες "φιλοσοφίες", για τις οποίες η συμβουλή στον νεοεισαγόμενο στο θέμα είναι μία και μόνο: **να τις αποφεύγει.**

Παραδείγματα

α) $\alpha_n = \frac{1}{n} \to 0$. Πραγματικά, έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει φυσικός n_o τέτοιος ώστε $n_o\varepsilon>1$ (γιατί;), επομένως και $n\varepsilon>1$ για όλα τα $n>n_o$. Με άλλα λόγια υπάρχει n_o τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{n} = \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \text{ για όλα τα } n>n_o,$$

που αποδεικνύει ότι $\frac{1}{n} \to 0$.

β) $\alpha_n = n$. Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει $\alpha\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\alpha_n \to \alpha$. Πραγματικά αν υπήρχε τέτοιο α τότε, παίρνοντας π.χ. $\varepsilon=1$, θα υπήρχε και $n_o\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|\alpha_n-\alpha|<1$, επομένως $\alpha_n=n<\alpha+1$, για όλα τα $n>n_o$, το οποίο είναι άτοπο.

γ) $\alpha_n = (-1)^n$. Και πάλι δεν υπάρχει πραγματικός α τέτοιος ώστε $\alpha_n \to \alpha$. Διαισθητικά αυτό είναι φανερό γιατί οι ζυγοί όροι της ακολουθίας $(\alpha_{2n}, n\in\mathbb{N})$ είναι 1 και οι μονοί -1. Ας μεταφράσουμε σε απόδειξη αυτή τη διαισθητική εικόνα. Έστω $\alpha_n \to \alpha$ και ας πάρουμε πάλι $\varepsilon=1$. Θα υπήρχε τότε n_o τέτοιο ώστε $|\alpha_n-\alpha|<1$ για όλα τα $n>n_o$. Φυσικά υπάρχουν και μονά και ζυγά $n>n_o$. Συνεπώς, θα έπρεπε να ισχύουν συγχρόνως οι ανισότητες :

$$|1-\alpha|<1 \text{ και } |-1-\alpha|<1$$

και επομένως

$$1+1=2>|1-\alpha|+|1+\alpha|\geq|(1-\alpha)+(1+\alpha)|=2,$$

που φυσικά είναι άτοπο.

3.1.2. <u>Σύγκλιση στο $+\infty$, $-\infty$</u>

Στην περίπτωση του παραδείγματος β οι όροι της ακολουθίας μπορούν να ξεπεράσουν, και να μείνουν, μεγαλύτεροι από οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, οσονδήποτε μεγάλο. Πραγματικά αν $M\in\mathbb{R}$ τότε από την Αρχιμήδεια διάταξη των πραγματικών συνάγουμε άμεσα ότι υπάρχει $n_o\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n_o>M$ και άρα $n>M$ για όλα τα $n>n_o$. Λέμε στην περίπτωση αυτή ότι η α_n συγκλίνει (μερικοί συγγραφείς λένε αποκλίνει) στο $+\infty$. Ανάλογα ορίζουμε τη σύγκλιση στο $-\infty$ (π.χ. $\alpha_n=(-n)\to-\infty$). Ακριβέστερα :

__Ορισμός__ : **Μία ακολουθία α_n συγκλίνει στο $+\infty(-\infty)$ αν για κάθε $M\in\mathbb{R}$ υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 τέτοιος ώστε $\alpha_n>M$ $(\alpha_n<M)$ για όλα τα $n>n_0$. Συμβολισμός $\lim\alpha_n=+\infty(\lim\alpha_n=-\infty)$ ή $\alpha_n\to+\infty$ $(\alpha_n\to-\infty)$.**

3.1.3. __Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών.__

Συγκλίνουσες θα ονομάζουμε τις ακολουθίες που συγκλίνουν σε ένα πραγματικό αριθμό. Ειδικώτερα οι ακολουθίες που συγκλίνουν στο 0 λέγονται **μηδενικές**. Είναι φανερό ότι **"$\alpha_n\to\alpha$ αν και μόνο αν η ακολουθία $\alpha_n-\alpha$ είναι μηδενική"** [illegible]. θαλέμε αποκλίνουσες τις ακολουθίες που δε συγκλίνουν ούτε σε πραγματικό αριθμό ούτε στο $+\infty$ ούτε στο $-\infty$. Είναι επίσης φανερό από τον ορισμό ότι αν αλλάξουμε πεπερασμένο πλήθος όρων μιας ακολουθίας τότε η συμπεριφορά της ως προς τη σύγκλιση δεν αλλάζει. Με άλλα λόγια :**"Αν υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\alpha_n=\beta_n$ για κάθε $n>n_0$, τότε η α_n συγκλίνει (σε πραγματικό αριθμό, στο $+\infty$, στο $-\infty$) αν και μόνο αν το ίδιο ισχύει για τη β_n".**

Μια άλλη απλή (και πολύ σημαντική) ιδιότητα είναι η εξής : **αν $\alpha_n\to\alpha$ και $\alpha_n\to\beta$, τότε $\alpha=\beta$.** Με άλλα λόγια, το **όριο** μιας συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μοναδικό. (Φυσικά όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας ονομάζεται ο αριθμός $\lim\alpha_n$).
Η απόδειξη είναι απλή αλλά ο συλλογισμός είναι πολύ χρήσιμος και σημαντικός. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $\alpha_n\to\alpha$ και $\alpha_n\to\beta$. Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχουν n_1,n_2 τέτοια ώστε $n>n_1\Rightarrow|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon$, $n>n_2\Rightarrow|\alpha_n-\beta|<\varepsilon$. Για κάποιο λοιπόν $n>\max(n_1,n_2)$ θα έχουμε

$$|\alpha-\beta|=|(\alpha_n-\alpha)-(\alpha_n-\beta)|\le|\alpha_n-\alpha|+|\alpha_n-\beta|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

Αφού το ε, άρα και το 2ε, μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός το αποτέλεσμα με λόγια είναι : "Ο αριθμός $|\alpha-\beta|$ είναι μικρότερος κάθε θετικού αριθμού". Αν $\alpha\neq\beta$ τότε $|\alpha-\beta|>0$ και μπορούμε να πάρουμε π.χ. $\varepsilon=\frac{|\alpha-\beta|}{2}$, οπότε συνάγουμε $2<1$, που φυσικά είναι άτοπο και επομένως $\alpha=\beta$.

Παρατήρηση : Πριν τον 19ο αιώνα οι μαθηματικοί μίλαγαν για θετικές ποσότητες μικρότερες κάθε άλλου θετικού αριθμού και τις έλεγαν απειροστά. Μόλις δείξαμε, ότι τέτοιες θετικές ποσότητες δεν υπάρχουν. Τη σοβαρή αυτή "γκάφα" επεσήμανε ένας Ιρλανδός φιλόσοφος (B.Berkley), σε γράμμα του προς "άπιστο μαθηματικό" της εποχής, όπου λίγο πολύ έλεγε : "Διαμαρτύρομαι για τις κουταμάρες που γράφετε" και είχε δίκιο! Μετά από ένα δύο αιώνες οι μαθηματικοί διόρθωσαν την κατάσταση εφαρμόζοντας τη λεγόμενη "εψιλοντική".

"Εψιλοντική" λέγεται, ίσως λίγο κοροϊδευτικά, η μέθοδος που ακολουθήσαμε στον ορισμό του ορίου με το ε.

Μια άλλη απλή ιδιότητα είναι η επονομαζόμενη "σάντουιτς" : **"Αν $\alpha_n \le \beta_n \le \gamma_n$ και $\lim \alpha_n = \lim \gamma_n = \alpha$, τότε και $\lim \beta_n = \alpha$".** Απόδειξη : Έστω $\varepsilon>0$. Θα υπάρχουν φυσικοί n_1, n_2 τέτοιοι ώστε $n>n_1 \Rightarrow |\alpha_n-\alpha|<\varepsilon$ και $n>n_2 \Rightarrow |\gamma_n-\alpha|<\varepsilon$. Αν λοιπόν $n>n_0=\max(n_1,n_2)$ τότε $|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon$ & $|\gamma_n-\alpha|<\varepsilon$, επομένως και $\max\{|\alpha_n-\alpha|, |\gamma_n-\alpha|\}<\varepsilon$ (ποια είναι η γεωμετρική σημασία αυτού του συλλογισμού;).

Παρατηρούμε τώρα ότι αν $\alpha \le \beta_n$ τότε $|\beta_n-\alpha| \le |\gamma_n-\alpha|$ και αν $\alpha>\beta_n$ τότε $|\beta_n-\alpha|<|\alpha_n-\alpha|$. Στην οποιαδήποτε λοιπόν περίπτωση $|\beta_n-\alpha| \le \max\{|\alpha_n-\alpha|, |\gamma_n-\alpha|\}$ και επομένως $n>n_0 \Rightarrow |\beta_n-\alpha|<\varepsilon$, δηλ. $\beta_n \to \alpha$.

Θα κλείσουμε αυτή την παράγραφο με δύο ακόμη σημαντικές ιδιότητες, οι οποίες είναι επίσης διαισθητικά φανερές, για την απόδειξη των οποίων θα κάνουμε ουσιαστική χρήση του αξιώματος της συνέχειας. Τις δίνουμε με τη μορφή θεωρήματος.

<u>Θεώρημα</u> **α) Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.**
β) Κάθε φραγμένη ακολουθία περιέχει μια συγκλίνουσα υποακολουθία.

Οφείλουμε κατ' αρχήν να εξηγήσουμε τους όρους που εμφανίζονται στη διατύπωση του θεωρήματος.

Έστω α_n μία ακολουθία.

Αν $\alpha_{n+1} \ge \alpha_n$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, τότε η α_n λέγεται **αύξουσα.**
" $\alpha_{n+1} \le \alpha_n$ " " " " " " " " **φθίνουσα.**
" $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ " " " " " " " " **γνήσια αύξουσα.**
" $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ " " " " " " " " **γνήσια φθίνουσα.**

Αν η α_n είναι (γνήσια) αύξουσα ή (γνήσια) φθίνουσα, τότε λέγεται (γνήσια) **μονότονη.**

Μία ακολουθία λέγεται **φραγμένη,** αν το σύνολο $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ είναι φραγμένο, δηλ. υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $|\alpha_n| \le M$ για όλα τα n.

Αν από τους όρους μιας ακολουθίας αφαιρέσουμε μερικούς (πεπερασμένου ή άπειρου πλήθους), με τέτοιο τρόπο ώστε να μείνει πάλι μία ακολουθία, τότε την ακολουθία αυτή τη λέμε υπακολουθία της α_n. Ιδού ο ακριβής ορισμός :

"Η ακολουθία β_n είναι υπακολουθία της α_n αν υπάρχει μία γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών $\kappa_1<\kappa_2<\ldots<\kappa_n<\ldots$ τέτοιων ώστε $\beta_n=\alpha_{\kappa_n}$ για όλα τα $n\in N$".

Λίγη σκέψη δείχνει ότι : **"αν μία ακολουθία συγκλίνει (ή συγκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$) τότε κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο ίδιο όριο"** (πραγματικά έστω $\alpha_n\to\alpha$, α_{κ_n} μία υπακολουθία της α_n και $\varepsilon>0$. Υπάρχει $n_\circ$ τέτοιο ώστε $n>n_\circ\Rightarrow|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon$ και επειδή $\kappa_n\geq n$ (γιατί;) για όλα τα n, $n>n_\circ\Rightarrow|\alpha_{\kappa_n}-\alpha|<\varepsilon$).

Απόδειξη Θεωρήματος.

α) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η α_n είναι αύξουσα (η απόδειξη για φθίνουσες είναι παρόμοια). Το αξίωμα της συνέχειας μας εξασφαλίζει την ύπαρξη του αριθμού $\alpha=\sup\{\alpha_n : n\in N\}$. Ισχυρίζομαι, όπως και φυσικά αναμένεται, ότι $\alpha_n\to\alpha$. Πραγματικά έστω $\varepsilon>0$, τότε θα υπάρχει $n_\circ$ τέτοιο ώστε $\alpha_{n_\circ}>\alpha-\varepsilon$ (αλλιώς το $\alpha-\varepsilon$ θα ήταν άνω φράγμα $<\alpha$). Για κάθε $n>n_\circ$, επειδή η α_n είναι αύξουσα, θα έχουμε

$$\alpha\geq\alpha_n\geq\alpha_{n_\circ}>\alpha-\varepsilon$$

και επομένως $|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.

β) Από την υπόθεση συνάγουμε ότι θα υπάρχει $M\in R$ τέτοιο ώστε $-M<\alpha_n<M$ για όλα τα n. Θεωρώ το σύνολο A των πραγματικών αριθμών με την εξής ιδιότητα :"Αν $x\in A$, τότε υπάρχουν άπειρα $n\in N$ τέτοια ώστε $\alpha_n\geq x$", δηλ.

$$A=\{x\in R:\ \text{υπάρχουν άπειρα } n \text{ με } \alpha_n\geq x\}$$

Προφανώς $-M\in A$ και $x\in A\Rightarrow x\leq M$, δηλ. το A είναι μη κενό και φραγμένο προς πάνω. Έστω λοιπόν (αξίωμα συνέχειας) $\alpha=\sup A$. Θα φτιάξω μια υπακολουθία της α_n που να συγκλίνει στο α.

Στο διάστημα $(\alpha-1,\ \alpha+1)$ υπάρχουν σίγουρα άπειροι όροι της ακολουθίας μας (αλλιώς το $\alpha-1$ θα ήταν ένα άνω φράγμα του A· γιατί;). Έστω α_{κ_1} ένας τέτοιος όρος. Στο διάστημα $(\alpha-\frac{1}{2},\ \alpha+\frac{1}{2})$ υπάρχουν επίσης άπειροι της ακολουθίας μας και άρα σίγουρα ένας, έστω ο α_{κ_2}, με $\kappa_2>\kappa_1$. Συνεχίζοντας με τον τρόπο αυτό, βρίσκουμε $\kappa_1<\kappa_2<\ldots<\kappa_n$ τέτοια ώστε $\alpha_{\kappa_\rho}\in(\alpha-\frac{1}{\rho},\alpha+\frac{1}{\rho})$, $\rho=1,\ldots,n$, και ο ίδιος
(γιατί;)

συλλογισμός μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός $\kappa_{n+1}>\kappa_n$ τέτοιου ώστε $\alpha_{\kappa_{n+1}} \in (\alpha-\frac{1}{n+1}, \alpha+\frac{1}{n+1})$. Έχουμε λοιπόν

$$\alpha-\frac{1}{\rho}<\alpha_{\kappa_\rho}<\alpha+\frac{1}{\rho},\ \rho\in N.$$

Η ιδιότητα σάντουιτς δείχνει τώρα ότι πράγματι η υπακολουθία $\beta_\rho=\alpha_{\kappa_\rho}$ συγκλίνει στο α, διότι οι ακολουθίες $\alpha-\frac{1}{\rho}$ και $\alpha+\frac{1}{\rho}$, $\rho\in N$, συγκλίνουν στο α(γιατί;).

3.1.4. Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών (συνέχεια)

Είναι αρκετά εύκολο να δείξει κανείς, ότι απλές πράξεις πάνω στους όρους συγκλινουσών ακολουθιών οδηγούν στα αναμενόμενα αποτελέσματα στα όριά τους. Θα αποδείξουμε ενδεικτικά μερικές από αυτές τις ιδιότητες και θα παραπέμψουμε τις υπόλοιπες (που θα πρέπει να τις βλέπει ήδη σαν ρουτίνα ο αναγνώστης) στις ασκήσεις.

"Αν $\alpha_n\to\alpha$ και $\beta_n\to\beta$, τότε $\alpha_n+\beta_n=\gamma_n\to\alpha+\beta$"

Πράγματι έστω ε>0. Υπάρχουν $n_1,n_2\in N$ τέτοια ώστε $n>n_1\Rightarrow$ $|\alpha_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$, $n>n_2\Rightarrow|\beta_n-\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$ και επομένως :

$$n>\max(n_1,n_2)\Rightarrow|\gamma_n-(\alpha+\beta)|=|(\alpha_n-\alpha)+(\beta_n-\beta)|\le|\alpha_n-\alpha|+|\beta_n-\beta|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

"Αν $\alpha_n\to\alpha$ και $\beta_n\to\beta$ τότε $\alpha_n\beta_n=\gamma_n\to\alpha.\beta$".

Εδώ η απόδειξη είναι πιο ενδιαφέρουσα. Αρχίζουμε με ένα απλό, αλλά σημαντικό, λήμμα.

"Αν $\alpha_n\to\alpha$, τότε η α_n είναι φραγμένη".

Πραγματικά, παίρνοντας ε=1, υπάρχει n_o τέτοιο ώστε $n>n_o\Rightarrow$ $|\alpha_n-\alpha|<1$ και επομένως $n>n_o\Rightarrow|\alpha_n|<|\alpha|+1$. Έχουμε λοιπόν προφανώς

$$|\alpha_n|\le\max\{|\alpha|+1,|\alpha_1|,\dots,|\alpha_{n_o}|\}$$ για όλα τα $n\in N$, δηλ. η α_n είναι φραγμένη.

Γυρνάμε τώρα στην απόδειξη της $\alpha_n\beta_n\to\alpha.\beta$. Το τέχνασμα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι πολύ συνηθισμένο. Έστω ε>0. Αφού οι α_n, β_n συγκλίνουν θα είναι φραγμένες, δηλ. υπάρχουν M_1,M_2 τέτοιοι ώστε $|\alpha_n|<M_1$, $|\beta_n|<M_2$ για όλα τα $n\in N$. Θα έχουμε επίσης (το τέχνασμα) :

$$|\alpha_n\beta_n-\alpha\beta|=|\alpha_n\beta_n-\alpha_n\beta+\alpha_n\beta-\alpha\beta|\le|\alpha_n|\,|\beta_n-\beta|+|\beta|\ \ |\alpha_n-\alpha|\le$$

$$\le M_1|\beta_n-\beta|+|\beta|\,|\alpha_n-\alpha|.$$

Θα αρκούσε λοιπόν να βρούμε $n_\circ$ τέτοιο ώστε για $n>n_\circ$ κάθε προσθετέος του δεξιού μέλους της ανισότητας να είναι $<\frac{\varepsilon}{2}$. Αυτό όμως είναι σίγουρα δυνατό, γιατί υπάρχουν $n_1,n_2\in N$ τέτοια ώστε $n>n_1\Rightarrow|\alpha_n-\alpha|<\dfrac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)}$, $n>n_2\Rightarrow|\beta_n-\beta|<\frac{\varepsilon}{2M_1}$, οπότε

$$n>n_\circ=\max\{n_1,n_2\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_1|\beta_n-\beta|+|\beta|\,|\alpha_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{|\beta|}{|\beta|+1}\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \blacksquare$$

Ερώτηση : γιατί πήραμε $\dfrac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)}$ και όχι $\dfrac{\varepsilon}{2|\beta|}$;

Η ειδική περίπτωση μιας **σταθεράς** ακολουθίας α_n, δηλ. $\alpha_n=\alpha$ για όλα τα n, οπότε τετριμμένα $\alpha_n\to\alpha$, μας δίνει τη χρήσιμη ιδιότητα : $\boldsymbol{\beta_n\to\beta\Rightarrow\gamma_n=\alpha\beta_n\to\alpha\beta}$. (δείξτε τη σχέση αυτή και απ' ευθείας από τον ορισμό).

Αν ζητήσουμε ανάλογο θεώρημα για το πηλίκο πρέπει να είμαστε λίγο προσεκτικοί στους παρονομαστές. Πιο συγκεκριμένα :

"Αν $\alpha_n\to\alpha$, $\beta_n\to\beta$ και $\beta\neq0$ τότε

α) Υπάρχει $n_\circ\in N$ τέτοιο ώστε $n>n_\circ\Rightarrow|\beta_n|>\dfrac{|\beta|}{2}>0$

β) Αν $\gamma_n=\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}$ για $n>n_\circ$ και $\gamma_n=$ οτιδήποτε για $n<n_\circ$, τότε $\gamma_n\to\dfrac{\alpha}{\beta}$ ".

Η υπόθεση $\beta\neq0$ είναι ουσιαστική (αλλιώς δεν έχει νόημα το $\frac{\alpha}{\beta}$). Ο κάπως παράξενος ορισμός της γ_n γίνεται για τεχνικούς λόγους μόνο (θέλουμε να αποφύγουμε την περίπτωση $\beta_n=0$ για κάποια n).

Απόδειξη : Το α) προκύπτει άμεσα από τον ορισμό με $\varepsilon=|\beta|/2>0$. Για το β) αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία $\delta_n=\dfrac{1}{\beta_n}$ για $n>n_\circ$ και οτιδήποτε γιά $n\le n_\circ$, συγκλίνει στο $\frac{1}{\beta}$ και μετά να εφαρμόσουμε την ιδιότητα για το γινόμενο συγκλινουσών ακολουθιών. Έστω $\varepsilon>0$. Λόγω του α) μπορούμε να υποθέσουμε $|\beta_n|>\frac{|\beta|}{2}$ για $n>n_0$, οπότε θα έχουμε

$$\left|\frac{1}{\beta_n}-\frac{1}{\beta}\right|=\frac{|\beta_n-\beta|}{|\beta||\beta_n|}\leq|\beta_n-\beta|\,\frac{2}{|\beta|^2},\ \text{διότι}\ |\beta_n|>\frac{|\beta|}{2}.$$

Επειδή $\beta_n\to\beta$ υπάρχει n, τέτοιο ώστε $n>n_1\Rightarrow|\beta_n-\beta|<\frac{|\beta|^2}{2}\varepsilon$. Αν λοιπόν $n>\max(n_0,n_1)$ τότε $|\delta_n-\frac{1}{\beta}|<\varepsilon$. ▌

Ανάλογες ιδιότητες ισχύουν, σε ορισμένες περιπτώσεις, ακόμη και όταν η μία ή και οι δύο ακολουθίες $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$ συγκλίνουν στο $+\infty$ ή στο $-\infty$. Πιο συγκεκριμένα :

$$\alpha_n\to+\infty \quad \& \quad \beta_n\to\beta \quad \Rightarrow \alpha_n+\beta_n\to+\infty$$

$$\alpha_n\to+\infty \quad \& \quad \beta_n\to+\infty \quad \Rightarrow \alpha_n+\beta_n\to+\infty$$

$$\alpha_n\to+\infty \quad \& \quad \beta_n\to\beta(\neq0)\Rightarrow \alpha_n\beta_n\to(\mathrm{sgn}\beta)\infty$$

$$\left(\text{φυσικά :}\ (\mathrm{sgn}\beta)\infty=\begin{cases}+\infty & \text{αν } \beta>0\\ -\infty & \text{αν } \beta<0\end{cases}\right)$$

$$\alpha_n\to+\infty \quad \& \quad \beta_n\to+\infty \quad \Rightarrow \alpha_n\beta_n\to+\infty$$

$$\alpha_n\to-\infty \quad \& \quad \beta_n\to\beta(\neq0) \Rightarrow \alpha_n\beta_n\to-(\mathrm{sgn}\beta)\infty$$

$$\alpha_n\to-\infty \quad \& \quad \beta_n\to+\infty \quad \Rightarrow \alpha_n\beta_n\to-\infty$$

$$\alpha_n\to-\infty \quad \& \quad \beta_n\to-\infty \quad \Rightarrow \alpha_n\beta_n\to+\infty$$

$$\alpha_n\to\pm\infty \quad \Rightarrow \frac{1}{\alpha_n}\to0$$

Οι αποδείξεις είναι ανάλογες (λίγο πιο εύκολες) με αυτές που ήδη δώσαμε. Εδώ πρέπει να κάνουμε μια σημαντική παρατήρηση : **"Δεν αναφέραμε κανένα αποτέλεσμα που να αντιστοιχεί σε πράξεις της μορφής $\infty-\infty$, $0.\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ "**. Αυτό δεν είναι τυχαίο· δεν υπάρχουν αντίστοιχα αποτελέσματα. Ας εξετάσουμε π.χ. την περίπτωση $\infty-\infty$. Ισχυρίζομαι ότι υπάρχουν ακολουθίες α_n,β_n τέτοιες ώστε $\alpha_n\to+\infty$, $\beta_n\to+\infty$ ενώ η $\beta_n-\alpha_n$ μπορεί να συγκλίνει σε οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό, ή να συγκλίνει στο $+\infty$, ή να συγκλίνει στο $-\infty$ ή και να αποκλίνει. Πραγματικά α) $\alpha_n=n$, $\beta_n=n+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Εδώ $\alpha_n\to+\infty$, $\beta_n\to+\infty$, ενώ $\beta_n-\alpha_n\to\lambda$, β) $\alpha_n=n$,

$\beta_n = n+(-1)^n$. Εδώ $\beta_n \geq n-1 \to +\infty$, άρα $\beta_n \to +\infty$, και επίσης $\alpha_n \to \infty$, ενώ $\beta_n - \alpha_n = (-1)^n$ δε συγκλίνει.

γ) $\alpha_n = n$, $\beta_n = 2n$. Έχουμε $\alpha_n \to +\infty$, $\beta_n \to +\infty$, ενώ $\beta_n - \alpha_n = n \to +\infty$.

δ) $\alpha_n = 2n$, $\beta_n = n$. Έχουμε $\alpha_n \to +\infty$, $\beta_n \to +\infty$ ενώ $\beta_n - \alpha_n \to -\infty$.

Ανάλογα παραδείγματα μπορούμε να δώσουμε και για τις περιπτώσεις $0.\infty$ ($\frac{1}{n}.n \to 1$, $\frac{1}{n}.n^2 \to +\infty$, $\frac{1}{n}(-n^2) \to -\infty$, $\frac{(-1)^n}{n}.(2)^n$ δε συγκλίνει), $\frac{0}{0}$ και $\frac{\infty}{\infty}$.

Οι απλές ιδιότητες που αναφέραμε σ' αυτή την παράγραφο έχουν μεγάλη πρακτική σημασία, γιατί σε πολλές περιπτώσεις μας απαλλάσσουν από τη συχνά επίπονη "εψιλοντική". π.χ.

$$\frac{2n-n^2+1}{n^3} \to 0, \text{ διότι } \frac{2n-n^2+1}{n^3} = \frac{2}{n^2} + \left(-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^3}$$

$$= \left(2.\frac{1}{n}\right).\frac{1}{n} + (-1).\frac{1}{n} + \frac{1}{n}.\left(\frac{1}{n}.\frac{1}{n}\right) \to$$

$$\to (2.0).0 + (-1).0 + 0.(0.0) = 0.$$

3.2. <u>Σύγκλιση και συνέχεια συναρτήσεων</u>.

Για να αποφύγουμε επαναλήψεις θα χρησιμοποιούμε τον όρο συνάρτηση αντί του όρου πραγματική συνάρτηση.

3.2.1. <u>Όρια συναρτήσεων</u>.

Στις ακολουθίες εξετάζαμε που "τείνουν" οι τιμές α_n, όταν $n \to +\infty$. Για το λόγο αυτό μάλιστα γράφουμε καμμια φορά $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ αντί $\lim \alpha_n$. Στην περίπτωση των συναρτήσεων έχουμε περισσότερες περιπτώσεις. Πιο συγκεκριμένα θα μελετήσουμε "όρια" συναρτήσεων $f(x)$ όταν το x τείνει σε ένα πραγματικό αριθμό ή στο $\pm\infty$. Η διαισθητική εικόνα που έχουμε στο μυαλό μας είναι φυσικά η εξής : "Η $f(x)$ συγκλίνει στον αριθμό α, όταν το x τείνει στο x_0, αν η παράσταση $|f(x)-\alpha|$ μπορεί να γίνει **όσο θέλουμε μικρή**, αρκεί **το x να είναι αρκετά κοντά στο x_0**. Είναι πολύ εύκολο, κατ' αναλογία με ότι κάναμε για ακολουθίες, να δώσουμε ένα ακριβή ορισμό, εφ' όσον όμως προηγουμένως ξεκαθαρίσουμε για ποια x_0 θα μιλάμε.

Για να αποκτήσει ουσιαστικό νόημα η έκφραση "αρκεί το x να είναι αρκετά κοντά στο x_0", είναι φυσιολογικό να απαιτήσουμε το εξής :

"Σε κάθε δ-περιοχή, δ>0, του x_o, δηλ. σε κάθε ανοιχτό διάστημα $(x_o-\delta,\ x_o+\delta)$ του x_o, υπάρχουν σημεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης που εξετάζουμε διαφορετικά από το x_o".
Τέτοια σημεία x_o λέγονται **σημεία συσσώρευσης** του πεδίου ορισμού. Έτσι π.χ. όλα τα σημεία των διαστημάτων που θεωρήσαμε στην § 2.1.1., καθώς και τα άκρα τους, είναι σημεία συσσώρευσης αυτών των διαστημάτων. Τέτοια διαστήματα, ή πεπερασμένες ενώσεις τέτοιων διαστημάτων, θα είναι, σχεδόν αποκλειστικά, τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων που θα μας απασχολήσουν σ' αυτό το μάθημα. Δίνουμε τώρα τον αναμενόμενο ορισμό.

<u>Ορισμός</u> **: Αν το x_o είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f, τότε το όριο της f(x) όταν το x τείνει στο x_o υπάρχει και ισούται με α, αν ισχύει το εξής : Για κάθε ε>0 υπάρχει δ>0 τέτοιο ώστε για κάθε x του πεδίου ορισμού της f, $0<|x-x_o|<\delta \Rightarrow |f(x)-\alpha|<\varepsilon$".**

Στην περίπτωση που το όριο υπάρχει και ισούται με α θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό : $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=\alpha$ ή $f(x)\to\alpha,\ x\to x_o$.

Τελείως ανάλογα με ότι είπαμε για ακολουθίες ορίζουμε πότε το όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

Πιο συγκεκριμένα : **"Αν το x_o είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f, τότε λέμε ότι $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty\ (-\infty)$ αν ισχύει το εξής : "Για κάθε $M\in\mathbb{R}$ υπάρχει δ>0, τέτοιο ώστε για κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της f, $0<|x-x_o|<\delta \Rightarrow f(x)>M\ (f(x)<M)$.**

Μπορούμε ακόμη να ορίσουμε και όρια της μορφής $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Φυσικά εδώ θα έπρεπε με κάποια έννοια το $+\infty$ ή το $-\infty$ να είναι "σημείο συσσώρευσης" του πεδίου ορισμού. Όπως πρέπει να αναμένει ο αναγνώστης **"το $+\infty(-\infty)$ λέγεται σημείο συσσώρευσης ενός συνόλου $A\subset\mathbb{R}$, αν κάθε διάστημα της μορφής (α,∞) $((-\infty,\alpha))$ περιέχει σημεία του Α".** Στις συνηθισμένες περιπτώσεις που θα παρουσιαστούν σ' αυτό το μάθημα, τα πεδία ορισμού θα περιέχουν ένα ολόκληρο διάστημα της μορφής (α,∞) $((-\infty,\alpha))$, οπότε το $+\infty(-\infty)$ θα είναι αυτόματα σημείο συσσώρευσης. Δίνουμε τώρα τον αντίστοιχο ορισμό :

**"Αν το $+\infty(-\infty)$ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f, τότε, λέμε ότι το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x))$ υπάρχει και ισούται με α, αν για κάθε ε>0 υπάρχει Μ, τέτοιο ώστε για όλα τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f, $x>M\ (x<M) \Rightarrow |f(x)-\alpha|<\varepsilon$.
Λέμε επίσης ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$,** αν για κάθε **$M\in\mathbb{R}$** υπάρχει **$M'\in\mathbb{R}$, τέτοιο**

ώστε για κάθε σημείο x του πεδίου ορισμού της f, $x>M' \Rightarrow f(x)>M$.
Ανάλογα ορίζουμε τα $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, και $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Σε ορισμένες περιπτώσεις οι τιμές μιας συνάρτησης $f(x)$ πλησιάζουν έναν αριθμό α (ή το $+\infty$ ή το $-\infty$), όταν το x πλησιάζει το x_0 μένοντας πάντα μεγαλύτερο ή πάντα μικρότερο του x_0. Λέμε τότε ότι υπάρχει το **πλευρικό όριο** της f, όταν το x τείνει στο x_0, **από δεξιά** ή **από αριστερά** αντίστοιχα. Σ' αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ ή $\lim f(x)$, $x\to x_0+$, ή $f(x_0+)$ και $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ ή $\lim f(x)$, $x\to x_0-$, ή $f(x_0-)$. αντίστοιχα

Σημειώστε ότι τέτοια όρια δεν ορίζονται για $x\to+\infty$ ή $x\to-\infty$ (αν θέλετε, από τη φύση τους τέτοια όρια είναι πλευρικά).

Φυσικά για να μιλάμε για πλευρικά όρια, πρέπει να ισχύει κάτι παραπάνω από το να είναι το x_0 σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού. Πιο συγκεκριμένα για να ορίσουμε το $f(x_0+)$, θα πρέπει για κάθε $\delta>0$ να υπάρχουν σημεία του πεδίου ορισμού της f στο διάστημα $(x_0, x_0+\delta)$ και για να ορίσουμε το $f(x_0-)$, θα πρέπει να υπάρχουν σημεία του πεδίου ορισμού στο διάστημα $(x_0-\delta, x_0)$. Έτσι π.χ. δεν έχει νόημα να μιλάμε για το $\lim_{x\to\alpha-} f(x)$ στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα της μορφής (α,β), ενώ κατ' αρχήν μπορεί να υπάρχει το $\lim_{x\to\alpha+} f(x)$. Ιδού τώρα ο ακριβής ορισμός.

"Αν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f έχει σημεία σε κάθε διάστημα της μορφής $(x_0, x_0+\delta)$, $\delta>0$, και αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε x του πεδίου ορισμού της f, $0<x-x_0<\delta \Rightarrow |f(x)-\alpha|<\varepsilon$, τότε λέμε ότι υπάρχει το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από δεξιά και ισούται με α (Συμβολισμός: $f(x_0+)=\alpha$). Ανάλογα ορίζεται το $f(x_0-)=\alpha$ και τα $f(x_0+)=\pm\infty$ $f(x_0-)=\pm\infty$".

Σημειώνουμε ότι τα όρια συναρτήσεων αν υπάρχουν, όπως και στην περίπτωση των ακολουθιών, είναι μοναδικά.

Για να αποφύγουμε επαναλήψεις ρουτίνας θα υποθέτουμε ότι όπου εμφανίζονται όρια για $x\to x_0$, το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης των αντίστοιχων πεδίων ορισμού, έστω και αν δεν το αναφέρουμε ρητά.

3.2.2. Ιδιότητες ορίων

Αν μια συνάρτηση είναι σταθερά, δηλαδή $f(x)=c$ για όλα τα x του πεδίου ορισμού της, τότε $|f(x)-c|=0$ για όλα τα x και επομένως (τετριμμένο) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c$.

Επίσης τετριμμένο είναι να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=x_0$ αν $f(x)=x$.

Λίγο πιο δύσκολο, αλλά πάλι εφαρμογή ρουτίνας του ορισμού, είναι να δείξουμε ότι αν η $f(x)$ είναι πολυωνυμική, $f(x)=a_0+a_1x+\cdots a_nx^n$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Ας το δείξουμε για την $f(x)=x^2-2x+1$. Εστω $\varepsilon>0$. Θέλουμε ένα δ τέτοιο ώστε $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ για όλα τα x με $0<|x-x_0|<\delta$. Έχουμε όμως

$$|f(x)-f(x_0)|=|x^2-2x-x_0^2+2x_0|=$$
$$=|x-x_0|\,|x+x_0-2|\leq|x-x_0|\left(|x|+|x_0|+2\right).$$

Αν $|x-x_0|<1$, τότε $|x|<|x_0|+1$ και επομένως, για $|x-x_0|<1$, έχουμε

$$|f(x)-f(x_0)|<|x-x_0|\,(2|x_0|+3).$$

Αρκεί λοιπόν να βρούμε το δ έτσι ώστε, για $0<|x-x_0|<\delta$, να ισχύει η παραπάνω ανισότητα και συγχρόνως $|x-x_0|\,(2|x_0|+3)<\varepsilon$. Μπορούμε λοιπόν να πάρουμε

$\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{2|x_0|+3}\right\}$ το οποίο προφανώς είναι >0.

Ο συλλογισμός αυτός είναι τυπικός στην εφαρμογή του "εψιλοντικού" ορισμού του ορίου. Μερικά όμως απλά και αναμενόμενα αποτελέσματα για όρια μπορούν συχνά να μας απαλλάξουν από αυτόν. Ιδού μερικά από αυτά:

"Ας είναι f, g δύο συναρτήσεις ορισμένες σ' ένα σύνολο A και x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A. Αν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ υπάρχουν, τότε υπάρχουν και τα όρια:

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$, $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))$

και ισούνται με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ και $(\lim\limits_{x\to x_0} f(x))(\lim\limits_{x\to x_0} g(x))$ αντίστοιχα. Αν επιπλέον $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει και ισούται

με $\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ "

Φυσικά, με μία (τετριμμένη) επαγωγή, το παραπάνω αποτέλεσμα επεκτείνεται σε πεπερασμένα αθροίσματα και γινόμενα συναρτήσεων. Αν πιστέψουμε προς στιγμήν αυτή την πρόταση, είναι πολύ εύκολο να δείξουμε ότι, τόσο για πολυώνυμα όσο και για ρητές συναρτήσεις $f(x)$, ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ για κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους. [Σημειώστε ότι στην περίπτωση των ρητών συναρτήσεων οι ρίζες του παρονομαστού δεν περιλαμβάνονται στο πεδίο ορισμού. Οι ρίζες αυτές είναι όμως σημεία συσσώρευσης του πεδίου ορισμού (γιατί;) και άρα κατ' αρχήν έχει νόημα να εξετάσουμε το $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ακόμη κι αν το x_0 είναι ρίζα του παρονομαστή. Παραπέμπουμε τη μελέτη αυτής της περίπτωσης στις ασκήσεις.]

Πραγματικά, κάθε μονώνυμο $a_k x^k$ είναι γινόμενο της σταθερής συνάρτησης a_k και k συναρτήσεων ίσων με x, άρα $\lim_{x\to x_0} a_k x^k = a_k x_0^k$. Παρατηρώντας ότι κάθε πολυώνυμο είναι άθροισμα μονωνύμων και χρησιμοποιώντας πάλι την προηγούμενη πρόταση, έχουμε άμεσα το ζητούμενο για πολυώνυμα. Φυσικά το αποτέλεσμα για ρητές συναρτήσεις είναι άμεσο πόρισμα του τελευταίου μέρους του θεωρήματος.

Η απόδειξη της πρότασης είναι ανάλογη με την αντίστοιχη για ακολουθίες. Η περίπτωση $f(x)+g(x)$ είναι η πιο εύκολη και την παραλείπουμε.

Ας εξετάσουμε το $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))$. Πρώτα ας δείξουμε το εύκολο και σημαντικό λήμμα:

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, τότε υπάρχουν $\delta>0$ και $M\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $|f(x)|<M$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της f για το οποίο ισχύει $0<|x-x_0|<\delta$.

Έστω $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ και ας πάρουμε $\varepsilon=1$ στον ορισμό του ορίου. Θα υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-a|<1$, για κάθε x του πεδίου ορισμού, επομένως και $|f(x)|<|a|+1$. Αρκεί λοιπόν να πάρουμε $M=|a|+1$.

Τώρα το κλασικό τέχνασμα. Έστω ότι

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\beta$ και $\varepsilon>0$. Θέλουμε ένα $\delta>0$ τέτοιο ώστε $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)g(x)-\alpha\beta|<\varepsilon$

Έχουμε:

$|f(x)g(x)-\alpha\beta| \leqq |f(x)g(x)-\alpha g(x)|+|\alpha g(x)-\alpha\beta| =$
$= |g(x)||f(x)-\alpha| + |\alpha|\,|g(x)-\beta|$

Μόλις δείξαμε ότι υπάρχει $\delta_1>0$ τέτοιο ώστε $0<|x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow |g(x)|<|\beta|+1$.

Υπάρχουν ακόμα $\delta_2,\delta_3>0$ τέτοια ώστε $0<|x-x_0|<\delta_2 \Rightarrow |f(x)-\alpha|<\dfrac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)}$ και $0<|x-x_0|<\delta_3 \Rightarrow$ $\Rightarrow |g(x)-\beta| < \dfrac{\varepsilon}{2(|\alpha|+1)}$.

Αν λοιπόν πάρουμε $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$, το οποίο προφανώς είναι >0, θα έχουμε:

$$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)g(x)-\alpha\beta|<(|\beta|+1)\frac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)}+|\alpha|\frac{\varepsilon}{2(|\alpha|+1)}<\varepsilon,$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.

Για την περίπτωση του πηλίκου δείχνουμε ένα άλλο απλό, αλλά επίσης σημαντικό, λήμμα:

"Αν $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\beta\neq 0$, τότε υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε x του πεδίου ορισμού της g, $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow$ $\Rightarrow |g(x)|>\dfrac{|\beta|}{2}>0$".

Η ιδιότητα αυτή είναι άμεση συνέπεια του ορισμού (πάρτε $\varepsilon = \frac{|\beta|}{2}$, που είναι θετικό από υπόθεση.).

Για να αποφύγουμε περιπλοκές ρουτίνας, ας υποθέσουμε ότι οι f και g έχουν πεδία ορισμού που περιέχουν μία περιοχή του x_0. Μικραίνοντας αν χρειαστεί το δ του τελευταίου αποτελέσματος, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι f και g ορίζονται στο διάστημα $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ και
$|g(x)| > \frac{|\beta|}{2}$ για $x_0-\delta < x < x_0+\delta$.

Έστω $\varepsilon>0$. Έχουμε

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{|\beta - g(x)|}{|\beta|\,|g(x)|} \leqq \frac{2}{|\beta|^2}\,|g(x)-\beta| \quad , \quad |x-x_0|<\delta$$

Υπάρχει τώρα $\delta_1>0$ τέτοιο ώστε

$$0<|x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow |g(x)-\beta| < \frac{\varepsilon|\beta|^2}{2}$$

και επομένως

$$0<|x-x_0| < \min\{\delta, \delta_1\} \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\beta}\right| < \varepsilon ,$$

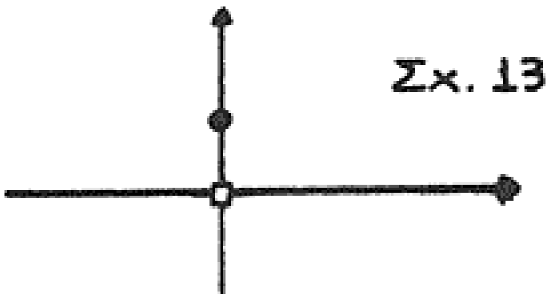
Συνάγουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\beta}$ και το ζητούμενο αποτέλεσμα προκύπτει αθό την αντίστοιχη ιδιότητα για γινόμενο δύο συναρτήσεων (εφαρμόστε την στις συναρτήσεις f και $\frac{1}{g}$).

Ας εξετάσουμε τώρα για λίγο τη σχέση μεταξύ υπάρξεως ορίου και υπάρξεως πλευρικών ορίων.

Είναι κατ' αρχήν τετριμμένο ότι "η ύπαρξη του $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (πεπερασμένου ή απείρου) συνεπάγεται και την ύπαρξη των $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$.

Το αντίστροφο δεν αληθεύει, όπως μπορεί να δει κανείς εξετάζοντας τα παρακάτω παραδείγματα.

α) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

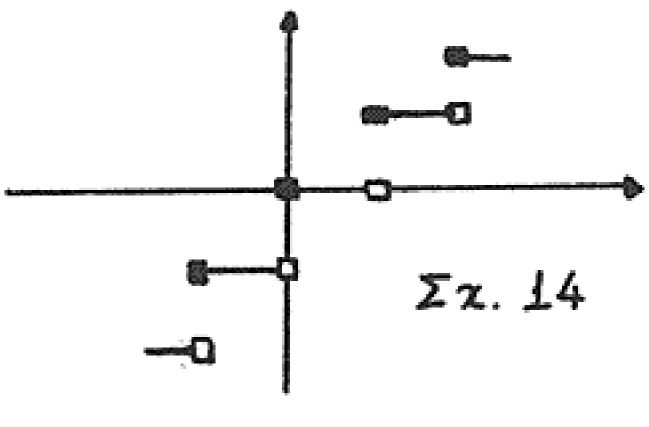


Σχ. 13

Είναι τετριμμένο να δούμε ότι

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} f(x) \quad (=0)$

β) $f(x) = [x]$, $x_0 \in \mathbb{N}$



Σχ. 14

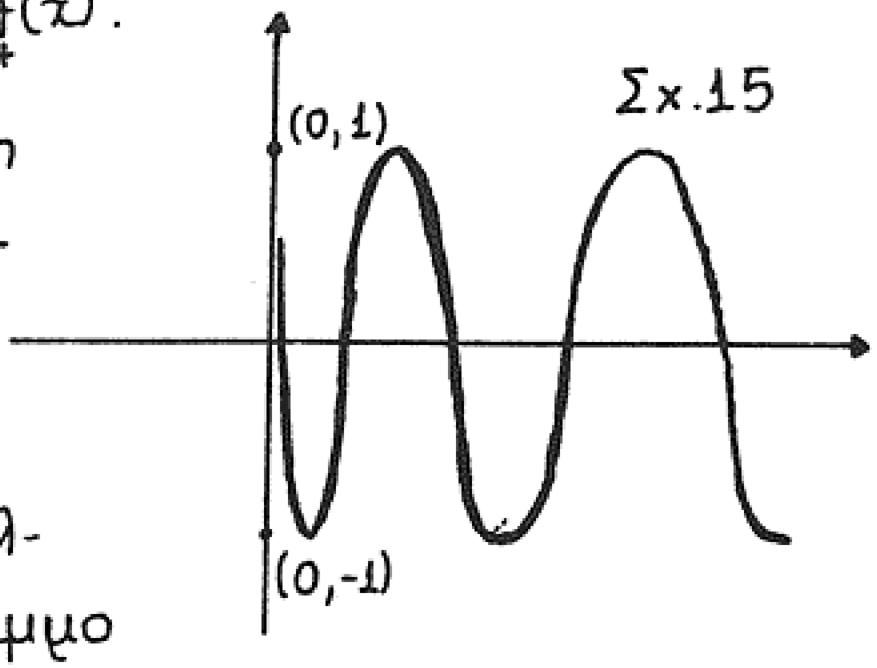
Είναι επίσης τετριμμένο να δούμε, ότι αν $x_0 \in \mathbb{Z}$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = x_0 - 1$,

ενώ το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει. (γιατί;).

γ) $f(x)=\begin{cases} 0 & x\leq 0 \\ \sin\frac{1}{x} & x>0 \end{cases}$

Είναι τετριμμένο να δούμε ότι $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=0$

Η κατάσταση από δεξιά όμως είναι πολύ χειρότερη. Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$.



Διαισθητικά, κοιτώντας τη γραφική παράσταση, βλέπουμε ότι η $f(x)$ αντί να πλησιάζει ένα αριθμό, όταν $x\to 0+$, πλησιάζει μάλλον ολόκληρο το ευθύγραμμο τμήμα: $x=0$, $-1\leq y\leq 1$.

Ας υποθέσουμε λοιπόν, για να φτάσουμε σε άτοπο, ότι $f(0+)$ υπάρχει και ισούται με α. Θα υπάρχει τότε $\delta>0$ τέτοιο ώστε $0<x<\delta \Rightarrow |f(x)-a|<\frac{1}{2}$. Ισχυρίζομαι ότι στο διάστημα $(0,\delta)$ υπάρχουν x_1, x_2 τέτοια ώστε $\frac{1}{x_1}=\kappa\pi$ και $\frac{1}{x_2}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$.

Τότε $f(x_1)=0$, $f(x_2)=1$ και επομένως $|0-a|<\frac{1}{2}$, $|1-a|<\frac{1}{2}$ οπότε και

$1=|(0-a)-(1-a)|\leq|0-a|+|1-a|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

που είναι φυσικά άτοπο. Για να δείξουμε τώρα την ύπαρξη των x_1, x_2, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{\kappa\pi} < \delta$ και

$\frac{1}{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}} < \delta$.

Ο τελευταίος ισχυρισμός είναι σχεδόν τετριμμένος. Αρκεί π.χ. να πάρουμε $\kappa = \left[\frac{1}{\delta}\right] + 1$

3.2.3. <u>Σ υ ν έ χ ε ι α σ υ ν α ρ τ ή σ ε ω ν</u>

Η διαισθητική εικόνα της σημαντικής αυτής έννοιας αποδίδεται συχνά με την έκφραση: η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν έχει "κογίματα". Αυτό δεν περιγράφει πάντοτε καλά την κατάσταση. Υπάρχουν π.χ. συναρτήσεις καλά ορισμένες, που η γραφική τους παράσταση δεν είναι πολύ διαφωτιστική. Π.χ το τελευταίο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου, ή, ακόμη χειρότερο παράδειγμα, η συνάρτηση του Dirichlet $f(x) = \chi_Q = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$.

Η π λ ή ρ η ς κ α τ α ν ό η σ η τ ο υ α κ ρ ι β ο ύ ς ο ρ ι σ μ ο ύ ε ί ν α ι ε π ο μ έ ν ω ς α π α ρ α ί τ η τ η.

Κατ' αρχήν η συνέχεια ορίζεται "τοπικά", δηλαδή ορίζουμε τι σημαίνει **σ υ ν ά ρ τ η σ η σ υ ν ε χ ή ς σ' έ ν α σ η μ ε ί ο** x_0 **τ ο υ π ε δ ί ο υ ο ρ ι σ μ ο ύ τ η ς.** Προσέξτε ότι κατ' αντίθεση με ότι λέγαμε στα όρια, εδώ απαιτούμε το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού. Ονομάζουμε κατόπιν μια συνάρτηση συνεχή σ' ένα υποσύνολο Α του πεδίου ορισμού της, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του Α. Ιδού ο ακριβής ορισμός.

<u>Ορισμός</u>. "Αν το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f, και για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f, $|x-x_0|<\delta \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, τότε η f λέγεται συνεχής στο x_0"

Στην περίπτωση που το x_0 είναι και σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού, μια απλή ματιά στους δύο ορισμούς ορίου και συνέχειας δείχνει ότι: "Η σ υ ν έ χ ε ι α της f στο x_0 είναι ισοδύναμη με τη σχέση $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, δηλαδή με την ύπαρξη του $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και την ισότητά του με $f(x_0)$".

Όπως αναφέραμε και προηγούμενα, σ'αυτό το μάθημα τα πεδία ορισμού θα είναι διαστήματα ή πεπερασμένες ενώσεις διαστημάτων, οπότε κάθε x_0 στο πεδίο ορισμού θα είναι σημείο συσσώρευσης, και επομένως θα ισχύει η ισοδυναμία των δύο ορισμών. Ειδικότερα τα συμπεράσματα της προηγούμενης παραγράφου μας οδηγούν άμεσα στο συμπέρασμα: "Τα πολυώνυμα και οι ρητές συναρτήσεις είναι συνεχείς σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού τους."

Ανάλογα με τον ορισμό των πλευρικών ορίων ορίζουμε **συνέχεια από δεξιά** και **συνέχεια από αριστερά**.

Αν το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f και για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε σημείο x του πεδίου ορισμού, $0\leq x-x_0<\delta \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ $(0\leq x_0-x<\delta \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$, τότε η f λέγεται **συνεχής από δεξιά (αριστερά) στο x_0.**

Είναι φανερό ότι η ύπαρξη του $f(x_0+)$ και η ισότητα $f(x_0+)=f(x_0)$ συνεπάγονται συνέχεια από δεξιά και η ύπαρξη του $f(x_0-)$ και η ισότητα $f(x_0-)=f(x_0)$ συνέχεια από αριστερά. Επίσης αν κάθε διάστημα $(x_0, x_0+\delta)$, $\delta>0$, τέμνει το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f, τότε η συνέχεια από δεξιά συνεπάγεται την ύπαρξη του $f(x_0+)$ και την ισότητα $f(x_0+)=f(x_0)$. Ανάλογα ισχύουν για συνέχεια από αριστερά.

Είναι επίσης φανερό ότι **μια συνάρτηση συνεχής στο x_0 είναι συνεχής από δεξιά και συνεχής από αριστερά και αντίστροφα.**

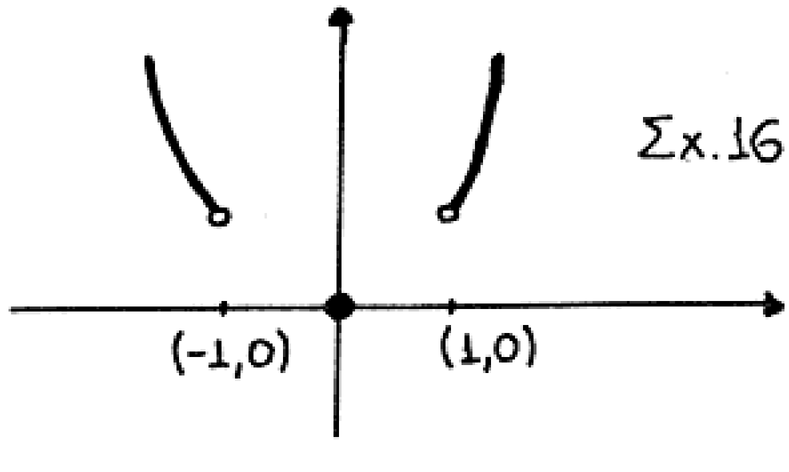
Στο παράδειγμα α της προηγούμενης υποπαραγράφου η f δεν είναι συνεχής ούτε από δεξιά ούτε από αριστερά. Στο παράδειγμα β είναι συνεχής από δεξιά και ασυνεχής από αριστερά. Στο παράδειγμα γ είναι συνεχής αιθό αριστερά και ασυνεχής από δεξιά.

<u>Παρατήρηση</u>: Δεν πρέπει να ξέφυγε

την προσοχή του αγνώστου ότι στον ορισμό της συνέχειας απαιτήσαμε "$|x-x_0|<\delta \Rightarrow \dots$" και όχι "$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow \dots$", που απαιτούμε στον ορισμό του ορίου. Υπενθυμίζουμε επίσης ότι το όριο είχε νόημα μόνο για σημεία συσσωρεύσης του πεδίου ορισμού, ενώ η συνέχεια έχει κατ' αρχήν νόημα για όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού. Η διαφορά είναι πάντως "επιφανειακή". Πραγματικά, ας δούμε τι συμβαίνει στα σημεία του πεδίου ορισμού που δεν είναι σημεία συσσώρευσης. Αν x_0 ένα τέτοιο σημείο, τότε θα υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\cap\{\text{πεδίο ορισμού}\}=\{x_0\}$ (γιατί;). Επομένως για οποιοδήποτε $\varepsilon>0$ η συνεπαγωγή $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ θα ισχύει για όλα τα x του πεδίου ορισμού με $|x-x_0|<\delta$ (δηλ. το x_0 μόνο). Με άλλα λόγια στα σημεία του πεδίου ορισμού που δεν είναι σημεία συσσώρευσης, τα οποία για προφανείς λόγους λέγονται **μ ε μ ο ν ω μ έ ν α**, κάθε συνάρτηση είναι αυτόματα συνεχής.

Π.χ. η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & |x|>1 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$



Σχ.16

με πεδίο ορισμού $(-\infty,-1)\cup\{0\}\cup(1,\infty)$ είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Θα κλείσουμε την παράγραφο αυτή δείχνοντας ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι συνεχείς. Οι αποδείξεις θα στηριχθούν στις ανισότητες που δείξαμε στην § 2.2.4 με γεωμετρικά επιχειρήματα μόνο.

Πριν προχωρήσουμε είναι σκόπιμο να παρεμβάλλουμε εδώ μια απλή αλλά πολύ χρήσιμη πρόταση:

<u>Θεώρημα</u>. Αν η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται σε ένα διάστημα (α,β) και είναι συνεχής στο $x_0\in(\alpha,\beta)$, αν η συνάρτηση g ορίζεται σ' ένα διάστημα (γ,δ) που περιέχει την εικόνα του (α,β) μέσω της f (δηλ. το σύνολο $\{f(x): \alpha<x<\beta\}$) και αν η g είναι συνεχής στο σημείο $f(x_0)$, τότε η σύνθετη συνάρτηση $h=g\circ f$ (ορισμός: $(g\circ f)(x)=g[f(x)]$, $\alpha<x<\beta$) είναι συνεχής στο x_0".

Η απόδειξη είναι σχεδόν τετριμμένη.

Έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει $\delta_1>0$ τέτοιο ώστε $|y-f(x_0)|<\delta_1 \Rightarrow |g(y)-g(f(x_0))|<\varepsilon$ λόγω της συνέχειας της g στο $f(x_0)$. Λόγω τώρα της συνέχειας της f στο x_0 υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\delta_1$ και επομένως $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |g(f(x))-g(f(x_0))| = |h(x)-h(x_0)|<\varepsilon$, που αποδεικνύει την συνέχεια της h στο x_0.

Σαν εφαρμογή του θεωρήματος παρατηρούμε ότι $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, δηλαδή η συνάρτηση cos είναι σύνθεση των συναρτήσεων sin και της πολυωνυμικής $\frac{\pi}{2}-x$. Επομένως αν δείξουμε τη συνέχεια της συνάρτησης sin, θα έχουμε και τη συνέχεια της cos.

Συνέχεια της συνάρτησης sin

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leq$$

$$\leq 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|$$

Δείξαμε στην § 2.2.4 ότι $|\sin\theta|\leq|\theta|$ για $|\theta|\leq\frac{\pi}{2}$

Επειδή $|\sin\theta|\leq 1$ πάντοτε, "**η ανισότητα $|\sin\theta|\leq|\theta|$ ισχύει για όλα**

τα πραγματικά θ".
Έχουμε λοιπόν πάντοτε

$$|\sin x - \sin x_0| \leq 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x-x_0|$$

κι επομένως ($\delta = \varepsilon$)

$$|x-x_0| < \varepsilon \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$$

Σαν μια εφαρμογή θα δείξουμε τη σημαντική σχέση

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Οι ανισότητες $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x| = \left|\frac{\sin x}{\cos x}\right|$, $|x| < \frac{\pi}{2}$, για $x \neq 0$ γράφονται και ως εξής:

$$|\cos x| \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \qquad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$, άρα αν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $0 < |x| < \delta$ (και $|x| < \frac{\pi}{2}$) $\Rightarrow 1 - \varepsilon < \frac{\sin x}{x} < 1 + \varepsilon$ ή $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$ που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.

<u>Παρατήρηση</u> Η παραπάνω απόδειξη περιέχει ουσιαστικά και την απόδειξη της ιδιότητας "σάντουιτς" για συναρτήσεις:
"Αν $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $0 < |x-x_0| < \delta$ και

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x)$ τότε το $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ υπάρχει και είναι το ίδιο με το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$".

3.2.4 Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων. Είδη ασυνεχειών.

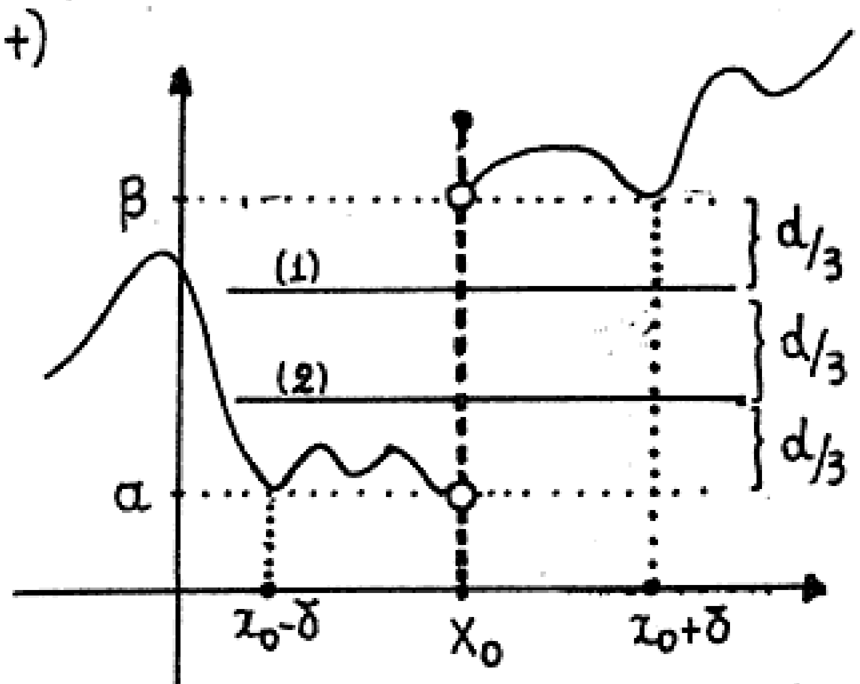
Για να αποφύγουμε περιπλοκές ρουτίνας θα υποθέτουμε ~~αε~~ αφ' εξής, εκτός αν ρητά αναφέρεται το αντίθετο, ότι τα πεδία ορισμού είναι διαστήματα. Μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ αν είναι συνεχής στο (α, β), συνεχής αιθό δεξιά στο α και από αριστερά στο β. Ανάλογα θα ισχύουν για διαστήματα της μορφής $(\alpha, \beta]$ ή $[\alpha, \beta)$.

Οι ιδιότητες για άρθροισμα, γινόμενο και πηλίκο ορίων συνεπάγονται άμεσα ότι "το άρθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο δύο συναρτήσεων f και g που είναι συνεχείς στο x_0, είναι συνεχείς στο x_0. Στην περίπτωση του πηλίκου πρέπει να υποτεθεί επί πλέον ότι $g(x_0) \neq 0$"

Ας υποθέσουμε ότι το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε το διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να περιέχεται στο πεδίο ορισμού. (Θα κάνουμε συχνά αυτή την υπόθεση όταν μελετάμε "τοπικά" μια συνάρτηση. Στα συνηθισμένα πεδία ορισμού η υπόθεση σημαίνει ότι εξαιρούμε άκρα στην περίπτωση κλειστών ή ημίκλειστων διαστημάτων. Η μελέτη στα άκρα, όταν δεν είναι επανάληψη ρουτίνας, θα γίνεται χωριστά). Η συνέχεια της f στο x_0 σημαίνει την ύπαρξη του ορίου $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ και την ισότητα $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή $f(x_0+) = f(x_0-) = f(x_0)$. Τι σημαίνει ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0; Σημαίνει ή ότι $f(x_0+) = f(x_0-) \neq f(x_0)$ ή ότι $f(x_0+) \neq f(x_0-)$ ή ότι τουλάχιστον ένα από τα πλευρικά όρια δεν υπάρχει. Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι στο x_0 παρουσιάζεται άρσιμη ασυνέχεια της f στη δεύτερη περίπτωση **α σ υ ν έ χ ε ι α α' ε ί δ ο υ ς** (ή **π ή δ η μ α**) και στην τρίτη **α σ υ ν έ χ ε ι α β' ε ί δ ο υ ς** (ή **ο υ σ ι ώ δ η ς**)

Στην περίπτωση ασυνεχείας α' είδους λέμε ευθίσης **π ή δ η μ α** τη διαφορά $f(x_0+)-f(x_0-)$ Τα "κοψίματα" στη γραφική παράσταση που αναφέραμε στην αρχή της παραγράφου παρουσιάζονται στις ασυνέχειες α' είδους.

Αν $a=f(x_0-)$, $\beta=f(x_0+)$ τότε $\beta-a=d\neq 0$, οπότε, διαλέγοντας π.χ $\varepsilon=\frac{|d|}{3}$, θα έχουμε ότι θα υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε το γράφημα της f να βρίσκεται πάνω από τη γραμμή (1) στο διάστημα $(x_0,x_0+\delta)$ και κάτω από τη γραμμή (2) στο διάστημα $(x_0-\delta,x_0)$.



Σχ. 17

Πρέπει πάντως να τονιστεί ότι τα πιο δύσκολα (και συχνά πιο ενδιαφέροντα) προβλήματα εμφανίζονται στην περίπτωση των ουσιωδών ασυνεχειών.

Από τα παραδείγματα της υποπαραγράφου 3.2.2 στο α έχουμε άρσιμη ασυνέχεια, στο β ασυνέχεια α' είδους και στο γ ουσιώδη ασυνέχεια.

Θα δώσουμε τώρα ένα άλλο χαρακτηρισμό της συνέχειας που αποδίδεται στο Γερμανό μαθηματικό Heine (τέλος 19ου αιώνα). Υποθέτουμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Έστω $\{x_\eta\}$ μία ακολουθία σημείων του πεδίου ορισμού με την ιδιότητα $x_\eta \to x_0$ και $\varepsilon > 0$. Από τη συνέχεια της f έχουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Από τη σχέση $x_\eta \to x_0$ έχουμε ότι υπάρχει $\eta_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\eta > \eta_0 \Rightarrow |x_\eta - x_0| < \delta$. Συνάγουμε λοιπόν ότι $\eta > \eta_0 \Rightarrow |f(x_\eta) - f(x_0)| < \varepsilon$, με άλλα λόγια $f(x_\eta) \to f(x_0)$. Έχουμε έτσι δείξει το μισό του ακόλουθου Θεωρήματος:

<u>Θεώρημα</u> "Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{x_\eta\}$ σημείων του πεδίου ορισμού της f με $x_\eta \to x_0$, η ακολουθία $\{f(x_\eta)\}$ συγκλίνει στο $f(x_0)$".

Για το υπόλοιπο της απόδειξης πρέπει να δείξουμε ότι αν ή f δεν είναι συνεχής στό x_0 τότε υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}$ μέ $x_n \to x_0$ ώστε ή $\{f(x_n)\}$ δέν συγκλίν στό $f(x_0)$.
Υποθέτουμε λοιπόν ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0, δηλαδή είναι λάθος η πρόταση: "Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$" Αυτό σημαίνει ότι: **Υπάρχει $\varepsilon>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta>0$ υπάρχει x με $|x-x_0|<\delta$ και $|f(x)-f(x_0)| \geq \varepsilon$**

(<u>Παρατήρηση</u>: Ένα πραγματικά καλό κριτήριο ότι έχετε καταλάβει τι γίνεται μέχρις εδώ, είναι να βεβαιωθείτε ότι καταλαβαίνετε (και δεν αποδέχεστε απλά) την παραπάνω υπογραμμισμένη πρόταση. Αν δε συμβαίνει αυτό, γυρίστε πάλι στις ακολουθίες). Παίρνω τώρα για δ διαδοχικά τα $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε n βρίσκω ένα x_n τέτοιο ώστε $x_n \in \left(x_0-\frac{1}{n}, x_0+\frac{1}{n}\right)$ και $|f(x_n)-f(x_0)| \geq \varepsilon$. Η σχέση όμως

$$x_0-\frac{1}{n} < x_n < x_0+\frac{1}{n}$$

συνεπάγεται ότι $x_n \to x_0$ (ιδιότητα σάντουιτς) και η ανισότητα $|f(x_n)-f(x_0)| \geq \varepsilon$ για όλα τα

$n\in\mathbb{N}$, κάνει αδύνατη την $f(x_n)\to f(x_0)$. Φτάσαμε λοιπόν στο ζητούμενο άτοπο.

<u>Παρατήρηση</u> Η δυνατότητα επιλογής ενός x_n από κάθε διάστημα $(x_0-\frac{1}{n}, x_0+\frac{1}{n})$ με την ιδιότητα $|f(x_n)-f(x_0)|\geq\varepsilon$, έτσι ώστε να σχηματιστεί μια ακολουθία $\{x_n\}$, στηρίζεται σ' ένα αξίωμα της θεωρίας συνόλων που ονομάζεται **αξίωμα επιλογής**. Οι μαθηματικοί αποδέχονται γενικά τη χρήση αυτού του αξιώματος, το οποίο όμως πρέπει να τονιστεί έχει προκαλέσει πολλές και έντονες συζητήσεις στην μαθηματική κοινότητα.

Συνδυάζοντας τις ιδιότητες που έχουμε δείξει μέχρι τώρα βλέπουμε ότι **οι ρητές συναρτήσεις, οι τριγωνομετρικές και οι "σύνθετες" συναρτήσεις που μπορούμε να σχηματίσουμε με αυτές είναι συνεχείς.** Έτσι π.χ. οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στα πεδία ορισμού τους:

$$\tan x,\ x\in\mathbb{R}-\{(k+\tfrac{1}{2})\pi : k\in\mathbb{Z}\}$$

$$\sin\frac{2x+5}{x^2-1}\ ,\quad x \neq \pm 1$$

$$\frac{\sin 2x - \cos x}{2\sin x - 1}\quad x \neq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$x \neq (2\kappa+1)\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

3.2.5 Ορισμένα βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις.

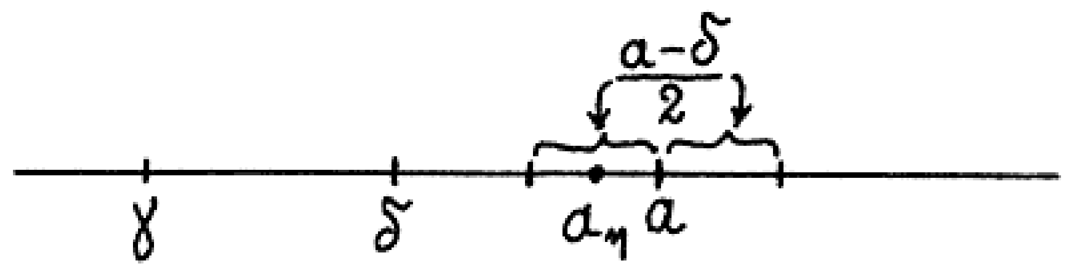
Σ' αυτήν την υποπαράγραφο θα δούμε δύο χρήσιμα, και διαισθητικά φανερά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις. 'Οπως θα γίνει φανερό από τις αποδείξεις, το κλειδί άμεσα ή έμμεσα θα είναι το αξίωμα της συνέχειας.

Αρχίζουμε με μερικές απλές ιδιότητες ακολουθιών, που θα μας χρειαστούν στην απόδειξη.

"Αν $a_\eta \to a$ και $\gamma \leqq a_\eta \leqq \delta$ τότε $\gamma \leqq a \leqq \delta$".

Πραγματικά αν $a>\delta$ (και παρόμοια αν $a<\gamma$), τότε θα υπήρχε η τέτοιο ώστε $|a_\eta - a| < \frac{a-\delta}{2}$ και επομένως $a - a_\eta < \frac{a-\delta}{2}$, δηλαδή $a_\eta > \frac{a+\delta}{2} > \delta$ που είναι φυσικά άτοπο (βλ σχ 18).

Σχ. 18



"Αν $a_\eta \to a$ τότε $|a_\eta| \to |a|$"

Η ιδιότητα αυτή είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας $\big||a_\eta| - |a|\big| \leq |a_\eta - a|$.

Ιδού τώρα το πρώτο από τα θεωρήματά μας:

<u>Θεώρημα:</u> "Αν η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, τότε α) είναι φραγμένη στο $[a, \beta]$ και β) υπάρχει $x_0 \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \sup\{f(x) : a \leq x \leq \beta\}$."

<u>Απόδειξη</u> α) Αν η f δεν είναι φραγμένη τότε για κάθε $M \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε $|f(x)| > M$. Παίρνοντας διαδοχικά $M = 1, 2, \ldots$ βρίσκουμε μία ακολουθία x_η, με $a \leq x_\eta \leq \beta$, τέτοια ώστε $|f(x_\eta)| > \eta$, $\eta = 1, 2, \ldots$ Η $\{x_\eta\}$ είναι φραγμένη, άρα θα υπάρχει υπακολουθία της x_{κ_η}, $\kappa_1 < \kappa_2 < \cdots < \kappa_\eta < \cdots$ η οποία συγκλίνει, έστω στο x_0. Θα έχουμε τότε $x_0 \in [a, \beta]$ (γιατί;). Επειδή όμως η f είναι συνεχής στο x_0 και $x_{\kappa_\eta} \to x_0$ θα έχουμε $f(x_{\kappa_\eta}) \to f(x_0)$ και επομένως

$|f(x_{\kappa_\eta})| \to |f(x_0)|$. Από την άλλη μεριά όμως η ανισότητα $|f(x_{\kappa_\eta})| > \kappa_\eta$ συνεπάγεται προφανώς ότι $|f(x_{\kappa_\eta})| \to +\infty$ και φτάσαμε σε άτοπο. (; [illegible])

β) Δείξαμε ότι η f είναι φραγμένη στο $[\alpha,\beta]$, δηλαδή ότι το σύνολο $\{f(x) : \alpha \leq x \leq \beta\}$ είναι φραγμένο (και προς τα πάνω και προς τα κάτω). Το σύνολο αυτό είναι προφανώς $\neq \emptyset$ και επομένως (αξίωμα συνεχείας) το $\sup\{f(x) : \alpha \leqq x \leqq \beta\}$ υπάρχει και είναι ένας πραγματικός αριθμός, έστω A. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = A$.

Από τον ορισμό του sup συνάγουμε ότι για κάθε $\eta \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_\eta \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $A - \frac{1}{\eta} < f(x_\eta) \leq A$. Η ακολουθία x_η έχει υπακολουθία x_{κ_η} η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x_0 \in [\alpha,\beta]$ (γιατί;) και για την οποία θα ισχύει:

$$A - \frac{1}{\kappa_\eta} < f(x_{\kappa_\eta}) \leqq A$$

Η ιδιότητα "σάντουιτς" δείχνει άμεσα ότι $f(x_{\kappa_\eta}) \to A$. Η οριακή αυτή σχέση καθώς και η συνέχεια της f στο $x_0 = \lim x_{\kappa_\eta}$

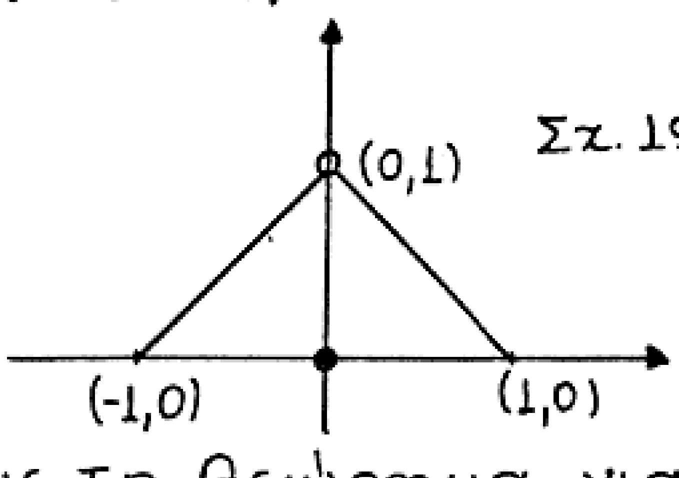
έχουν ως συνέπεια ότι $f(x_{k_\eta}) \to f(x_0), \eta \to \infty$, και επομένως $f(x_0) = A$, που είναι ακριβώς αυτό που έπρεπε να δείξουμε.

<u>Παρατηρήσεις</u> α) Το β δείχνει ότι η "μεγίστη" τιμή της συνάρτησης f "πιάνεται" για κάποιο $x_0 \in [\alpha, \beta]$. Θα επανέλθουμε στο ζήτημα αυτό αργότερα.

β) Ας κάνουμε μια μικρή ανάλυση των υποθέσεων του θεωρήματος για να βεβαιωθούμε ότι δεν μπήκαν απλά και μόνο για να κάνουν δυνατή την απόδειξη, αλλά γιατί πραγματικά χρειάζονταν (**αυτή την ανάλυση να προσπαθείτε να την κάνετε πάντοτε στα θεωρήματα που συναντάτε**).

Η συνέχεια της f είναι απαραίτητη όπως φαίνεται από το παράδειγμα

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ 1-|x| & 0<|x|\leq 1 \end{cases}$$ (σχ. 19).



Σχ. 19.

Εδώ $\sup f(x) = 1$ αλλά δεν υπάρχει $x_0 \in [-1, 1]$ με $f(x_0) = 1$.

Δεν υπάρχει αντίφαση με το θεώρημα γιατί η f δεν είναι συνεχής στο 0.

Το ότι το πεδίο ορισμού είναι "**κλειστό διάστημα**" δεν μπορεί να αντικατασταθεί με οποιουδήποτε είδους διάστημα. Αν π.χ. θεωρήσουμε την $f(x)=x$ με $0<x<1$, τότε $\sup f(x)=1$, ενώ για κανένα $x_0\in(0,1)$ δεν έχουμε $f(x_0)=1$ (μας λείπει το $x_0=1$!).

(<u>Ερώτηση</u>: Σε ποιο σημείο της απόδειξης χρησιμοποιήθηκε ότι το διάστημα είναι κλειστό;)

γ) Η ίδια ακριβώς απόδειξη δείχνει ότι **υπάρχει x_1, $\alpha\leq x_1\leq\beta$, τέτοιο ώστε $f(x_1)=\inf\{f(x):\alpha\leq x\leq\beta\}$.**

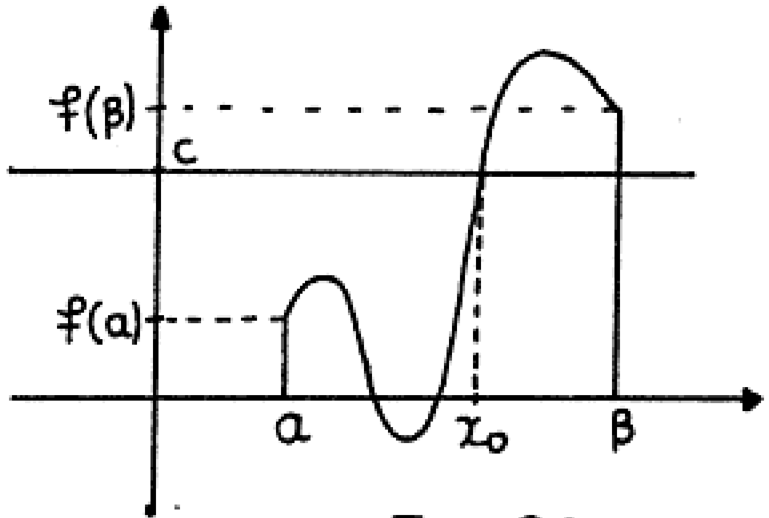
Μπορούμε ακόμη να φτάσουμε στο ίδιο συμπέρασμα εφαρμόζοντας το θεώρημα που μόλις αποδείξαμε στην συνάρτηση $-f(x)$ (γιατί;)

Το δεύτερο θεώρημά μας έχει το όνομα **θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής** και λέγει ότι μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ παίρνει κάθε τιμή μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$. Ακριβέστερα:

<u>Θεώρημα</u>: "**Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και αν $f(\alpha)<f(\beta)$ και $c\in(f(\alpha),f(\beta))$ τότε υπάρχει**

x_0 με $\alpha < x_0 < \beta$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=c$. Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και αν $f(\alpha)>f(\beta)$ και $f(\alpha)>c>f(\beta)$".

Η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος είναι φανερή. Απλά παρατηρούμε ότι η ευθεία $y=c$ τέμνει σε κάποιο σημείο το γράφημα της συνεχούς συνάρτησης f (σχ. 20)



Σχ. 20

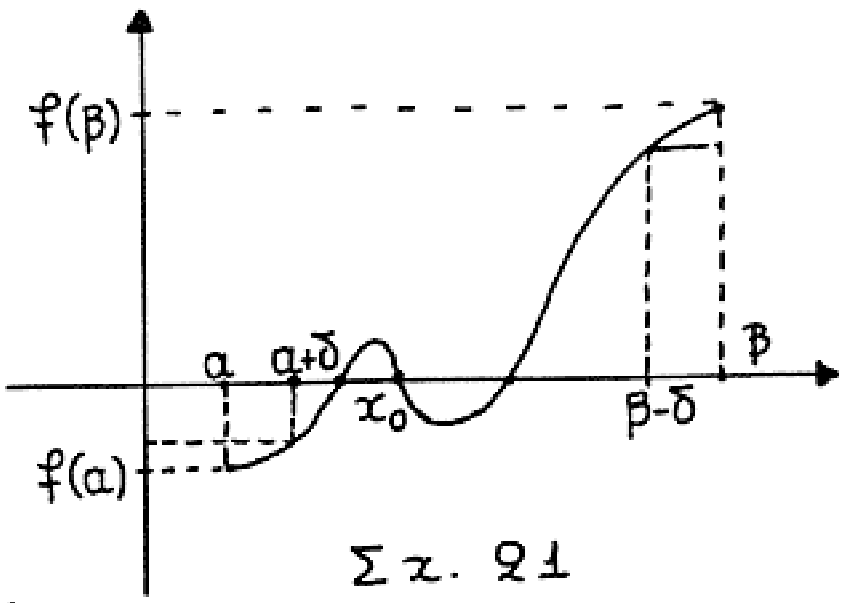
Η ειδική περίπτωση $f(\alpha)<0$, $f(\beta)>0$, $c=0$ είναι γνωστή σαν **Θεώρημα των Bolzano-Weierstrass** (Ο Bolzano ήταν Τσέχος μαθηματικός του 19ου αιώνα. Ο Weierstrass ήταν Γερμανός μαθηματικός του 19ου αιώνα και μάλιστα ένας από τους διασημότερους· Φημιζόταν για την ακρίβεια και αυστηρότητα των μεθόδων που χρησιμοποιούσε)

Μπορούμε να διατυπώσουμε το θεώρημα και ως εξής:

Θεώρημα* (Bolzano - Weierstrass): Αν η f είναι

(*) Σέ ώρισμένα βιβλία τό θεώρημα άναφέρεται σάν θεώρημα τοῦ Bolzano μόνο. Σέ ἄλλα σάν θεώρημα Bolzano-Weierstrass άναφέρεται τό β' μέρος τοῦ θεωρήματος τῆς σελ. 22.

συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και αν $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ τότε η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα x_0 στο (α,β).



Σχ. 21

Τα δύο θεωρήματα είναι στην πραγματικότητα ισοδύναμα. Πραγματικά το θεώρημα Bolzano-Weierstrass είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος της ενδιάμεσης τιμής και το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής προκύπτει άμεσα αν εφαρμόσουμε το θεώρημα των Bolzano-Weierstrass στην συνεχή συνάρτηση $g(x)=f(x)-c$, για την οποία ισχύει $g(\alpha)g(\beta)=(f(\alpha)-c)(f(\beta)-c)<0$

<u>Απόδειξη</u> θεωρήματος B.W.

Αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση $f(\alpha)<0<f(\beta)$ (γιατί;). Η ιδέα της απόδειξης που θα δώσουμε είναι πολύ απλή: "Όπως φαίνεται από το σχήμα 21 μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ένα τέτοια x_0. Ας "κυνηγήσουμε" το "αριστερώτερο" (x_0 στο σχήμα). Πώς μπορούμε να το χαρακτηρίσουμε; απλούστατα είναι το "πιο

μικρό" x με την ιδιότητα: "κάθε x' αριστερά του x ικανοποιεί την ανισότητα $f(x')<0$".
Για να μετατρέψουμε αυτή την ιδέα σε απόδειξη δείχνουμε ότι:

α) "Το σύνολο $A=\{x\in(\alpha,\beta]: \alpha\leq x'<x\Rightarrow f(x')<0\}$ είναι μη κενό και φραγμένο προς τα πάνω."

β) "Αν $x_0=\sup A$ τότε $\alpha<x_0<\beta$ και $f(x_0)=0$"

Το ότι το A είναι φραγμένο προς τα πάνω είναι φανερό (το β π.χ. είναι ένα άνω φράγμα του) Το ότι είναι μη κενό ιθρουύιθεει ως εξής: Η συνέχεια της f στο α συνεπάγεται ότι υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε $\alpha\leq x<\alpha+\delta\Rightarrow$ $\Rightarrow |f(x)-f(\alpha)|<\frac{-f(\alpha)}{2}$ (πάρτε $\varepsilon=\frac{-f(\alpha)}{2}>0$ στον ορισμό της συνέχειας) και επομένως $\alpha\leq x<\alpha+\delta\Rightarrow f(x)<\frac{f(\alpha)}{2}<0$. Όλα λοιπόν τα x του διαστήματος $(\alpha,\alpha+\delta)$ ανήκουν στο A και έτσι το A δεν είναι κενό. Από το αξίωμα της συνέχειας τώρα συμπεραίνουμε ότι υπάρχει το $x_0=\sup A$ και είναι προφανώς $>\alpha$.

Από τη συνέχεια της f στο β συνάγουμε, όπως και προηγουμένως, ότι υ-

πάρχει $\delta'>0$ τέτοιο ώστε $\beta-\delta'<x\leq\beta \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)>0$ και επομένως όλα τα x στο διάστημα $(\beta-\delta', \beta]$ είναι άνω φράγματα του A και άρα ξεπερνούν το x_0. Έχουμε λοιπόν δείξει ότι $\alpha<x_0<\beta$ και δεν μένει παρά να δείξουμε ότι $f(x_0)=0$.

Ας υποθέσουμε $f(x_0)\neq 0$ για να φτάσουμε σε άτοπο. Αν $f(x_0)>0$ τότε θα υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε αν
$x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap(\alpha,\beta)$ ~~άρα~~ τότε $f(x)>\frac{f(x_0)}{2}>0$
(γιατί;). Επομένως το $x_0-\frac{\delta}{2}$ π.χ θα είναι ένα άνω φράγμα του A μικρότερο του x_0, που είναι φυσικά άτοπο. Αν $f(x_0)<0$ τότε θα υπήρχε $\delta>0$ τέτοιο ώστε αν
$x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap(\alpha,\beta)$, ~~άρα~~ τότε $f(x)<\frac{f(x_0)}{2}<0$.
Επομένως το $x_0+\frac{\delta}{2}$ π.χ θα ανήκει στο A που είναι αδύνατο.

Θα χρησιμοποιήσουμε πολλές φορές τα θεωρήματα αυτά στη συνέχεια. Εδώ θα αρκεστούμε σε δύο ενδιαφέρουσες εφαρμογές.

<u>Θεώρημα</u>. "Κάθε πολυώνυμο

περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα"

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_\eta x^\eta$, $a_\eta\neq 0$ και η ένας μονός φυσικός. Γράφουμε το $f(x)$ στη μορφή $f(x)=a_\eta x^\eta\left\{1+\frac{a_{\eta-1}}{a_\eta x}+\cdots+\frac{a_0}{a_\eta x^\eta}\right\}=$

$$=a_\eta x^\eta g(x) \text{ όπου } g(x)=1+\frac{a_{\eta-1}}{a_\eta x}+\cdots+\frac{a_0}{a_\eta x^\eta}$$

Παρατηρούμε ότι η g ορίζεται στα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ και ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=1$ (γιατί;). Υπάρχουν λοιπόν αριθμοί $M>0$ και $N>0$ τέτοιοι ώστε $x>M \Rightarrow g(x)>0$ και $x<-N \Rightarrow g(x)>0$. Έστω $M'>M$ και $N'>N$ θα έχουμε:

$f(M')f(-N')=a_\eta^2(M')^\eta(-N')^\eta g(M')g(-N')<0$ διότι $a_\eta^2>0$, $g(M')>0$, $g(-N')>0$, $(M')^\eta>0$, $(-N')^\eta<0$ αφού το η είναι μονός αριθμός. Το θεώρημα των Bolzano-Weierstrass μας εξασφαλίζει τώρα την ύπαρξη μιας ρίζας της f στο διάστημα $(-N', M')$.

Η δεύτερη εφαρμογή είναι ειδική περίπτωση ενός θεωρήματος που είναι γνωστό σαν Θεώρημα σταθερού σημεί-

2) Αν η συνάρτηση $f(x)$, $a<x<b$, είναι συνεχής και αν $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, τότε υπάρχει x_0, $x_0\in(a,b)$, τέτοιο ώστε η τιμή $f(x_0)$ να είναι το ελάχιστο της f στο (a,b).

3) Αν η $f(x)$ είναι φραγμένη στο διάστημα $(x_0-a,\ x_0+a)$, $a>0$, δηλαδή $|f(x)|\leq M$ για κάθε x με $|x-x_0|<a$, τότε η συνάρτηση $g(x)=(x-x_0)f(x)$ είναι συνεχής στο x_0.

4) Μελετῆστε τά ὅρια $\lim\limits_{x\to x_0} q(x)$ ὅπου $q(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ μία ρητή συνάρτηση καί x_0 ρίζα τοῦ παρονομαστῆ. Ἴδια ἐρώτηση γιά τά ὅρια ὅταν $x\to+\infty$ ἤ $x\to-\infty$.

5) Δεῖξτε ὅτι ἄν $a_n\to+\infty$ τότε ἡ a_n εἶναι φραγμένη πρός τά κάτω, δηλ. τό σύνολο $\{a_n : n\in N\}$ εἶναι φραγμένο πρός τά κάτω. Ἴδια ἐρώτηση γιά τήν περίπτωση $a_n\to-\infty$

6) Δίνεται ἡ ἀκολουθία a_k. Θέτουμε $b_n=\sup\{a_k : k\geq n\}$. Δεῖξτε ὅτι τό $\lim b_n$ ὑπάρχει ἤ $\lim b_n=+\infty$. Τό ὅριο αὐτό συμβολίζεται $\limsup a_n$. Ὅμοια ὁρίζεται τό $\liminf a_n$ καί ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει ἤ εἶναι $-\infty$. Δεῖξτε ὅτι ἡ a_n συγκλίνει ἄν καί μόνο ἄν $\limsup a_n=\liminf a_n$

7) Γιά μιά ἀκολουθία a_n γράφουμε $\sup a_n$, $\inf a_n$ γιά τό sup, inf τοῦ συνόλου $\{a_n : n\in N\}$. Δείξτε ὅτι

$\sup(a_n+\beta_n) \le \sup a_n + \sup \beta_n$, $\inf(a_n+\beta_n) \ge \inf a_n + \inf \beta_n$.

Βρῆτε παραδείγματα, ἄν ὑπάρχουν, γιά ὁποῖα οἱ ἀνισότητες εἶναι γνήσιες.

8) Χρησιμοποιώντας τόν ε-δ ὁρισμό μόνο δείξτε ὅτι:

$\lim \frac{n^2}{n^2+n} = 1$, $\lim_{x\to 2} \frac{x}{x^2-1} = \frac{2}{3}$.

9) Βρῆτε, ἄν ὑπάρχει, $M\in R$ τ.ὥ.: $x>M \Rightarrow \frac{x^5+4x+7}{x^4+1} > 10^6$.

10) Ἄν $[a_n,\beta_n]$, $n=1,2,\dots$ μία ἀκολουθία ἐγκιβωτισμένων κλειστῶν διαστημάτων, δηλ. $[a_1,\beta_1]\supset[a_2,\beta_2]\supset\cdots\supset[a_n,\beta_n]\supset\cdots$, τότε

α) Ἡ τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,\beta_n]$ δέν εἶναι κενή καί μάλιστα ὑπάρχουν τά $\lim a_n$, $\lim \beta_n$ καί ἰσχύει $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,\beta_n] = [\lim a_n, \lim \beta_n]$.

β) Βρῆτε ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι ἡ τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,\beta_n]$ μονοσύνολο.

11) Βρῆτε, ἄν ὑπάρχει, τό $\lim a_n$ ἄν α) $a_n=\sqrt{n+5}-\sqrt{n}$

β) $a_n = \frac{an^2+\beta n+\gamma}{a'n^2+\beta'n+\gamma'}$, $a'\neq 0$. Εἶναι καλά διατυπωμένο τό ἐρώτημα β; Ἄν ὄχι διορθῶστε τή διατύπωση χωρίς νά ἀλλάξετε φυσικά τήν οὐσία τοῦ ἐρωτήματος.

12) Μία συνεχής συνάρτηση f ἔχει τήν ἰδιότητα $f(x)=f(-x)$ γιά κάθε $x\neq 0$. Δείξτε ὅτι $f(0)=0$

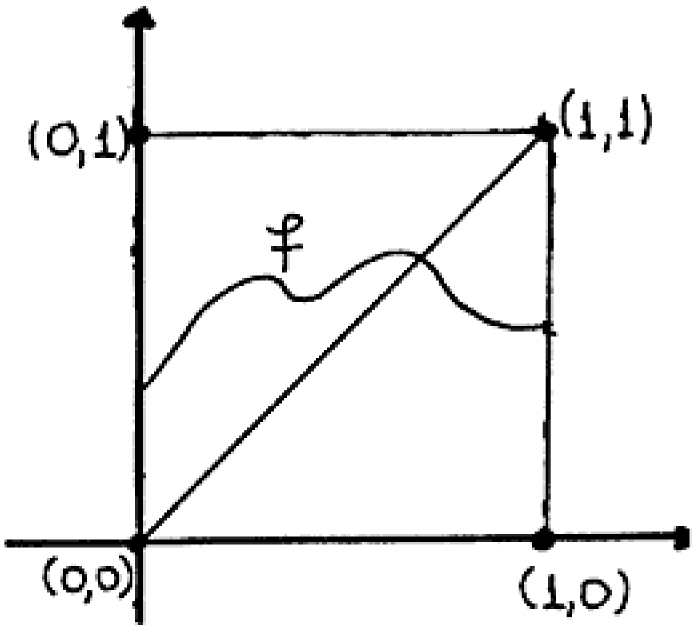
13) Δίνεται ἡ συνάρτηση $f(x)=x^{10}-7x^7+8x^5+x^2$, $x\in R$. Δείξτε ὅτι τό σύνολο τῶν τιμῶν της εἶναι φραγμένο πρός τά κάτω, δηλ. $\inf\{f(x): x\in R\} > -\infty$. Ὑπάρχει $x_0\in R$ τ.ὥ. $f(x_0)=\inf A$ ὅπου $A=\{f(x): x\in R\}$;

14) Γιά ποιά x εἶναι συνεχής ἡ συνάρτηση $[x]\cos\pi x$; Ἴδια ἐρώτηση γιά τή συνάρτηση $[x]\sin\pi x$.

ου του Banach (S. Banach: Πολωνός μαθηματικός του α' μισού του $20^{ου}$ αιώνα).

<u>Θεώρημα</u>: Αν η $f:[0,1]\to[0,1]$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=x_0$.

<u>Απόδειξη</u>: Γεωμετρικά πρέπει να δείξουμε ότι το γράφημα της f τέμνει τη διαγώνιο του τετραγώνου με κορυφές $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, δηλ. το γράφημα της $g(x)=x$, $0\leq x\leq 1$.



Σχ.

Αν $f(0)=0$ ή $f(1)=1$, τότε φυσικά δεν χρειαζόμαστε τίποτε άλλο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $f(0)>0$ και $f(1)<1$. Η συνάρτηση $h(x)=g(x)-f(x)$ ικανοποιεί τότε τις υποθέσεις του θεωρήματος της ενδιάμεσης τιμής. Υπάρχει λοιπόν $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)-f(x_0)=0$, δηλαδή $f(x_0)=x_0$.

3.3. <u>Ασκήσεις.</u>

1) Συμπληρώστε τις αποδείξεις στις παραγράφους 3.1.4 και 3.2.2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4º. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

4.1 Βασικές έννοιες

4.1.1 Ορισμοί και απλά παραδείγματα

Εστω f μία συνάρτηση και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα υπάρχει τότε $\delta>0$ τέτοιο ώστε το x_0+h να βρίσκεται στο πεδίο ορισμού της f για $|h|<\delta$. Η διαφορά $f(x_0+h)-f(x_0)$ συμβολίζεται συχνά Δf και ονομάζεται "αύξηση" της συνάρτησης, ενώ το $h=(x_0+h)-x_0$ συμβολίζεται Δx και ονομάζεται "αύξηση" της "ανεξάρτητης μεταβλητής" x στο x_0. Το πηλίκο $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ ονομάζεται "πηλίκο αυξήσεων" και το όριό του για $\Delta x\to 0$, αν υπάρχει, παράγωγος της f στο x_0. Κατ' αναλογίαν με ότι είπαμε για όρια συναρτήσεων ορίζουμε πότε η παράγωγος είναι $+\infty$ ή $-\infty$ καθώς και παραγώγους από δεξιά και αριστερά. Ας συγκεντρώσουμε αυτές τις παρατηρήσεις σε έναν ορισμό:

Ορισμός: α) Αν υπάρχει το

όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ τότε η f λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0 και το όριο παράγωγος της f στο x_0 (συμβολισμός: $f'(x_0)$ ή $Df(x_0)$ ή $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$ και, αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, απλά $\dfrac{df}{dx}$)

β) Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $\left(\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$, τότε λέμε ότι η f έχει παράγωγο από δεξιά (αριστερά) και τη συμβολίζουμε με $f'(x_0+)$ $(f'(x_0-))$ ή $D^+f(x_0)$ $(D^-f(x_0))$

γ) Στην περίπτωση που τα παραπάνω όρια είναι $+\infty$ ή $-\infty$ λέμε ότι η f έχει παράγωγο (ή παράγωγο από δεξιά ή παράγωγο από αριστερά) $+\infty$ ή $-\infty$, (αλλά δεν λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη).

<u>Παρατήρηση</u> "Η παράγωγος από δεξιά (αριστερά) ορίζεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και σε περιπτώσεις που το x_0 δεν είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού. Για τον ορισμό απαιτείται μόνο η f να είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα της μορφής $[x_0, x_0+\delta)$ (ή $(x_0-\delta, x_0]$), $\delta > 0$."

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε $\dfrac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} \to 0$, $x \to x_0$, (γιατί;), δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|x-x_0| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)| < \varepsilon |x-x_0|$,
απ' όπου έπεται ότι
$|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < (|f'(x_0)|+\varepsilon)|x-x_0|$
Επομένως "αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε είναι και συνεχής στο x_0" (Προσοχή: παραγωγίσιμη σημαίνει ότι η $f'(x_0)$ είναι πεπερασμένη, όχι $+\infty$ ή $-\infty$). Πραγματικά παίρνοντας στην παραπάνω ανισότητα $\varepsilon = 1$, έχουμε για τυχαίο $\varepsilon' > 0$ $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon'$ για όλα τα x του πεδίου ορισμού για τα

οποία $|x-x_0|<\min\left(\frac{\varepsilon'}{|f'(x_0)|+1}, \delta\right)$

Οι γνωστές πλέον ιδιότητες των ορίων μας επιτρέπουν να βρούμε τύπους για παραγώγους αθροίσματος, γινομένου και πηλίκου συναρτήσεων (αφού δείξουμε φυσικά πρώτα ότι υπάρχουν). Έτσι έχουμε:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\,g(x_0)+f(x_0)\,g'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{g(x_0)f'(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2}, \text{ αν } g(x_0)\neq 0$$

Ας αποδείξουμε τους τύπους για το γινόμενο και το πηλίκο. Φυσικά υποθέτουμε ότι το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού και των δύο συναρτήσεων f και g. Παρατηρούμε επίσης ότι η συνέχεια της g στο x_0 και η συνθήκη $g(x_0)\neq 0$ συνεπάγεται ότι η g είναι διάφορη του μηδενός σε μια περιοχή $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta>0$, και επομένως ορίζεται καλά τουλάχιστον σ' αυτή την περιοχή το πηλίκο $\frac{f}{g}$.

Για το γινόμενο χρησιμοποιούμε το κλασσικό τέχνασμα:

$$\frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h)-f(x_0)\,g(x_0)}{h} =$$

$$= \frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h)-f(x_0)\,g(x_0+h)}{h} +$$

$$+ \frac{f(x_0)\,g(x_0+h)-f(x_0)\,g(x_0)}{h} =$$

$$= g(x_0+h)\,\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + f(x_0)\,\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

$$\longrightarrow g(x_0)\,f'(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0), \quad h \to 0.$$

(στην τελευταία σειρά εκτός από τον ορισμό της παραγώγου χρησιμοποιήσαμε και την συνέχεια της g στο x_0)

Έχοντας αποδείξει τον τύπο για το γινόμενο, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$ για να δείξουμε τον τύπο του πηλίκου.

Έχουμε:

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}\right) =$$

$$= -\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\cdot\frac{1}{g(x_0)\,g(x_0+h)} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow -g'(x_0)\,\frac{1}{(g(x_0))^2}, \quad h \to 0$$

όπου πάλι χρησιμοποιήσαμε τη συνέχεια της g στο x_0 και την υπόθεση $g(x_0)\neq 0$.

Ας δώσουμε τώρα μερικά απλά αλλά σημαντικά παραδείγματα:

α) $f(x)=c$ (= σταθερά). Εδώ $\Delta f(x_0)=0$ για οποιοδήποτε x_0 άρα

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=0\to 0\,,\quad \text{δηλαδή}\quad f'(x_0)=0$$

β) $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$: Εδώ

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{x+h-x}{h}=1\to 1\,,\quad \text{δηλ.}\ x'=1$$

γ) $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{h}=\frac{\cancel{h}\left\{(x_0+h)^{n-1}+(x_0+h)^{n-2}x_0+\cdots+x_0^{n-1}\right\}}{\cancel{h}}\to$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} x_0^{n-1}+x_0^{n-1}+\cdots+x_0^{n-1}=n\,x_0^{n-1}\,,$$

δηλ. $(x^n)'=n\,x^{n-1}$

(αποδείξτε τον τύπο αυτό και με επαγωγή χρησιμοποιώντας τη σχέση $(f\cdot g)'=f'g+fg'$).

Ο τύπος αυτός ισχύει και για $n=0$ διότι τότε η f είναι σταθερά. Ισχύει επίσης και για $n\in\mathbb{Z}$ και $n<0$. Πραγματικά έστω $f(x)=x^{-n}$, $n\in\mathbb{N}$, $x\neq 0$. Θα έχουμε:

$$(f(x))'=\left(\frac{1}{x^n}\right)'=-\frac{(x^n)'}{x^{2n}}=-\frac{n\,x^{n-1}}{x^{2n}}=-n\,x^{-n-1},\quad x\neq 0$$

Άρα "για όλους τους ακέραιους n $(x^n)' = nx^{n-1}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της x^n (δηλ. όλα τα x για $n \geq 0$ και τα x με $x \neq 0$ για $n < 0$).

δ) $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$: Γενικά "αν c σταθερά τότε $(cg)'(x_0) = c'g(x_0) + cg'(x_0) = cg'(x_0)$", οπότε τετριμμένα $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + na_n x^{n-1}$.

ε) $f(x) = \sin x$. Εδώ θα έχουμε

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \to$$

$$\to \cos x\,,\quad h \to 0\,.$$

Στην τελευταία σειρά χρησιμοποιήσαμε την συνέχεια του συνημιτόνου, την σχέση $\frac{\sin x}{x} \to 1$, $x \to 0$, και τον τύπο για όριο σύνθετης συνάρτησης (γιατί;).

Έχουμε λοιπόν τη βασική σχέση:

$(\sin x)' = \cos x$.

ζ) $f(x) = \cos x$. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε $(\cos x)' = -\sin x$ (θα δώσουμε και μια διαφορετική απόδειξη σε λίγο).

η) $f(x) = \tan x$, $x \neq (\kappa + \frac{1}{2})\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x(\sin x)' - \sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \text{ δηλαδή}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

θ) $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Αν $x_0 > 0$, επειδή $f(x) = x$ στο διάστημα $(0, \infty)$, θα έχουμε $f'(x_0) = x'|_{x = x_0} = 1$ (γιατί;). Αν $x_0 < 0$, επειδή $f(x) = -x$ στο διάστημα $(-\infty, 0)$, θα έχουμε $f'(x_0) = -1$

Η περίπτωση $x_0 = 0$ παρουσιάζει περισσότερο ενδιαφέρον. Κατ' αρχήν η $|x|$ είναι συνεχής στο 0 (πάρε $\delta = \varepsilon$) αλλά, όπως θα δούμε σε λίγο δεν είναι παραγωγίσιμη δηλ. "η π α ρ α γ ω γ ι σ ι μ ό τ η τ α σ υ ν ε π ά γ ε τ α ι σ υ ν έ χ ε ι α α λ λ ά τ ο α ν τ ί σ τ ρ ο φ ο δ ε ν ε ί ν α ι γ ε ν ι κ ά σ ω σ τ ό".

Ενδιαφερόμαστε για το όριο του πηλίκου

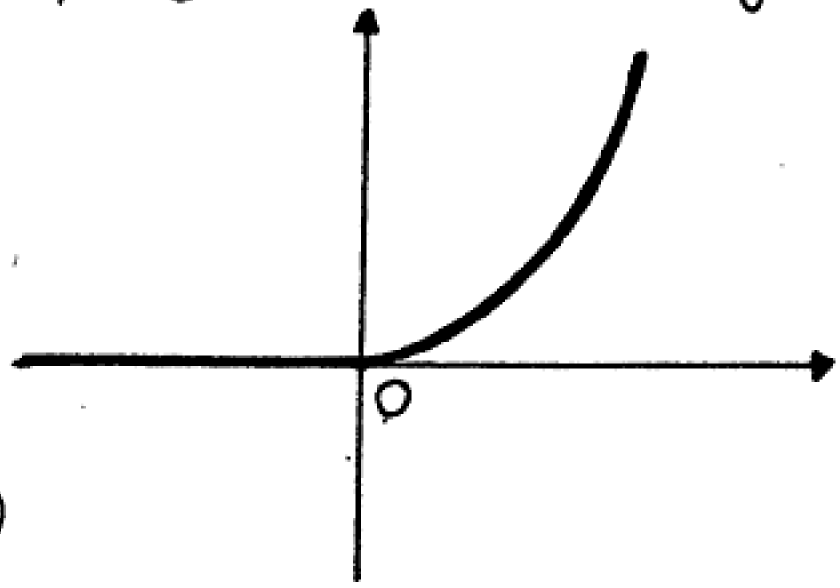
$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}, \text{ όταν } h \to 0.$$

Προφανώς $\lim\limits_{h\to 0+} \frac{|h|}{h} = 1$, $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$ και επομένως δεν υπάρχει το $\lim\limits_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$, δηλαδή η $|x|$ δεν έχει παράγωγο στο 0. Δείξαμε όμως ότι υπάρχουν οι "πλευρικές" παράγωγοι $f'(0+)$ και $f'(0-)$ και μάλιστα $f'(0+)=1$, $f'(0-)=-1$.

i) Ας θεωρήσουμε τώρα μια συνάρτηση που ορίζεται με "διαφορετικούς τύπους" σε διάφορα διαστήματα

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x^2 & x\geqslant 0 \end{cases}$$

Η $f(x)$ συμπίπτει με τη σταθερά συνάρτηση 0 για $x<0$, άρα $f'(x)=0$ για $x<0$ και με την x^2 για $x>0$, άρα $f'(x)=2x$ για $x>0$. Για $x=0$ είναι κατ' αρχήν συνεχής, γιατί



$\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} 0 = 0 =$
$= f(0) = \lim\limits_{x\to 0+} x^2 = \lim\limits_{x\to 0+} f(x)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0. Πραγματικά η $f'(0+)$ υπάρχει και ισούται προφανώς με την αιθό δεξιά ιθαράγωγο της x^2 για $x=0$. Επειδή η x^2, $-\infty < x < \infty$ έχει ιθαράγωγο στο 0, θα έχει και αιθό δεξιά παράγωγο ίση με $(x^2)'_{x=0} = (2x)_{x=0} = 2\cdot 0 = 0$. Όμοια η αριστερά ιθαράγωγος στο 0 ισούται με την ιθαράγωγο της σταθεράς 0 στο 0, δηλ. με 0 και ειθομένως $f'(0)=0$. Βρήκαμε λοιπόν :

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$$

4.1.2 <u>Ο κανόνας της αλυσίδας</u>.

Θα δείξουμε τώρα ένα πολύ σημαντικό θεώρημα που θα μας επιτρέψει να παραγωγίζουμε με ευκολία πολύ περισσότερες συναρτήσεις. Τελείως φορμαλιστικά (ξεχνώντας προς στιγμή πεδία ορισμού, εσωτερικά σημεία και άλλα παρόμοια) ο κανόνας λέγει ότι για τη σύνθετη συνάρτηση $h(x) = f(g(x))$ έχουμε $h'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$. Και αφού προς στιγμήν ξεχάσαμε την "αυστηρότητα" ας δώσουμε και μία ευλογοφανή (αλλά λ α ν θ α σ μ έ ν η) απόδειξη. Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0} =$$

$$= \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)} \cdot \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} .$$

Η g είναι συνεχής στο x_0 άρα $g(x)\to g(x_0)$, για $x\to x_0$ και επομένως, γιά $x\to x_0$,

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} \to \lim_{g(x)\to g(x_0)} \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)} \cdot$$

$$\cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(g(x_0))\, g'(x_0) .$$

Από τα πολλά "στραβά" που περιέχει ο παραπάνω συλλογισμός ίσως το ουσιαστικότερο είναι ότι δεν "δουλεύει" αν $g(x)=g(x_0)$ για x "κοντινά" στο x_0. Θα δώσουμε παρακάτω μια σωστή απόδειξη. Ιδού πρώτα μερικές εφαρμογές:

α) $(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)' =$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) =$

$= -\sin x .$

β) $(\sin(x^3\cos x))' = \cos(x^3\cos x)\,(x^3\cos x)' =$

$= \cos(x^3\cos x)\left\{3x^2\cos x - x^3\sin x\right\}$

γ) $((\alpha x+\beta)^n)' = n(\alpha x+\beta)^{n-1}(\alpha x+\beta)' =$
$= \alpha n(\alpha x+\beta)^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$

Προχωράμε τώρα στη διατύπωση και απόδειξη του κανόνα της αλυσίδας.

<u>Θεώρημα</u> (κανόνας της αλυσίδας) "Αν x_0 εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της g και $y_0=g(x_0)$ εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f και οι παράγωγοι $g'(x_0)$, $f'(y_0)$ υπάρχουν (και είναι πεπερασμένες), τότε η σύνθετη συνάρτηση $h(x)=f(g(x))$ έχει παράγωγο στο x_0 και ισχύει ο τύπος:

$$h'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)\text{"}.$$

<u>Απόδειξη</u>

Η παραγωγισιμότητα της g στο x_0 συνεπάγεται ότι η g είναι συνεχής στο x_0. Υπάρχει επίσης $\delta_1>0$ τέτοιο ώστε τα y με $|y-y_0|<\delta_1$ να βρίσκονται στο πεδίο ορισμού της f, διότι το $y_0=g(x_0)$ είναι εσωτερικό σημείο αυτού του πεδίου ορισμού. Συνάγουμε λοιπόν ότι υπάρχει $\delta_2>0$ τέτοιο ώστε, $|x-x_0|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-g(x_0)|<\delta_1$ και επομένως για $|x-x_0|<\delta_2$ η $h(x)=f(g(x))$ ορίζεται.

Θέλουμε να δείξουμε ότι η διαφορά

$$\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}-f'(g(x_0))\,g'(x_0)$$

τείνει στο 0 για $x\to x_0$. Η διαφορά αυτή γράφεται:

$$\left(\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}-f'(g(x_0))\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)+$$

$$+\left(f'(g(x_0))\left(\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}-g'(x_0)\right)\right)$$

Ο δεύτερος όρος τείνει στο 0 διότι

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\to g'(x_0) \text{ για } x\to x_0 .$$

Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι και ο πρώτος όρος τείνει στο 0 δηλ. ότι

$$\frac{f(g(x))-f(g(x_0))-f'(g(x_0))\,(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}\to 0,$$

$x\to x_0$.

Έστω λοιπόν $\epsilon>0$. Η παραγωγισιμότητα της g στο x_0 συνεπάγεται ότι υπάρχει $\delta_2'>0$ τέτοιο ώστε:

$$|x-x_0|<\delta_2' \Rightarrow \left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right| < |g'(x_0)|+1=M$$

Η παραγωγισιμότητα της f στο $y_0=g(x_0)$ συνεπάγεται ότι υπάρχει δ_3 τέτοιο ώστε:

$$|y-y_0|<\delta_3 \Rightarrow \left|\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} - f'(y_0)\right| < \frac{\varepsilon}{M}$$

άρα και:

$$|f(y)-f(y_0)-(y-y_0)f'(y_0)| \leqq \frac{\varepsilon}{M}|y-y_0| \text{ αν}$$

$|y-y_0|<\delta_3$.

Η συνέχεια της g στο x_0 συνεπάγεται ότι υπάρχει $\delta_4>0$ τέτοιο ώστε:

$$|x-x_0|<\delta_4 \Rightarrow |g(x)-g(x_0)|<\delta_3$$

Θέτοντας τώρα $\delta=\min(\delta_2',\delta_4)$ και περιμαζεύοντας τα όσα είπαμε θα έχουμε:

$$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|f(g(x))-f(g(x_0))-f'(g(x_0))(g(x)-g(x_0))|}{|x-x_0|} \leqq$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{M}\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right| < \frac{\varepsilon}{M}M=\varepsilon,$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.

4.1.3 <u>Η παράγωγος σαν συνάρτηση</u>. Αν μια συνάρτηση f έχει παράγωγο για όλα τα x στο πεδίο ορισμού της, τότε η παράγωγος αυτή θα είναι μία νέα συνάρτηση που εξακολουθούμε να συμβολίζουμε με f'. Αν η f' έχει παράγωγο τη συμβολίζουμε με f'' (ή $D^2 f$ ή $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$) κ.ο.κ.

<u>Παραδείγματα</u>: α) $f(x) = x^3$. Έχουμε $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$, $f^{(4)}(x) = 0, \ldots, f^{(n)}(x) = 0 \quad (n \geq 4)$.

β) $f(x) = \sin x$. Έχουμε $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$ και γενικότερα (τετριμμένη επαγωγή)

$$f^{(4k+1)}(x) = \cos x,\quad f^{(4k+2)}(x) = -\sin x,$$

$$f^{(4k+3)}(x) = -\cos x,\quad f^{(4k+4)}(x) = \sin x,\quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

4.2 Φυσική και γεωμετρική σημασία της παραγώγου

Η εισαγωγή της έννοιας της παραγώγου έγινε τον 17ο αιώνα και αποδίδεται στους Newton(*), Fermat(**) και Leibnitz(***) (ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο). Το κίνητρο για τον Newton ήταν η κατασκευή μαθηματικού μοντέλου για την ερμηνεία των νόμων κίνησης των πλανητών του Kepler. Στο περίφημο έργο του

(*) Διάσημος Άγγλος επιστήμονας του 17ου-18ου αιώνα. (**) Γάλλος μαθηματικός του 17-18ου αιώνα. (***) Γερμανός μαθηματικός και φιλόσοφος του 17-18ου αιώνα.

"Principia" θέτει στην πραγματικότητα τις βάσεις και προχωράει σημαντικά στην ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού, όπως τον γνωρίζουμε σήμερα (αν και η ανάγνωση των "Principia" θυμίζει μάλλον τα "Στοιχεία" του Ευκλείδη παρά ένα σημερινό κείμενο). Ο Fermat οδηγήθηκε στην έννοια της παραγώγου στην προσπάθειά του να ορίσει την εφαπτομένη μιας καμπύλης, ενώ ο Leibnitz οδηγήθηκε εκεί από φιλοσοφικής μορφής ερωτήσεις. Από τη δουλειά του τελευταίου μας έμεινε ουσιαστικά μόνο ο συμβολισμός $\frac{df}{dx}$, ενώ οι αναλύσεις των Fermat και Newton θεωρούνται και σήμερα θεμελιώδεις. Στις επόμενες δύο παραγράφους θα πούμε δύο λόγια για τις σημαντικές αυτές αναλύσεις.

4.2.1 Η παράγωγος στη Μηχανική

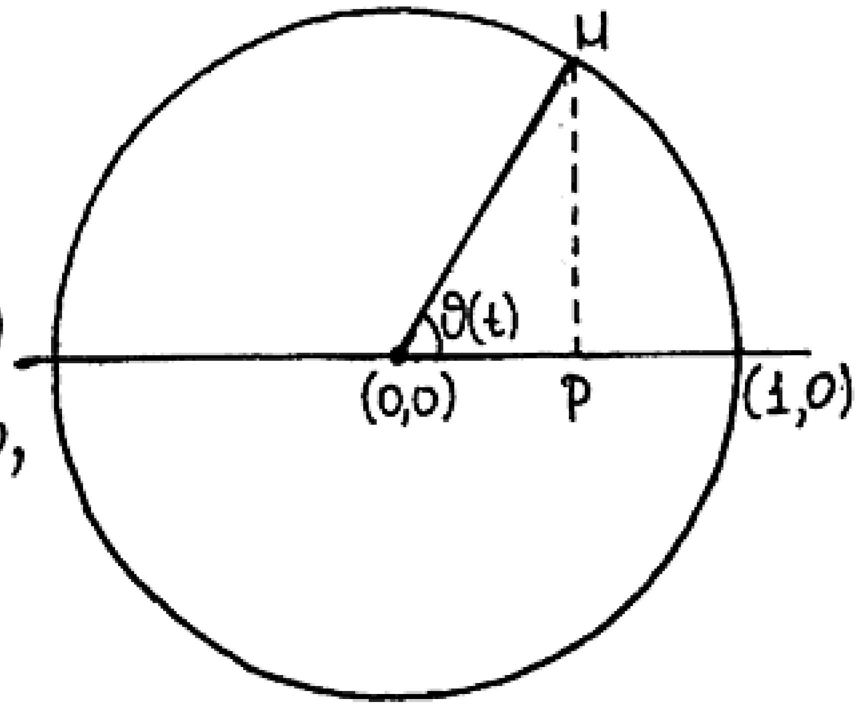
Για να μελετήσουμε την κίνηση ενός υλικού σημείου στο χώρο γράφουμε $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ για τις συντεταγμένες του, που είναι φυσικά συναρτήσεις του χρόνου t. Δεχόμαστε ότι ο χρόνος περιγράφεται με ένα πραγματικό αριθμό, ο οποίος μεταβάλλεται σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Ας εξετάσουμε για απλότητα μόνο την κίνηση της προβολής του σημείου στον άξονα x, ή, αν θέλετε, ας υποθέσουμε ότι σημείο κινείται πάνω σε μια ευθεία την οποία παίρνουμε σαν άξονα των x.

Το σημείο λοιπόν ξεκινάει από τη θέση $x(\alpha)$ και φτάνει στη θέση $x(\beta)$ σε χρόνο $\beta-\alpha$. Αν η κίνησή του ήταν "ομοιόμορφη" θα λέγαμε ότι η ταχύτητά του είναι $\dfrac{x(\beta)-x(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Εν γένει όμως αυτό δεν συμβαίνει και γι' αυτό ονομάζουμε το πηλίκο $\dfrac{x(\beta)-x(\alpha)}{\beta-\alpha}$ "μέση ταχύτητα". Φυσικά μέση ταχύτητα θα έχουμε για κάθε χρονικό διάστημα $(t, t+h)$, ή, για να συμφωνήσουμε με την παράδοση, $(t, t+\Delta t)$. Είναι φυσιολογικό, τουλάχιστον, για μικρά Δt, να προσεγγίζουμε την ταχύτητα τη στιγμή t με αυτή την μέση ταχύτητα $\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$ και να ορίσουμε σαν ταχύτητα κατά τη

στιγμή t το όριο $\lim \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$, $\Delta t \to 0$.
Επειδή το $x(t)$ παριστάνει τη θέση του κινητού, δηλ. το διάστημα που διήνυσε μέχρι τη στιγμή t, αν υποθέσουμε ότι $x(a)=0$, μπορούμε να πούμε ότι: Η (στιγμιαία) ταχύτητα είναι η παράγωγος του διαστήματος ως προς το χρόνο".

Από το σημείο αυτό και πέρα πολλά από τα αποτελέσματα του Απειροστικού Λογισμού αποκτούν μια "μηχανική" σημασία (αλλά και αντίστροφα πολλά ερωτήματα της Μηχανικής μας οδηγούν σε προτάσεις του Απειροστικού Λογισμού). Έτσι π.χ. η δεύτερη παράγωγος του διαστήματος ως προς το χρόνο είναι η "επιτάχυνση".

Ας δούμε με περισσότερη λεπτομέρεια ένα απλό παράδειγμα (αρμονικός ταλαντωτής). Υποθέτουμε ότι ένα κινητό Μ κινείται ομοιόμορφα πάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου με κέντρο την αρχή και ακτίνα 1 κατά φορά αντίθετη με τη φορά των δεικτών του ωρολογίου και ακόμη ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στο σημείο $(1,0)$. Ενδιαφερόμαστε για την κίνηση της προβολής του σημείου πάνω στον άξονα των x.



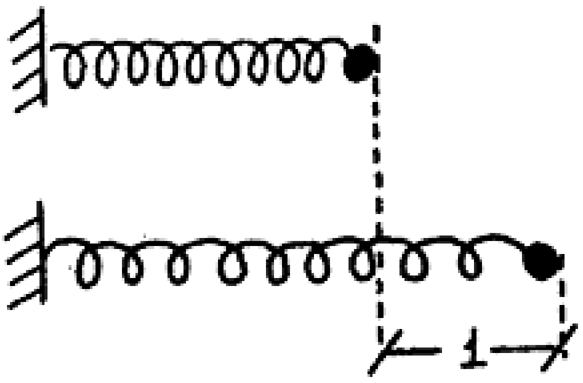
Σχ. 24

Η υπόθεση ότι η κίνηση πάνω στην περιφέρεια είναι ομοιόμορφη σημαίνει ότι η γωνία θ $(=\theta(t))$ είναι ανάλογη του χρόνου, δηλ. ότι $\theta(t)=\omega t$, όπου ω μία σταθερά που ονομάζεται γωνιακή ταχύτητα και μετριέται σε rad/sec, όταν μετράμε το χρόνο σε δευτερόλεπτα και τη γωνία σε ακτίνια.

Η θέση της προβολής P στον άξονα των x θα δίνεται από τη συνάρτηση $x(t)=\cos\theta(t)=$ $=\cos\omega t$.

Η ταχύτητα και η επιτάχυνση λοιπόν του P θα είναι $\upsilon(t)=x'(t)=-\omega\sin\omega t$ και $b(t)=x''(t)=-\omega^2\cos\omega t$.

Πολύ συχνά εμφανίζονται στη Φυσική περιπτώσεις κίνησης παρόμοιας με την κίνηση του P. Αν π.χ. φανταστούμε ένα υλικό σημείο μάζας 1 στην άκρη ενός ελατηρίου και το απομακρύνουμε από τη θέση ισορροπίας κατά τη διεύθυνση του ελατηρίου και κατά μήκος 1 τότε, υπό την προϋπόθεση ότι βρισκόμαστε ακόμα στην "ελαστική περιοχή" (δηλ. δεν χάλασε το ελατήριο), το σημείο θα κινείται όπως το P (θα



Σχ. 25

εκτελεί όπως λέμε "αρμονική ταλάντωση").
Οι νόμοι της Φυσικής που μας οδηγούν σ' αυτό το συμπέρασμα είναι γνωστοί. Το ότι βρισκόμαστε στην ελαστική περιοχή σημαίνει ότι ισχύει ο νόμος του Hooke δηλ. η δύναμη που ασκείται στο σημείο μας θα κατευθύνεται προς την αρχή και θα είναι ανάλογη της απομάκρυνσης: $F = -\kappa x$, κ μία θετική σταθερά. Ας γράψουμε λοιπόν $\kappa = \omega^2$. Η δύναμη όμως είναι ίση με την μάζα επί την επιτάχυνση (αυτός είναι ένας από τους βασικούς νόμους που ανακάλυψε ο Newton) και επομένως θα έχουμε (μάζα = 1)

$$x''(t) = -\omega^2 x(t)$$

Έχουμε λοιπόν μία εξίσωση για την άγνωστη συνάρτηση που περιέχει εκτός από τη συνάρτηση και παραγώγους της (εδώ τη δεύτερη). Μια τέτοια εξίσωση λέγεται δ ι α φ ο ρ ι κ ή και ένα από τα κύρια επιτεύγματα του Απειροστικού Λογισμού είναι ότι δίνει μεθόδους για την λύση τέτοιων εξισώσεων. Φυσικά δεν φτάνει αυτή η εξίσωση για νά βρούμε την άγνωστη συνάρτηση. Ιδού μία φ υ σ ι κ ή απόδειξη: "Στην ίδια εξίσωση θα φτάναμε αν απομακρύναμε το σημείο κατά $1/2$, και όχι κατά 1, από τη θέση ισορροπίας. Προφανώς όμως τότε έπρεπε να βρούμε διαφορετική συνάρτηση, αν μη τι άλλο διότι δε θα ίσχυε η συνθήκη $x(0)=1$. Αλλά και αν ακόμη είχαμε την ίδια αρχική απομάκρυνση 1 και τη στιγμή $t=0$ δίναμε μια αρχική ταχύτητα στο κινητό μας (φανταστείτε μια ελαφριά "σφυριά") πάλι στην ίδια εξίσωση θα φτάναμε. Είναι όμως προφανές και πάλι ότι θα έπρεπε να βρούμε διαφορετική συνάρτηση, αν μη τι άλλο δε θα ίσχυε η συνθήκη $x'(0)=0$."
Εδώ τελειώνουν όμως οι αντιρρήσεις γιατί

αν δώσουμε την αρχική απομάκρυνση ($x(0)=1$) και την αρχική ταχύτητα ($x'(0)=0$) τότε η "φυσική" διαίσθηση μας λέγει ότι το κινητό είναι "καταδικασμένο" να ακολουθήσει μία συγκεκριμένη κίνηση. Διατυπωμένο σε μαθηματικούς όρους αυτό σημαίνει ότι "υπάρχει μία μόνο συνάρτηση $x(t)$ που ικανοποιεί την εξίσωση $x''(t)=-\omega^2 x(t)$ και τις συνθήκες $x(0)=1$ και $x'(0)=0$".

Μια τέτοια συνάρτηση βρήκαμε στην αρχή της παραγράφου : $x(t)=\cos\omega t$. "Αποδείξαμε" λοιπόν ότι η απομάκρυνση $x(t)$ στον αρμονικό ταλαντωτή μας είναι η $x(t)=\cos\omega t$, όπου η γωνιακή ταχύτητα ω είναι η τετραγωνική ρίζα της "σταθεράς του ελατηρίου" κ. Βάλαμε τη λέξη αποδείξαμε σε εισαγωγικά γιατί η απόδειξή μας στηρίχτηκε στη Φυσική εμπειρία. Θα δούμε στις ασκήσεις ότι ο Απειροστικός Λογισμός θα μας δώσει σχετικά εύκολα τη μαθηματική απόδειξη που λείπει.

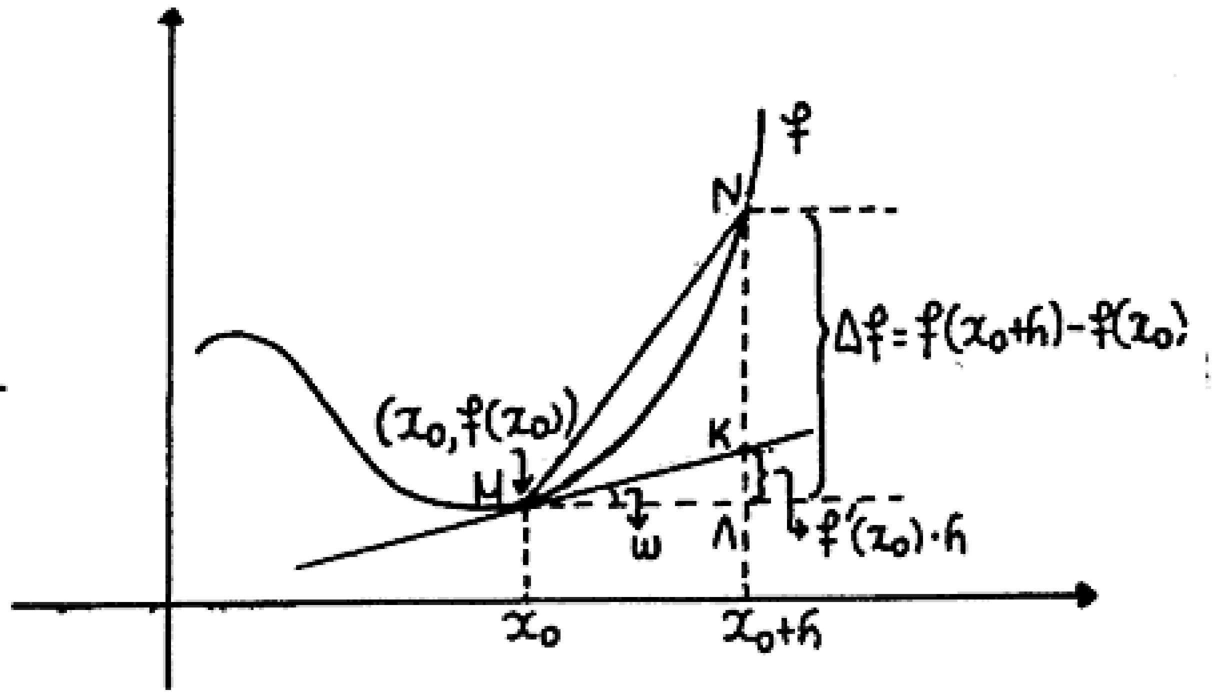
<u>Παρατήρηση</u>: Ένας προσεκτικός αναγνώστης στο σημείο αυτό πρέπει να ρω-

τήσει: Καλά, πιστεύω ότι αργότερα θα μας δώσεις αυστηρή απόδειξη, αλλά και το Φυσικό επιχείρημα φαίνεται ατράνταχτο (ένα κινητό που ξεκινάει από δεδομένη θέση ($x(0)=1$) με δεδομένη ταχύτητα ($x'(0)=0$) και σε κάθε θέση που θα περάσει ασκείται επάνω του δεδομένη δύναμη ($-\omega^2 x$) δεν μπορεί παρά να έχει προδιαγεγραμμένη κίνηση). Τι γίνεται λοιπόν, μπορούμε να αποδείξουμε μαθηματικές προτάσεις με φυσικά επιχειρήματα; Η απάντηση είναι **ναι** εφ' όσον η Φυσική Θεωρία (εδώ η Μηχανική) της οποίας τους νόμους χρησιμοποιούμε είναι "**καλή**". Πιο συγκεκριμένα εδώ στηριχτήκαμε στο νόμο του Newton (αξίωμα για τη Μηχανική) "δύναμη = (μάζα) · (επιτάχυνση)". Ο νόμος αυτός (ουσιαστικά λόγω της αυστηρής απόδειξης που θα δώσουμε αργότερα) συνεπάγεται το "ατράνταχτο" φυσικό επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε.

4.2.2 <u>Η παράγωγος σαν κλίση εφαπτομένης</u>

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f είναι

ορισμένη σε μια γειτονιά του σημείου x_0 και ότι είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Θεωρούμε τη χορδή ΜΝ (βλ. σχ 26)



Σχ. 26

και υποθέτουμε ότι το σημείο $N(x_0+h, f(x_0+h))$ πλησιάζει το Μ, δηλ. το h τείνει στο 0. Περιμένουμε, γεωμετρικά, ότι η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται η χορδή θα πλησιάζει μία ευθεία που είναι φυσιολογικό να καλέσουμε "εφαπτομένη" του γραφήματος της f στο $(x_0, f(x_0))$. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε την εφαπτομένη στο Μ να είναι μια ευθεία που περνάει από το Μ και έχει κλίση το όριο, αν υπάρχει, των κλίσεων των χορδών ΜΝ όταν $h \to 0$. Θα δούμε ότι η παραγωγισιμότητα συνεπάγεται την ύπαρξη αυτού του ορίου. Πραγματικά (βλ. σχήμα) η κλίση της ΜΝ είναι φυσικά μια συνάρτηση του h που δίνεται από τον τύπο :

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{(N\Lambda)}{(M\Lambda)}$$

Υπάρχει λοιπόν το όριο των κλίσεων και δεν είναι τίποτε άλλο παρά η $f'(x_0)$ δηλαδή (βλ. σχ. 26) $\tan\omega = f'(x_0)$

Γράφοντας $\Delta f(x_0,h) = f(x_0+h) - f(x_0)$ και $df(x_0,h) = f'(x_0)\cdot h$, δηλ. το $\Delta f(x_0,h) = \Lambda N$ είναι η "αύξηση πάνω στο γράφημα της f", ενώ το $df(x_0,h) = K\Lambda$ είναι η "αύξηση πάνω στην εφαπτομένη $f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)$". Η γεωμετρική διαίσθηση μας λέγει ότι η διαφορά $\Delta f(x_0,h) - df(x_0,h) = NK$, δηλ. το "λάθος" που θα κάναμε αν αντικαθιστούσαμε την $f(x)$ με την $f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)$ (= εξίσωση εφαπτομένης), γίνεται, ακόμη και σε σχέση με το h, πολύ μικρό, όταν $h \to 0$. Ας δούμε με μεγαλύτερη ακρίβεια τι συμβαίνει. Έχουμε

$$NK = \Delta f(x_0,h) - df(x_0,h) = f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h =$$

$$= h\left\{\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h}\right\} = h\cdot q(x_0,h)$$

όπου $$q(x_0,h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$$

Η παραγωγισιμότητα της f στο x_0 σημαίνει ότι η q, σαν συνάρτηση του h, τείνει στο 0 για $h \to 0$, δηλαδή όχι μόνο $\Delta f(x_0,h) - df(x_0,h) \to 0$ αλλά και

$\frac{\Delta f(x_0,h) - df(x_0,h)}{h} \to 0$, $h \to 0$. Συνήθως η ιδιότητα ευφράζεται ως εξής:
το $\Delta f(x_0,h) - df(x_0,h)$ είναι "απειροστό" ανώτερης τάξης από το h, ή ακόμα:
Το $\Delta f(x_0,h) - df(x_0,h)$ είναι "μικρό ο" του h (συμβολισμός: $\Delta f(x_0,h) - df(x_0,h) = o(h)$, $h \to 0$).

As δώσουμε τους ακριβείς ορισμούς:
Κατ' αρχήν απειροστό λέγεται μια συνάρτηση $f(x)$ με την ιδιότητα $f(x) \to 0$, $x \to x_0$ (ακριβέστερα απειροστό για $x \to x_0$).

Το σύμβολο "ο" (ο μικρό) καθώς και το "Ο" (Ο μεγάλο) οφείλονται στο Γερμανό μαθηματικό Landau (α' μισό 20ού αιώνα) και ορίζονται ως εξής:

<u>Ορισμός</u>: Αν f, g δύο συναρτήσεις ορισμένες σε μια περιοχή ενός σημείου x_0 (ανάλογοι ορισμοί δίνονται και αν οι συναρτήσεις ορίζονται σε διαστήματα της μορφής (x_0, x_0+h) ή (x_0-h, x_0), $h>0$), τότε

α) $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$, αν υπάρ-

χουν $\delta>0$ και M τέτοια ώστε
$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)| \leqq M|g(x)|$.

β) $f(x)=o(g(x))$, $x\to x_0$, αν

$\frac{f(x)}{g(x)}\to 0$, $x\to x_0$.

($f(x)=O(g(x))$, $x\to x_0$, διαβάζεται: η f είναι "Ο μεγάλο" της g για $x\to x_0$ και η $f(x)=o(g(x))$, $x\to x_0$, διαβάζεται: η f είναι "ο μικρό" της g για $x\to x_0$)

<u>Παραδείγματα</u>

α) $\sin x = O(x)$, $x\to 0$. Πραγματικά $|\sin x|\leqq |x|$ για όλα τα x.

β) $\sin\frac{1}{x}=O(1)$, $x\to 0$. Πραγματικά $|\sin\frac{1}{x}|\leqq 1$ για όλα τα x.

γ) $x^2=o(x)$, $x\to 0$. Πραγματικά

$\frac{x^2}{x}=x\to 0$, $x\to 0$.

δ) $1-\cos x = o(x)$, $x\to 0$. Πραγματικά

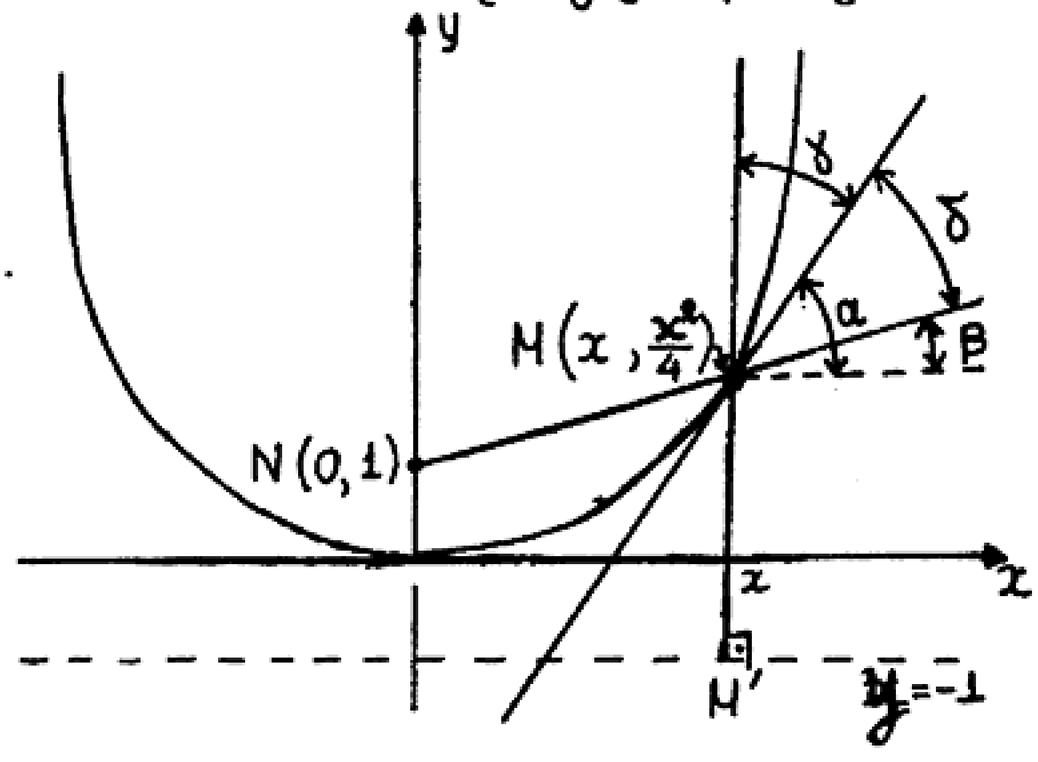
$$\frac{1-\cos x}{x}=\frac{1}{x}2\sin^2\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{x}{2}\to$$

$\to 1\cdot 0=0$, $x\to 0$

<u>Παρατήρηση</u> Αν γράψουμε Δx για το h τότε η σχέση $df(x_0,h)=f'(x_0)\cdot h$ γίνεται $f'(x_0)=\frac{df(x_0,h)}{\Delta x}$. Για τη συνάρτηση

$f(x)=x$ θα έχουμε $df(x_0,h)=1\cdot h=h$ για όλα τα h, δηλ. $dx(x_0,h)=\Delta x$. Οι παρατηρήσεις αυτές οδηγούν στο "συμβολισμό του Leibnitz" για την παράγωγο $\dfrac{df}{dx}$. Ας σημειώσουμε ακόμη ότι το $df(x_0,h)$, το οποίο για δεδομένο x_0, είναι απλά η γραμμική ομογενής συνάρτηση $f'(x_0)\cdot h$, λέγεται **διαφορικό** της f. Δεν θα επιμείνουμε περισσότερο στη σημαντική αυτή έννοια γιατί στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής που εξετάζουμε δεν προσφέρει τίποτε περισσότερο [redacted] από ότι η παράγωγος. Όπως θα μάθετε αργότερα η κατάσταση είναι τελείως διαφορετική για συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών.

Κλείνουμε αυτή την υποπαράγραφο με μια απλή εφαρμογή. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{4}x^2$. Το γράφημά της είναι μια **παραβολή** με "εστία" το σημείο $N(0,1)$ και "διευθετούσα"



Σχ. 27

την ευθεία $y=-1$. Γεωμετρικά ορίζεται σαν ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που απέχουν εξίσου από την εστία N και τη διευθετούσα $y=-1$. (Πραγματικά (βλ. σχ. 27)

$$(MN)^2 = x^2+\left(\frac{x^2}{4}-1\right)^2 = x^2+\left(\frac{x^2}{4}\right)^2+1-\frac{x^2}{2} =$$

$$=1+\left(\frac{x^2}{4}\right)^2+\frac{x^2}{2}=\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^2=(MM')^2 \Big).$$

Μία πολύ γνωστή ιδιότητα της παραβολής είναι ότι "η εφαπτομένη της διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζει η παράλληλος προς τον άξονα συμμετρίας της και η ευθεία που συνδέει το σημείο επαφής με την εστία". Ας την αποδείξουμε: Πρέπει να δείξουμε (βλ. σχ.27) ότι $\gamma=\delta$, δηλ. $\gamma=\alpha-\beta$ και επειδή $\gamma=\frac{\pi}{2}-\alpha$ πρέπει να δείξουμε ότι $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$

'Εχουμε όμως:

$\tan\alpha=f'(x)=\frac{x}{2}$ (η κλίση της εφαπτομένης είναι η παράγωγος)

$\tan\beta=\frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{4}-1\right)$

και επομένως

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{x}{1-\frac{x^2}{4}}=-\frac{1}{\tan\beta}=\cot(-\beta),$$

απ' όπου πραγματικά έπεται $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$.
(Χωρίς να το πούμε υποθέσαμε ότι οι γωνίες $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ήταν οξείες, δηλ. $x>0$ και $\frac{x^2}{4}>1$. Διερευνείστε και τις υπόλοιπες περιπτώσεις.).

4.3 Ορισμένα βασικά θεωρήματα για παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

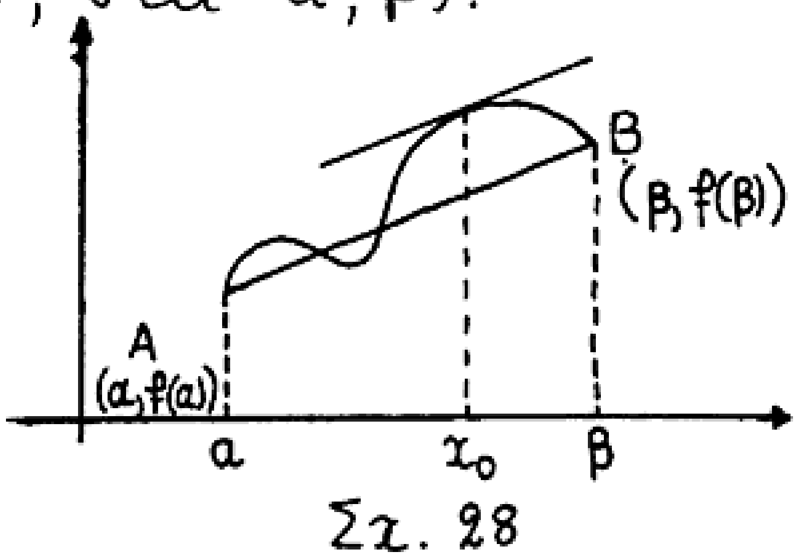
Ο ορισμός της παραγώγου υπαγορεύτηκε από ανάγκες της Γεωμετρίας και της Μηχανικής και ο Απειροστικός Λογισμός, που βασίζεται σ' αυτή την έννοια, έδωσε τεράστια ώθηση και στις δύο αυτές επιστήμες (και σε άλλες πολλές). Ο ορισμός όμως αυτός είναι σίγουρα πετυχημένος και για ένα άλλο λόγο: δίνει λαβή για τη δημιουργία μιας πλουσιότατης θεωρίας που απαντάει σε πολλά φυσιολογικά ερωτήματα για τη συμπεριφορά των πραγματικών συναρτήσεων. Δεν υπάρχει αμφιβολία, ότι θα έχανε μεγάλο μέρος από τη σημασία του ο Απειροστικός Λογισμός χωρίς τις εφαρμογές του, αλλά είναι επίσης βέβαιο ότι θα είχε τη θέση του στη Μαθηματική Επιστήμη ακόμη και χωρίς αυτές. Σύμφωνα με μια "μεταμαθηματική" αρχή οι δύο αυτές όψεις μπορεί να είναι αλληλένδετες: "Μια καλή μαθηματική θεωρία αν δεν έχει προέλθει από σημαντικά ερωτήματα άλλων επιστημών περιέχει τη δυνατότητα να εφαρμοστεί ακόμη και μετά τη δημιουργία της".

Από την παράγραφο αυτή θα αρχίσει να γίνεται εμφανής ο πλούτος της θεωρίας που μελετάμε.

4.3.1 Τα θεωρήματα του Rolle και της μέσης τιμής.

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και συνεχής σ' αυτό. Υπενθυμίζουμε ότι για τα σημεία α, β η συνέχεια ισοδυναμεί με συνέχεια από δεξιά και αριστερά αντίστοιχα. Ας υποθέσουμε ακόμη ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α,β) (δε μας ενδιαφέρει η ύπαρξη παραγώγων, από δεξιά και αριστερά βέβαια, στα α, β).

Είναι φανερό γεωμετρικά ότι αν μετακινήσουμε τη χορδή ΑΒ (βλ. σχ. 28) παράλληλα προς τον εαυτό



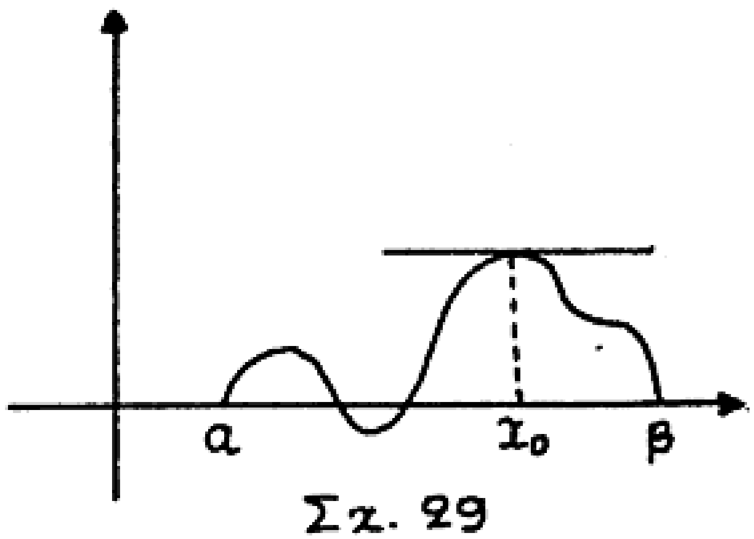
Σχ. 28

της, σε κάποια στιγμή θα γίνει εφαπτομένη του γραφήματος, έστω σε ένα σημείο x_0, $\alpha<x_0<\beta$. Η κλίση της εφαπτομένης στο x_0, δηλ. η $f'(x_0)$ θα είναι ίση με την κλίση της χορδής δηλαδή $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Δώσαμε λοιπόν μια γεωμετρικά ευλογοφανή απόδειξη του παρακάτω σημαντικού θεωρήματος.

<u>Θεώρημα</u> (της μέσης τιμής). "Αν η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ καί παραγωγίσιμη στό (α,β), τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_0)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\ .\text{"}$$

Μια ειδική και ενδιαφέρουσα περίπτωση του θεωρήματος προκύπτει όταν $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Η περίπτωση αυτή είναι γνωστή σαν θεώρημα του Rolle. Ο Rolle (Γάλλος μαθηματικός του $17^{ου}$ αιώνα) απέδειξε το θεώρημα μόνο για πολυώνυμα.



Σχ. 29

<u>Θεώρημα</u> (Rolle). "Αν ισχύουν

οι προϋποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής και επιπλέον $f(\alpha)=f(\beta)=0$ τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$ "

Μια απλή παρατήρηση δείχνει ότι στην πραγματικότητα τα δύο θεωρήματα είναι ισοδύναμα. Πραγματικά ας υποθέσουμε ότι ισχύει το θεώρημα του Rolle και ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)-g(x)=h(x)$, όπου

$$g(x)=f(\alpha)+\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$$ η γραμμική

συνάρτηση της οποίας το γράφημα περιέχει τη χορδή ΑΒ. Η h θα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle γιατί η g είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, σε όλο το $\mathbb{R}$ και $f(\alpha)=g(\alpha)$, $f(\beta)=g(\beta)$. Υπάρχει λοιπόν $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο

ώστε $h'(x_0)=0$, δηλ. $$f'(x_0)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=0$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε το θεώρημα του Rolle.

<u>Απόδειξη</u> Αν η f είναι σταθερή στο $[\alpha,\beta]$ δηλ. $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $f'(x)=0$ για όλα τα x και το θε-

ώρημα είναι τετριμμένο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι υπάρχει x, αναγκαστικά στο (α,β), τέτοιο ώστε $f(x)\neq 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε $f(x)>0$. Επειδή η f είναι συνεχής υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\sup\{f(x): x\in[\alpha,\beta]\}$, δηλ. $f(x_0)\geqslant f(x)$ για κάθε x στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή υπάρχει x με $f(x)>0$, θα έχουμε $f(x_0)>0$, επομένως $\alpha<x_0<\beta$. Θα δείξουμε ότι $f'(x_0)=0$ και η απόδειξη θα έχει τελειώσει.

Επειδή $x_0\in(\alpha,\beta)$, υπάρχει η παράγωγος $f'(x_0)$ άρα και οι $f'(x_0+)$ και $f'(x_0-)$ και μάλιστα $f'(x_0)=f'(x_0+)=f'(x_0-)$.

Έχουμε όμως $f'(x_0+)=\lim\limits_{x\to x_0+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και επειδή $f(x_0)\geqslant f(x)$ και $x>x_0$ το πηλίκο $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ θα είναι $\leqq 0$ για $x>x_0$. Συνάγουμε ότι $f'(x_0)=f'(x_0+)\leqq 0$. Με τελείως παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε $f'(x_0)=f'(x_0-)\geqslant 0$ και επομένως $f'(x_0)=0$ όπως έπρεπε να δείξουμε.

<u>Παρατηρήσεις</u>: α) Η υπόθεση της

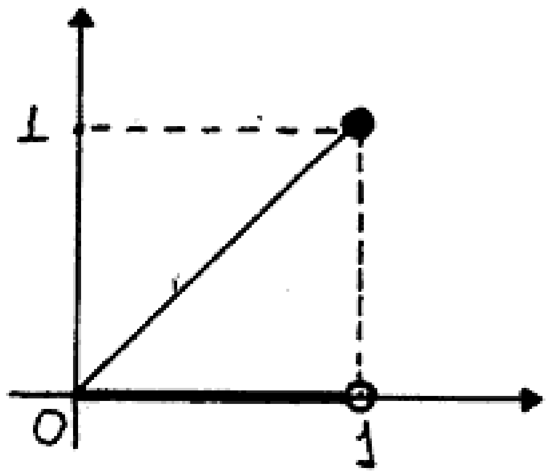
παραγωγισιμότητας στο (α,β) είναι φυσικά απαραίτητη για να έχει νόημα το συμπέρασμα του θεωρήματος. Η υπόθεση της συνεχείας στο $[\alpha,\beta]$ θα μπορούσε κατ' αρχήν να αντικατασταθεί ισοδύναμα με συνέχεια στα α και β μόνο (γιατί;) και είναι επίσης απαραίτητη. Αυτό το βλέπουμε με το απλό παράδειγμα:

$f(x)=0$ για $0\leq x<1$ και $f(1)=1$.

Εκτός από τη συνέχεια στο 1 όλες οι άλλες προϋποθέσεις επαληθεύονται αλλά το συμπέρασμα είναι σίγουρα αδύνατο. Πραγματικά $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(0,1)$, ενώ $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1\neq 0$

(βλ. σχ. 30).

β) Υπάρχουν διάφορες χρήσιμες παραλλαγές του θεωρήματος της μέσης τιμής. Η μορφή που δείξαμε είναι γνωστή με το όνομα του Lagrange (Γάλλος μαθηματικός του $18^{ου}$ αιώνα).



Σχ 30

Αν π.χ. θεωρήσουμε δύο συναρτήσεις f και g που ικανοποιούν και οι δύο τις υποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής τότε η συνάρτηση :

$$h(x) = (f(\beta) - f(a))g(x) - (g(\beta) - g(a))f(x)$$

θα ικανοποιεί τη σχέση $h(a) = h(\beta)$ και τις υποθέσεις του θεωρήματος. Θα υπάρχει λοιπόν $x_0 \in (a,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$(f(\beta) - f(a))g'(x_0) = (g(\beta) - g(a))f'(x_0).$$

Αν υποθέσουμε ότι οι f' και g' δεν έχουν κοινή ρίζα στο (a,β) και ακόμα $g(\beta) - g(a) \neq 0$, οπότε αναγκαστικά $g'(x_0) \neq 0$ (γιατί;), μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω σχέση με τη μορφή

$$\frac{f(\beta) - f(a)}{g(\beta) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Έχουμε λοιπόν δείξει το επόμενο θεώρημα, γνωστό σαν θεώρημα της μέσης τιμής του Cauchy, το οποίο θα μας χρειαστεί αργότερα.

<u>Θεώρημα</u>: "Αν οι f και g ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής και αν επί πλέον οι f' και g' δεν έχουν κοινή ρίζα στο (a,β) και $g(\beta) - g(a) \neq 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in (a,\beta)$

τέτοιο ώστε:

$$\frac{f(\beta)-f(a)}{g(\beta)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad ''$$

Θεωρούμε αυτονόητο ότι ο αναγνώστης θα έχει ήδη επιχειρήσει να δει αν η προϋπόθεση ότι η f' και g' δεν έχουν κοινή ρίζα είναι απαραίτητη. Αν δεν τα έχει καταφέρει ας δοκιμάσει τις συναρτήσεις x^2 και x^3 στο διάστημα $[-1,1]$.
(Αν δεν έχει καν επιχειρήσει, τότε ίσως πρέπει να ξανασκεφτεί αν η επιλογή του να σπουδάσει μαθηματικά ήταν σωστή).

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με μία πολύ σημαντική εφαρμογή του θεωρήματος της μέσης τιμής.

<u>Θεώρημα</u> Αν μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα (a,β) έχει παράγωγο $f'(x)$ ίση με 0 για όλα τα $x\in(a,\beta)$ τότε η f είναι σταθερά στο (a,β)".

<u>Απόδειξη:</u> Παίρνω τυχαίο $x_0\in(a,\beta)$

και εξετάζω τη διαφορά $f(x)-f(x_0)$ για $x\in(a,\beta)$. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x_0<x$. Το θεώρημα της μέσης τιμής μας λέγει ότι υπάρχει $\xi\in(x_0,x)$, τέτοιο ώστε $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$, δηλ. (αφού $f'(\xi)=0$) $f(x)=f(x_0)$, όποιο και να είναι το $x\in(a,\beta)$.

Ένας ισοδύναμος τρόπος να ευφράσουμε το ίδιο αποτέλεσμα είναι να πούμε: "αν δύο συναρτήσεις f και g έχουν την ίδια παράγωγο σε ένα διάστημα, $f'(x)=g'(x)$ για $a<x<\beta$, τότε διαφέρουν κατά μία σταθερά σ' αυτό το διάστημα, δηλ. $f(x)=g(x)+c$ για $a<x<\beta$." (Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η υπόθεση συνεπάγεται $(f-g)'(x)=0$ για $a<x<\beta$.).

4.3.2 Μονότονες συναρτήσεις

Σ' αυτή την υποπαράγραφο τα πεδία ορισμού θα είναι πάντοτε διαστήματα. Πιο συγκεκριμένα θα θεωρήσουμε συναρτήσεις που ορίζονται σε ένα ανοιχτό διάστημα (a,β)

[redacted]. Στις περισσότερες περιπτώσεις είναι δουλειά ρουτίνας η εξέταση των υπολοίπων μορφών διαστημάτων και θα την παραλείπουμε.

Μία συνάρτηση $f:(\alpha,\beta)\to R$ λέγεται αύξουσα (γνήσια αύξουσα) αν $x<y \Rightarrow f(x)\leq f(y)$, $x,y\in(\alpha,\beta)$ ($x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$, $x,y\in(\alpha,\beta)$) και φθίνουσα (γνήσια φθίνουσα) αν $x<y \Rightarrow f(x)\geq f(y)$, $x,y\in(\alpha,\beta)$ ($x<y \Rightarrow f(x)>f(y)$, $x,y\in(\alpha,\beta)$). Μονότονη (γνήσια μονότονη) λέγεται μια συνάρτηση που είναι αύξουσα ή φθίνουσα (γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα).

<u>Παραδείγματα:</u> α) Η συνάρτηση $\sin x$ είναι γνήσια αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ καθώς και στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

β) Η συνάρτηση $x^+(x)=\max(x,0)$ είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αλλά όχι γνήσια αύξουσα (ένας άλλος τρόπος να γράφουμε την x^+ είναι ο $x^+(x)=\frac{1}{2}(|x|+x)$· μαντέψτε και ορίστε την x^-).

γ) Η συνάρτηση $\tan x$ είναι γνήσια αύξουσα σε κάθε διάστημα της μορφής $\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$.

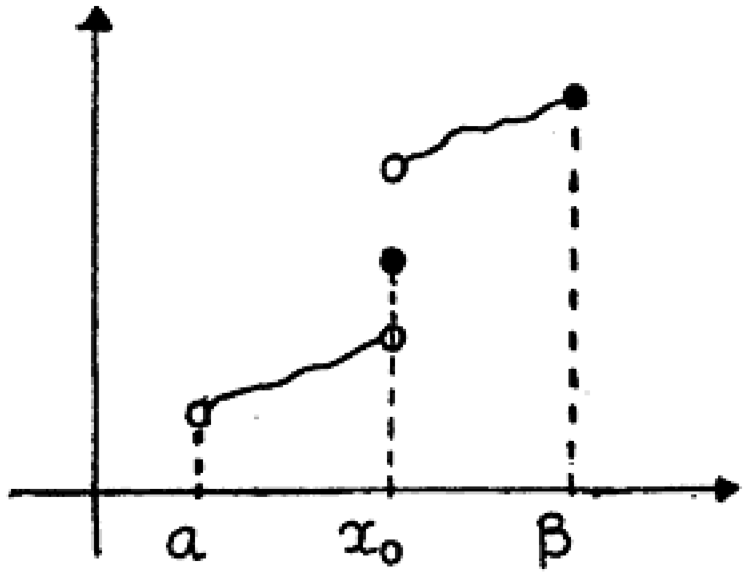
δ) Η συνάρτηση $\cos x$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $(0,\pi)$.

ε) Η συνάρτηση $-[x]$ είναι φθίνουσα αλλά όχι γνήσια στο $\mathbb{R}$.

Μία μονότονη συνάρτηση δεν είναι υποχρεωτικά συνεχής (παράδειγμα $[x]$). Ας δούμε τι είδους ασυνέχειες παρουσιάζει. Θα περιοριστούμε σε αύξουσες συναρτήσεις. Η μελέτη των φθινουσών είναι τελείως ανάλογη (αν θέλουμε μάλιστα μπορούμε να ανάγουμε τη μία περίπτωση στην άλλη παρατηρώντας ότι "η f είναι αύξουσα αν και μόνο αν η $-f$ είναι φθίνουσα).

Έστω λοιπόν $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ μια αύξουσα συνάρτηση και $\alpha<x_0<\beta$. Το σύνολο $\{f(x): \alpha<x<x_0\}$ είναι προφανώς μη κενό και φραγμένο προς τα πάνω διότι π.χ. το $f(x_0)$ είναι ένα άνω φράγμα του. Υπάρχει λοιπόν το $\sup\{f(x): \alpha<x<x_0\}$.

Αν γράψουμε γ για αυτό το sup ισχυριζόμαστε (κάτι που είναι φανερό διαισθητικά) ότι $\gamma = f(x_0-)$. Πραγματικά για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x_1 < x_0$ τέτοιο ώστε $f(x_1) > \gamma - \varepsilon$ (αλλιώς το $\gamma - \varepsilon$ θα ήταν άνω φράγμα μικρότερο από το supremum). Τότε όμως



Σχ. 31

θα έχουμε και $f(x) > \gamma - \varepsilon$ για κάθε x με $x_1 < x$. Θέτοντας λοιπόν $\delta = x_0 - x_1$ θα έχουμε $0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow \gamma - \varepsilon < f(x) \leqq \gamma < \gamma + \varepsilon$, που αποδεικνύει ότι $\gamma = f(x_0-)$. Τελείως παρόμοια δείχνουμε ότι $\gamma' = \inf\{f(x) : x_0 < x < \beta\} = f(x_0+)$. Η ύπαρξη των δύο πλευρικών ορίων $f(x_0+)$ και $f(x_0-)$ δείχνει ότι αν το x_0 δεν είναι σημείο συνεχείας θα είναι ασυνέχεια α' είδους και μάλιστα με πήδημα $f(x_0+) - f(x_0-) =$
$= \inf\{f(x) : x > x_0\} - \sup\{f(x) : x < x_0\}$.

Ας συνοψίσουμε αυτά τα αποτελέσματα σε ένα θεώρημα.

<u>Θεώρημα</u>: "Αν η f είναι αύξουσα (φθίνουσα) στο (a, β), τότε, αν είναι ασυνεχής σε κάποιο x_0, η ασυ-

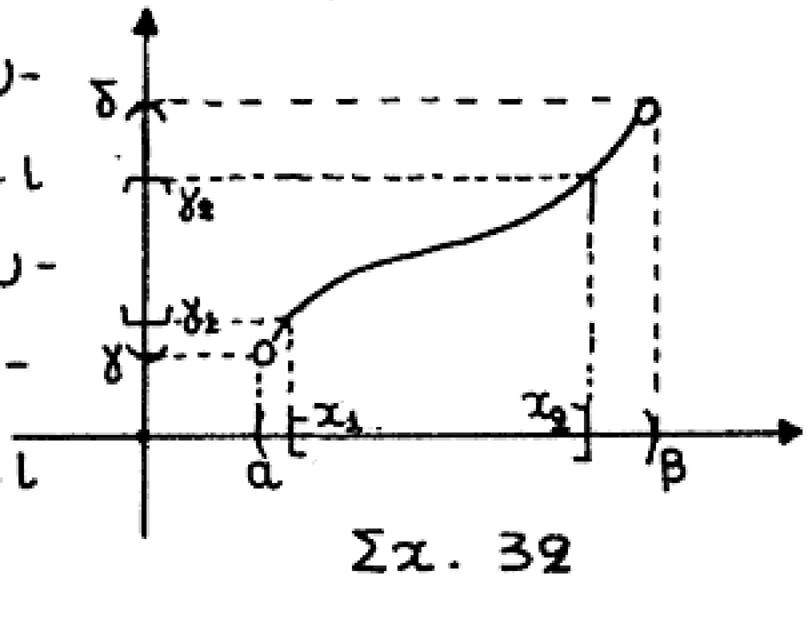
νέχειά της θα είναι α' είδους. Επί πλέον θα έχουμε:

$f(x_0-) \leqq f(x_0) \leqq f(x_0+)$ $\left(f(x_0-) \geqq f(x_0) \geqq f(x_0+)\right)$

Ας θεωρήσουμε τώρα μια αύξουσα συνάρτηση f ορισμένη στο (α,β) και ας γράψουμε: $\gamma = \inf\{f(x): \alpha<x<\beta\}$, $\delta = \sup\{f(x): \alpha<x<\beta\}$. Αν το σύνολο $\{f(x): \alpha<x<\beta\}$ δεν είναι φραγμένο προς τα κάτω (πάνω) τότε το γ (δ) σημαίνει $-\infty$ $(+\infty)$. Στην οποιαδήποτε περίπτωση οι τιμές της $f(x)$, $\alpha<x<\beta$, βρίσκονται στο διάστημα $[\gamma,\delta]$ (στην περίπτωση που το γ ή το δ ή και τα δύο είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε γράφουμε $(-\infty,\delta]$, $[\gamma,\infty)$ ή $(-\infty,\infty)$). Στην περίπτωση που η f είναι γνήσια αύξουσα μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $[\gamma,\delta]$ με (γ,δ). Πραγματικά αν π.χ. $f(x_0)=\gamma$ για κάποιο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τότε παίρνοντας π.χ. $x_1 = \dfrac{\alpha+x_0}{2}$ θα έχουμε

$f(x_1) < f(x_0) = \gamma$, διότι $x_1 < x_0$, πού είναι άτοπο.

" Ας υποθέσουμε τώρα ότι η f είναι όχι μόνο γνήσια αύξουσα αλλά και συνεχής. Ισχυρίζομαι



Σχ. 32

ότι για κάθε $y \in (\gamma, \delta)$ υπάρχει ακριβώς ένα $x \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x)=y$."

Πραγματικά, επειδή $y>\gamma$ και $\gamma=\inf\{f(x): \alpha<x<\beta\}$ θα υπάρχει $x_1 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=\gamma_1<y$ και όμοια θα υπάρχει $x_2 \in (\alpha,\beta)$, αναγκαστικά $x_2>x_1$, τέτοιο ώστε $f(x_2)=\gamma_2>y$. Το αποτέλεσμά μας τώρα είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος της ενδιάμεσης τιμής εφαρμοσμένου στη συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Ένας άλλος τρόπος να εκφράσουμε το αποτέλεσμα που βρήκαμε είναι ο εξής: "Αν η f είναι γνήσια μονότονη και συνεχής στο (α,β), τότε έχει αντίστροφο g στο (γ,δ), δηλ.
$y=f(x) \Leftrightarrow x=g(y)$, ή $g(f(x))=x$ και $f(g(y))=y$, για όλα τα $x \in (\alpha,\beta)$ και $y \in (\gamma,\delta)$".

Ισχύει και κάτι παραπάνω: "Η g είναι γνήσια αύξουσα και συνεχής στο (γ,δ)".

Έστω $\gamma<y_1<y_2<\delta$. Υπάρχουν x_1, x_2 τέτοια ώστε $y_1=f(x_1)$ και $y_2=f(x_2)$ και φυσικά $x_1<x_2$ (αλλιώς θα είχαμε $y_1 \geq y_2$) δηλ. $g(y_1)<g(y_2)$.

Η g λοιπόν είναι γνήσια αύξουσα στο (γ,δ) και επομένως, αν δεν ήταν συνεχής, σε ένα σημείο $y_0 \in (\gamma,\delta)$, τότε ή $\lim\limits_{y\to y_0-} g(y) < g(y_0)$ ή $\lim\limits_{y\to y_0+} g(y) > g(y_0)$.

Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $g(y_0-) < g(y_0)$. Θα έχουμε τότε: $\gamma < y < y_0 \Rightarrow \alpha < g(y) < g(y_0-) < g(y_0)$ και επομένως:

$\gamma < y < y_0 \Rightarrow f(g(y)) < f(g(y_0-)) < f(g(y_0))$, δηλ.

$\gamma < y < y_0 \Rightarrow y < f(g(y_0-)) < y_0$,

το οποίο προφανώς είναι άτοπο (πάρτε π.χ. $y = \frac{1}{2}\Big(y_0 + f(g(y_0-))\Big)$)

Ας προχωρήσουμε ένα βήμα παραπέρα και ας εξετάσουμε γνήσια μονότονες και συνεχείς συναρτήσεις f που είναι παραγωγίσιμες σ' ένα σημείο x_0. Ισχύει το εξής θεώρημα:

<u>Θεώρημα</u>: α) Αν η f είναι γνήσια μονότονη και συνεχής στο (α,β) και παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) \neq 0$, τότε η αντίστροφή της g είναι παραγωγίσιμη στο $y_0 = f(x_0)$ και $g'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}$. β) Αν $f'(x_0) = 0$,

τότε, $g'(y_0)=+\infty$ αν η g είναι αύξουσα, και $g'(y_0)=-\infty$ αν η g είναι φθίνουσα.

<u>Απόδειξη</u>: Θα δείξουμε μόνο το α. Η απόδειξη του β είναι παρόμοια (άσκηση).

Ιδού κατ' αρχήν μία πολύ συνηθισμένη, και λανθασμένη απόδειξη. Αν γράψουμε $y=f(x)$ τότε $x=g(y)$ και χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του Leibni~~t~~z για την παράγωγο: $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ δηλ. $g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$

Φυσικά το λάθος βρίσκεται στο ότι χρησιμοποιήσαμε το σύμβολο $\frac{dy}{dx}$ σαν πηλίκο ενώ δεν είναι παρά όριο πηλίκων. Δεν είναι δύσκολο πάντως να διορθώσουμε τα πράγματα.

Η ύπαρξη της $f'(x_0)$ σημαίνει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\to f'(x_0)\ ,\ x\to x_0.$$

Επειδή $f'(x_0)\neq 0$ θα έχουμε επίσης

$$\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}\to\frac{1}{f'(x_0)}\ ,\ x\to x_0\ .$$

Για κάθε $\varepsilon > 0$ θα υπάρχει λοιπόν $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon .$$

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η f είναι γνήσια αύξουσα.

Ας γράψουμε $y_1 = f(x_0 - \frac{\delta}{2}) < f(x_0) = y_0 < f(x_0 + \frac{\delta}{2}) = y_2$ και $\eta = \min\{y_0 - y_1, y_2 - y_0\}$.

Για κάθε y με $y_0 - \eta < y < y_0 + \eta$ θα έχουμε $g(y) \in (x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2})$, δηλ. $y = f(x)$ για κάποιο x (συγκεκριμένα το $g(y)$) στο $(x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2})$. Έχουμε λοιπόν βρει ότι:

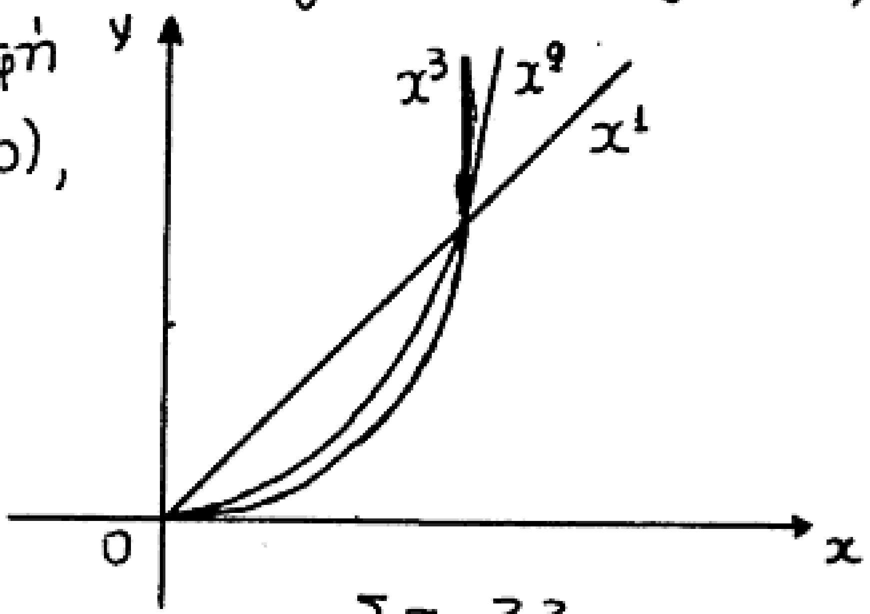
$$|y - y_0| < \eta \Rightarrow \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$ για κάποιο x με $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$, και επομένως

$$|y - y_0| < \eta \Rightarrow \left| \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon ,$$

που συμπληρώνει την απόδειξη.

<u>Παράδειγμα</u>: $f(x)=x^{n}$, $n\in\mathbb{N}$, $x>0$

Είναι φανερό ότι η x^n είναι γνήσια αύξουσα, άρα υπάρχει η αντίστροφή της g, στο διάστημα $(0,\infty)$, διότι $\inf\limits_{x>0} x^n=0$ και $\sup\limits_{x>0} x^n=\infty$.



Σχ. 33

Θα έχουμε λοιπόν

$g(y)=x \Leftrightarrow x^n=y$, $0<y<\infty$.

Ως συνήθως γράφουμε $y^{1/n}$ αντί $g(y)$ και $y^{m/n}$ για τη σύνθετη συνάρτηση $(g(y))^m$, $m\in\mathbb{Z}$.

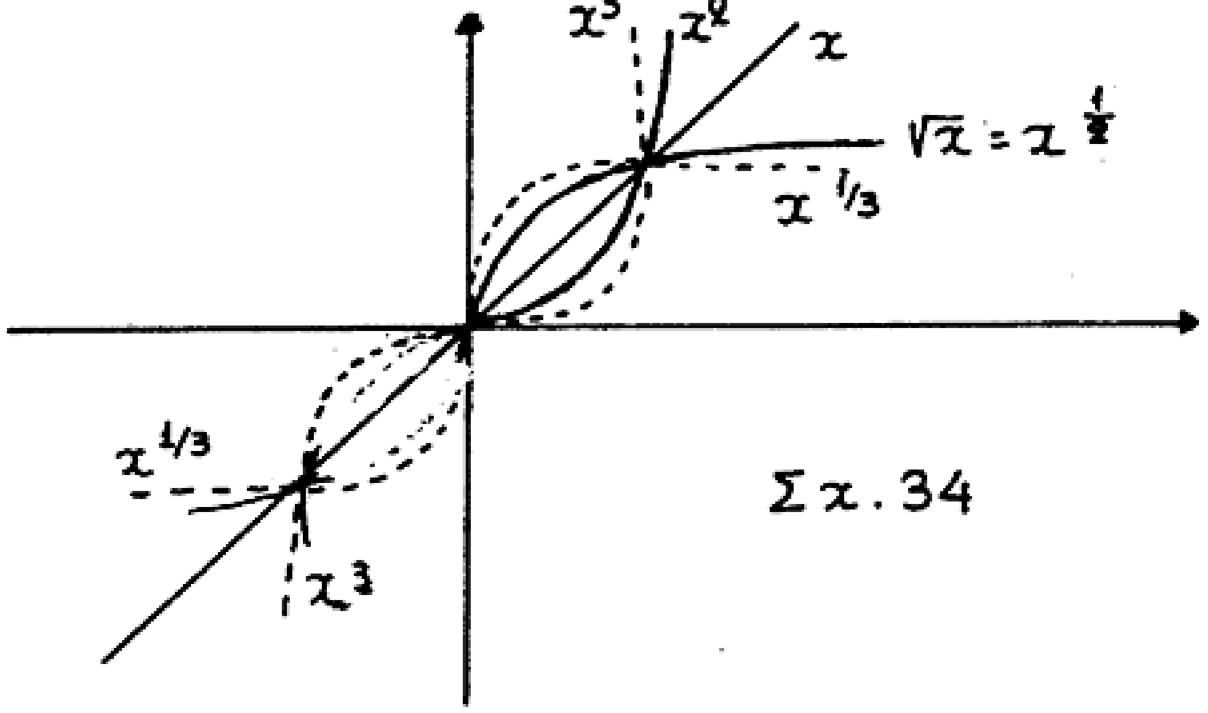
Το προηγούμενο αποτέλεσμα μας δίνει την παράγωγο της $g(y)$. Πραγματικά αν $x^n=y$ τότε:

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{nx^{n-1}}=\frac{1}{n(y^{\frac{1}{n}})^{n-1}}=$$

$$=\frac{1}{n}\,y^{-\frac{n-1}{n}}=\frac{1}{n}\,y^{\frac{1}{n}-1}$$ δηλ. ο τύπος $(x^n)'=nx^{n-1}$ ισχύει και για εκθέτες της μορφής $\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$. Έχοντας το αποτέλεσμα αυτό και τον ορισμό του y^q, $q\in\mathbb{Q}$, που μόλις δώσαμε είναι πολύ εύκολο να δείξου-

με ότι " αν $f(x)=x^q$, $x>0$, $q\in\mathbb{Q}$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη και $f'(x)=qx^{q-1}$ ".

Ο αναγνώστης καλείται να συμπληρώσει ορισμένα "κενά" στο παραπάνω παράδειγμα. Π.χ. γράφοντας x^q, $q\in\mathbb{Q}$, $x>0$, υπονοούμε ότι η συνάρτηση ορίζεται καλά, δηλ. αν $q=\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$, $m, m'\in\mathbb{Z}$, $n, n'\in\mathbb{N}$ τότε $(x^{\frac{1}{n}})^m$ και $(x^{\frac{1}{n'}})^{m'}$ δίνουν την ίδια συνάρτηση. Επίσης αν το n είναι περιττό τότε η $x^{\frac{1}{n}}$ ορίζεται για όλα τα x και έχει παράγωγο για όλα τα $x\neq 0$ (για $x=0$ η παράγωγος είναι $+\infty$ αν $n>1$) Για $n=1$ φυσικά η παράγωγος υπάρχει για όλα τα x. Είναι επίσης εύκολο να δειχτεί ότι οι συνήθεις ιδιότητες των δυνάμεων ($x^{\alpha+\beta}=x^{\alpha}\cdot x^{\beta}$, $(x^{\alpha})^{\beta}=x^{\alpha\cdot\beta}$, α,β ρητοί) ισχύουν.



Σχ. 34

Ας δείξουμε π.χ. ότι $x^{a+\beta}=x^a\cdot x^\beta$, όπου υποθέτουμε $x>0$, $a=\frac{m_1}{n_1}$, $\beta=\frac{m_2}{n_2}$, $m_1, m_2\in\mathbb{Z}$, $n_1, n_2\in\mathbb{N}$. Επειδή η συνάρτηση $f(x)=x^{n_1n_2}$ είναι γνήσια αύξουσα αρκεί να δείξουμε ότι $(x^{a+\beta})^{n_1n_2}=(x^a x^\beta)^{n_1n_2}$ Χρησιμοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων για ακέραιους εκθέτες και τον ορισμό του x^q, $q\in\mathbb{Q}$, έχουμε $(x^{a+\beta})^{n_1n_2}=$

$$=\left(x^{\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2}}\right)^{n_1n_2}=x^{m_1n_2+m_2n_1}=$$

$$=x^{m_1n_2}\cdot x^{m_2n_1}=(x^{m_1})^{n_2}(x^{m_2})^{n_1}=$$

$$=\left(x^{\frac{m_1}{n_1}}\right)^{n_1n_2}\left(x^{\frac{m_2}{n_2}}\right)^{n_1n_2}=(x^a)^{n_1n_2}(x^\beta)^{n_1n_2}=$$

$=(x^a\cdot x^\beta)^{n_1n_2}$, που αποδεικνύει τη σχέση $x^{a+\beta}=x^a\cdot x^\beta$.

Μια γενική απλή παρατήρηση για την αντίστροφη g μιας γνήσια μονότονης συνάρτησης f είναι ότι "τα γραφήματα των f και g είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο" (των συναρτήσεων x, x^2, x^3 φαινονται στο σχήμα 34).

Κλείνουμε την παράγραφο με ένα απλό και σημαντικό θεώρημα:

<u>Θεώρημα</u>: α) Αν η f είναι αύξουσα (φθίνουσα) και παραγωγίσιμη στο (α,β) τότε $f'(x)\geqslant 0$ $(f'(x)\leqslant 0)$ για $\alpha<x<\beta$.

β) Αν η f είναι παραγωγίσιμη και $f'(x)\geqslant 0$ $(f'(x)>0)$ για $\alpha<x<\beta$, τότε η f είναι αύξουσα (γνήσια αύξουσα) στο (α,β). Ανάλογα ισχύουν για φθίνουσες (γνήσια φθίνουσες) συναρτήσεις.

<u>Απόδειξη</u>: α) Αν η f είναι αύξουσα, τότε τα πηλίκα διαφορών $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ είναι πάντοτε $\geqslant 0$ και επομένως $f'(x_0)\geqslant 0$ για κάθε $x_0\in(\alpha,\beta)$

β) Έστω $\alpha<x_1<x_2<\beta$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα της μέσης τιμής στο $[x_1,x_2]$ έχουμε $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\,f'(\xi)$ για κάποιο $\xi\in(x_1,x_2)$ και επομένως $(x_2>x_1$ $f'(\xi)\geqslant 0)$ $f(x_2)\geqslant f(x_1)$. Αν $f'(\xi)>0$ τότε $f(x_2)>f(x_1)$.

<u>Παραδείγματα</u>: α) Η συνάρτηση $f(x)=x^2$ είναι αύξουσα στο διάστημα $(0,\infty)$ και φθίνουσα στο $(-\infty,0)$. Η παράγωγός της είναι $2x$ και είναι πραγματικά >0 για $x>0$ και <0 για $x<0$.

β) Η συνάρτηση $f(x)=x^3$ είναι αύξουσα και μάλιστα γνήσια σε όλο το $\mathbb{R}$, παρόλο που η παράγωγός της $2x^2$ μηδενίζεται για $x=0$. (Είναι βέβαια $\geqslant 0$ για όλα τα x).

γ) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x^2 & x\geqslant 0 \end{cases}$$

Η $f(x)$ είναι αύξουσα στο $(-\infty,\infty)$ (όχι γνήσια) και $f'(x)\geqslant 0$, $-\infty<x<\infty$ (βλ. παραδ. εις § 4.1.1).

4.3.3 <u>Οι συναρτήσεις a^x, x^a, log</u>

Έστω $a>0$. Το σύμβολο a^n, $n\in\mathbb{N}$, ορίζεται σαν το γινόμενο n παραγόντων ίσων με a και το σύμβολο $a^{\frac{m}{n}}$, $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$, σαν ο (μοναδικός) θετικός αριθμός β για τον οποίο ισχύει $\beta^n=a^m$. Με τον τρόπο αυτό ορίζεται λοιπόν η συνάρτηση a^q, $q\in\mathbb{Q}$, και όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο ικανοποιεί τις αναμενόμενες ιδιότητες των δυνάμεων.

Θέλουμε τώρα να "επεκτείνουμε" τον παραπάνω ορισμό έτσι ώστε να ορίσουμε μία συνάρτηση $f(x)$, που θα συμβολίζουμε πάλι a^x, ορισμένη για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ και τέτοια ώστε $f(q) = a^q$ αν $q \in \mathbb{Q}$.

Αυτό φυσικά θα μπορούσε να γίνει κατά πολλούς τρόπους, θέτοντας π.χ. $f(x) = 0$ για άρρητα x και $f(q) = a^q$, $q \in \mathbb{Q}$, αλλά δεν είναι όλες αυτές οι επεκτάσεις επιθυμητές. Π.χ. θέλουμε η "επέκταση" που θα βρούμε να ικανοποιεί τις ιδιότητες των δυνάμεων. Θα δούμε σε λίγο ότι αυτό μπορούμε να το πετύχουμε αν απαιτήσουμε α) η f να είναι συνεχής και β) $f(q) = a^q$, $q \in \mathbb{Q}$.

Αν υποθέσουμε προς στιγμήν ότι υπάρχει τέτοια f, τότε ο ορισμός της συνέχειας κατά Heine μας λέγει ότι $f(q_n) \to f(q)$, δηλ. $a^{q_n} \to f(q)$ για κάθε ακολουθία ρητών q_n με την ιδιότητα $q_n \to q$. Οδηγούμαστε λοιπόν στον εξής ορισμό:

<u>Ορισμός</u>: Αν $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ και

$q_n \to x$, $q_n \in \mathbb{Q}$, τότε ορίζουμε
$a^x = \lim a^{q_n}$".

Για να είναι "καλός" αυτός ο ορισμός πρέπει:

α) Να υπάρχει το $\lim a^{q_n}$, και

β) Αν $q_n \to x$ και $q_n' \to x$, $q_n, q_n' \in \mathbb{Q}$, τότε $\lim a^{q_n} = \lim a^{q_n'}$.

Και οι δύο αυτές ιδιότητες μπορούν να δειχτούν εύκολα με τη βοήθεια της πρότασης :

" Αν $a>0$ και $q_n \to 0$, $q_n \in \mathbb{Q}$, τότε $a^{q_n} \to 1$ ".

Η περίπτωση $a=1$ είναι τετριμμένη και η περίπτωση $a<1$ ανάγεται εύκολα στην $a>1$ (πώς;). Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε $a>1$. Παρατηρούμε πρώτα ότι η υπόθεση $a>1$ συνεπάγεται (τετριμμένο)

$q > q' \Rightarrow a^q > a^{q'}$ και επομένως $(a^{|q_n|})^{-1} = a^{-|q_n|} \leqq a^{q_n} \leqq a^{|q_n|}$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $a^{|q_n|} \to 1$. Γράφουμε

$|q_n| = \dfrac{A_n}{\beta_n}$ και $\beta_n = \Pi_n A_n + \upsilon_n$ (αλγόριθμος της διαίρεσης) με $A_n, \beta_n, \Pi_n, \upsilon_n \geqslant 0$

και $0 \leq \upsilon_n < A_n$ και έχουμε:

$$a^{|q_n|} = a^{\frac{1}{\Pi_n + \frac{\upsilon_n}{A_n}}} \leq a^{\frac{1}{\Pi_n}}$$

Θέτουμε λοιπόν $a^{\frac{1}{\Pi_n}} = 1 + \gamma_n$, δηλ. $a = (1+\gamma_n)^{\Pi_n}$ $\gamma_n \geq 0$, και αρκεί να δείξουμε ότι $\gamma_n \to 0$. Από τον τύπο του διωνύμου του Newton έχουμε $a = (1+\gamma_n)^{\Pi_n} \geq 1 + \Pi_n \gamma_n$ οπότε και $0 \leq \gamma_n \leq \frac{a-1}{\Pi_n}$. Η σχέση $B_n = \Pi_n A_n + \upsilon_n$, $0 \leq \upsilon_n < A_n$ δίνει αμέσως $\Pi_n = \left[\frac{B_n}{A_n}\right]$ που συγκλίνει στο $+\infty$, άρα $\frac{a-1}{\Pi_n} \to 0$ και επομένως $\gamma_n \to 0$.

Γυρνάμε τώρα στα α), β). Η σύγκλιση της q_n, $q_n \to x$, συνεπάγεται ότι η q_n είναι φραγμένη και επομένως το $\lim a^{q_n}$ είναι $\neq 0$ (γιατί;) και έτσι $\lim \frac{a^{q_n'}}{a^{q_n}} = \lim a^{q_n' - q_n} = 1$, δηλ. $\lim a^{q_n} = \lim a^{q_n'}$ για κάθε q_n' με $q_n' \to x$.

Η παρατήρηση αυτή αποδεικνύει το β) κα δείχνει ότι για να δείξουμε το α) αρκεί να το δείξουμε για μία συγκεκριμένη ακολουθία q_n με $q_n \to x$.

Διαλέγουμε μία q_n αύξουσα, οπότε η a^{q_n} είναι αύξουσα και (επειδή π.χ. $a^{q_n} \leq a^{[x]+1}$) φραγμένη, άρα συγκλίνουσα. Μένει να δείξουμε ότι μπορούμε να διαλέξουμε την q_n αύξουσα. Παίρνουμε ένα ρητό q_1 με $x-1<q_1<x$, ένα ρητό $q_2>q_1$ με $x-\frac{1}{2}<q_2<x$ κ.ο.κ. Το γεγονός ότι οι ρητοί είναι πυκνοί στους πραγματικούς δείχνει ότι μπορούμε να σχηματίσουμε μία τέτοια ακολουθία, η οποία από τον τρόπο κατασκευής της θα είναι αύξουσα (Η δεκαδική παράσταση του x π.χ. δίνει άμεσα μια τέτοια ακολουθία).

Έχουμε λοιπόν τώρα ένα ακριβή ορισμό του συμβόλου a^x και στη συνέχεια θα μελετήσουμε τις ιδιότητές του, καθώς και άλλες συναρτήσεις (x^a, $\log_a x$) που συνδέονται με την συνάρτηση a^x που ονομάζεται ε κ θ ε τ ι κ ή με βάση a.

<u>Παρατήρηση</u>: Ο τρόπος που ακολουθούμε για να ορίσουμε την a^x είναι αναμφισβήτητα πολύ κοντά στη διαισθητική εικόνα που έχουμε στο μυαλό μας (π.χ αν θέλαμε να βρούμε το $2^{\pi}=2^{3,14159\ldots}$, θα το προσεγ-

γίζαμε με $2^3, 2^{3,1}, 2^{3,14}, 2^{3,141}, 2^{3,1415}, 2^{3,14159},\ldots$) παρά τις κάποιες τεχνικές δυσκολίες που παρουσιάζει. Θα δώσουμε στο επόμενο κεφάλαιο έναν "οικονομικότερο" τρόπο ορισμού με τη βοήθεια του ολοκληρώματος.

4.3.3.1 Η εκθετική συνάρτηση a^x, $a>0$

Οι ιδιότητες $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$, $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$, $(a\cdot\beta)^x = a^x\cdot\beta^x$, $a>0$, $\beta>0$, $x,y\in\mathbb{R}$ είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού. Π.χ. $(a\beta)^x = \lim\,(a\cdot\beta)^{q_n} = \lim\,(a^{q_n}\cdot\beta^{q_n}) =$ $= (\lim a^{q_n})(\lim \beta^{q_n}) = a^x\cdot\beta^x$, όπου q_n μια ακολουθία ρητών με $q_n\to x$.

Αν $a=1$, $a^x=1$ για όλα τα x και αν $a<1$ τότε $a^x = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$ με $\frac{1}{a}>1$. Για να μελετήσουμε λοιπόν συνέχεια, παραγωγισιμότητα κ.τ.λ. αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση $a>1$.

Υποθέτουμε λοιπόν $a>1$. Αν $x-y>0$ τότε υπάρχει ακολουθία $q_n\in\mathbb{Q}$, $q_0\in\mathbb{Q}$ με $q_n\geq q_0>0$ για όλα τα n, τέτοια ώστε $q_n\to x-y$ (γιατί;) και επομένως $a^x/a^y = a^{x-y} \geq a^{q_0} > 1$, δηλ. η a^x είναι αύξουσα αν $a>1$ (αν $a<1$ τότε η a^x είναι φθίνουσα).

Στον προηγούμενο συλλογισμό χρησιμοποιήσαμε την μονοτονία της a^y, $y \in \mathbb{Q}$. Πού χρησιμοποιήθηκε; πώς αποδεικνύεται;

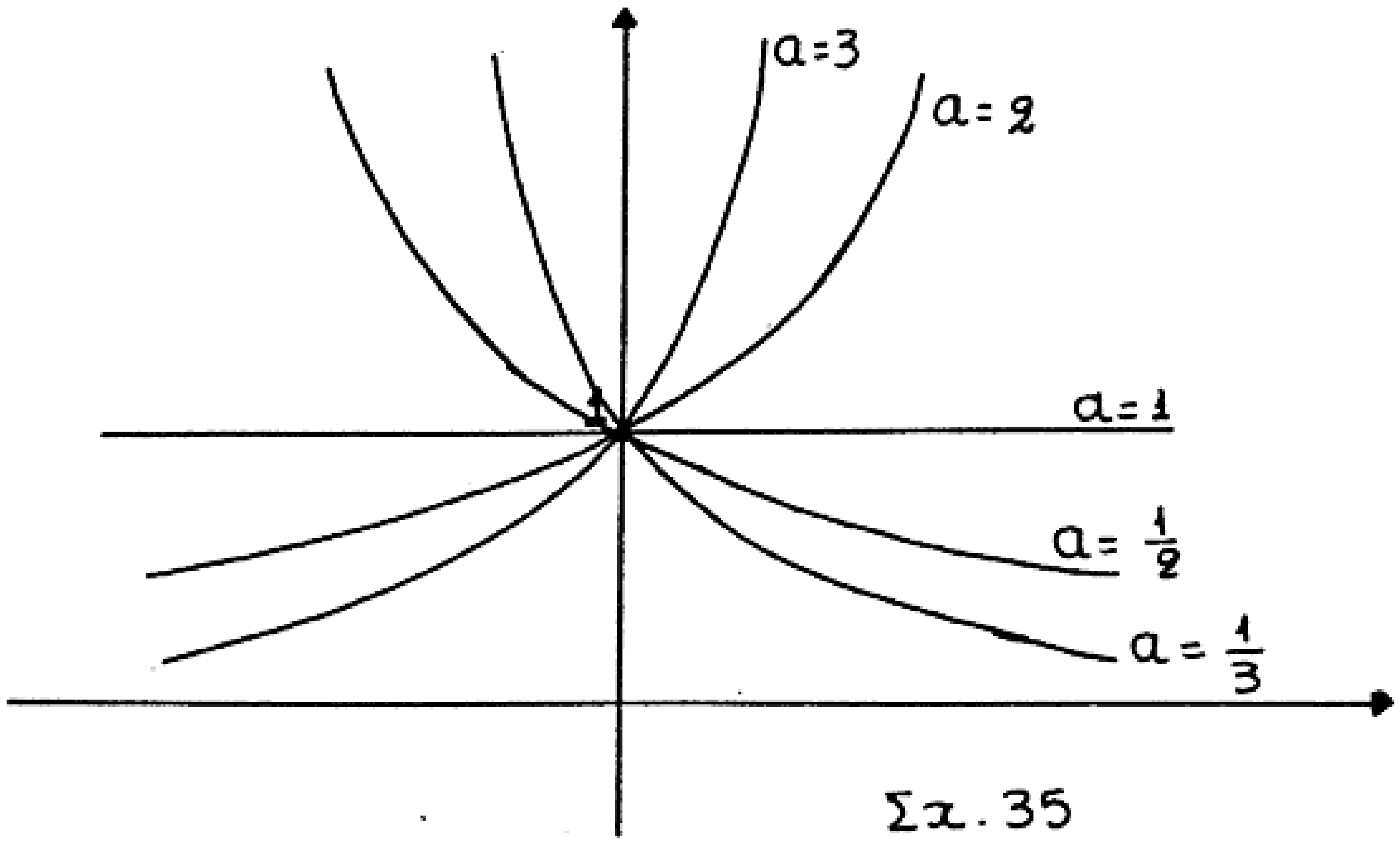
"Η a^x είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$".

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Πρέπει να δείξουμε $\lim a^x = a^{x_0}$, $x \to x_0$ δηλ. $\lim (a^x - a^{x_0}) = $
$= \lim a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1) = a^{x_0} \lim (a^{x-x_0} - 1) = 0$, $x \to x_0$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\lim a^x = 1$, $x \to 0$ (δηλ. η συνέχεια για $x=0$ συνεπάγεται συνέχεια παντού!)

<u>Απόδειξη</u>: Στην αρχή της παραγράφου δείξαμε ότι $q_n \to 0 \Rightarrow a^{q_n} \to 1$ $(q_n \in \mathbb{Q})$. Έχουμε επομένως $a^{\frac{1}{n}} \to 1$.

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $0 < a^{1/n_0} - 1 < \varepsilon$ και επειδή η a^x είναι αύξουσα $0 < x < \frac{1}{n_0} \Rightarrow 0 < a^x - 1 < a^{\frac{1}{n_0}} - 1 < \varepsilon$.

Δείξαμε λοιπόν ότι $\lim a^x = 1$, $x \to 0^+$ και, επειδή $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, θα έχουμε επίσης $\lim a^x = 1$, $x \to 0^-$, δηλ. $\lim a^x = 1$, $x \to 0$.



Σχ. 35

Στο σχήμα 35 φαίνονται (σχηματικά) οι περιπτώσεις $a = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$.

"Η $f(x) = a^x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$".

Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h}$$

Επομένως αν υπάρχει το $\lim\limits_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$, δηλαδή η παράγωγος της a^x για $x=0$, τότε υπάρχει η παράγωγος για οποιοδήποτε x και ισχύει $(a^x)' = f'(0)\,a^x$, δηλ. η παράγωγος της a^x είναι η ίδια η a^x πολλαπλασιασμένη επί μία σταθερά (!).

Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι

$$\frac{a^{-h}-1}{-h} = \frac{1-a^h}{-ha^h} = a^{-h}\frac{a^h-1}{h}$$

και $a^{-h} \to 1$, $h \to 0$. Αρκεί επομένως να δείξουμε ότι το $\lim\limits_{h\to 0+} \frac{a^h-1}{h}$ υπάρχει.

Ισχυρίζομαι ακόμη ότι αρκεί να πάρουμε $h=\frac{1}{\kappa}$, $\kappa=1,2,\ldots$, δηλ. να δείξουμε ότι η **ακολουθία** $\kappa(a^{\frac{1}{\kappa}}-1)$ **συγκλίνει**.

Ας αποδείξουμε πρώτα τον τελευταίο ισχυρισμό.

Γράφουμε $y_\kappa = \kappa(a^{\frac{1}{\kappa}}-1)$ οπότε θα έχουμε

$$a = \left(1+\frac{y_\kappa}{\kappa}\right)^\kappa = 1+y_\kappa+\frac{\kappa(\kappa-1)}{2}\left(\frac{y_\kappa}{\kappa}\right)^2+\cdots+\frac{\kappa(\kappa-1)\cdots(\kappa-\lambda+1)}{\lambda!}\left(\frac{y_\kappa}{\kappa}\right)^\lambda+$$

$$+\cdots+\frac{\kappa(\kappa-1)\cdots(\kappa-(\kappa-1))}{\kappa!}\left(\frac{y_\kappa}{\kappa}\right)^\kappa =$$

$$= 1+y_\kappa+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)y_\kappa^2+\cdots+\frac{1}{\lambda!}\left[\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda-1}{\kappa}\right)\right]y_\kappa^\lambda+\cdots$$

$$+\frac{1}{\kappa!}\left[\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)\cdots\left(1-\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)\right]y_\kappa^\kappa .$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι η y_k είναι φθίνουσα. Πραγματικά αν για κάποιο κ είχαμε $y_k < y_{k+1}$, τότε θα είχαμε και $a = 1 + y_k + \cdots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{k})\cdots$

$$\cdots(1-\frac{k-1}{k})\,y_k^k < 1 + y_{k+1} + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{k+1})\,y_{k+1}^2 + \cdots$$

$$+\frac{1}{k!}\left[(1-\frac{1}{k+1})\cdots(1-\frac{k-1}{k+1})\right]y_{k+1}^k +$$

$$+\frac{1}{(k+1)!}\left[(1-\frac{1}{k+1})\cdots(1-\frac{k}{k+1})\right]y_{k+1}^{k+1} = a$$

που είναι φυσικά άτοπο.
Η y_k είναι λοιπόν φθίνουσα και φραγμένη πρός τα κάτω ($\geqslant 0$) άρα συγκλίνει.

As δείξουμε τώρα, για να τελειώσουμε την απόδειξη, ότι $\frac{1}{h}(a^h-1)$ συγκλίνει για $h \to 0^+$.

Γράφουμε $k = \left[\frac{1}{h}\right]$ και έχουμε

$$\frac{a^{\frac{1}{k+1}}-1}{\frac{1}{k}} < \frac{a^h-1}{h} < \frac{a^{\frac{1}{k}}-1}{\frac{1}{k+1}}, \text{ διότι } k \leqq \frac{1}{h} < k+1,$$

$$\text{ή } \frac{k}{k+1}\left\{(k+1)\left(a^{\frac{1}{k+1}}-1\right)\right\} < \frac{a^h-1}{h} < \frac{k+1}{k}\left\{k\left(a^{\frac{1}{k}}-1\right)\right\}$$

απ' όπου εύκολα έπεται ότι η $\frac{a^h-1}{h}$ συγκλίνει, όταν $h \to 0^+$.

4.3.3.2 Ο αριθμός e

Η προηγούμενη απόδειξη περιέχει και ένα ακόμη ενδιαφέρον συμπέρασμα: Η ακολουθία $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ συγκλίνει.

Πραγματικά

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left[\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{k}\right)\right]$$

και επομένως $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}$ δηλ. η $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ είναι αύξουσα. Επίσης

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k} =$$

$$= 1+1+1-\frac{1}{2^{k+1}} < 3,$$

οπότε η ακολουθία $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ σαν αύξουσα και φραγμένη συγκλίνει. Το

$$\lim_{v\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \text{ συμβολίζεται}$$

με e και ισούται προσεγγιστικά με 2,718281828459045235360287...

Ένας άλλος χρήσιμος τύπος για τον αριθμό e προκύπτει από την ανισότητα:

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \leqq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}$$

Αν λοιπόν γράψουμε $\beta_k = 1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{k!}$ τότε η β_k θα είναι αύξουσα και φραγμένη (ίδια απόδειξη όπως πριν) επομένως θα συγκλίνει και θα έχουμε:

$$e \leqq \lim\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{k!}\right)$$

Από την άλλη μεριά για οποιοδήποτε φυσικό m, αν $k>m$, θα έχουμε

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \geqslant 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left[\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{k}\right)\right]$$

και αφήνοντας το k να τείνει στο ∞,

$$e \geqslant 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!} = \beta_m .$$

Η διπλή ανισότητα $\beta_m \leqq e \leqq \lim \beta_m$ για όλα τα m δείχνει ότι $e = \lim \beta_m$.

Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω αποτελέσματα σε ένα θεώρημα:

<u>Θεώρημα</u>: Οι ακολουθίες $a_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ και $\beta_k = 1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{k!}$ είναι αύξουσες, $a_k \leqq \beta_k$, φραγμένες και έχουν το ίδιο όριο

που συμβολίζεται με το γράμμα e ($\simeq 2,718281\ldots$).

Ο αριθμός αυτός είναι μία από τις σημαντικότερες σταθερές που εμφανίζονται στα Μαθηματικά.

Είναι ενδιαφέρον να δώσουμε και μία ακόμη παράσταση του e, αυτή τη φορά με μία φθίνουσα ακολουθία.

$$e = \lim\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} \text{ και η } \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

φθίνει.

Η σχέση $e = \lim\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$ είναι σχεδόν προφανής:

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\left(1+\frac{1}{k}\right) \to e\cdot 1 = e$$

Για να δείξουμε ότι η $\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$ είναι φθίνουσα, πρέπει να δείξουμε

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} < \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k}, \quad k = 1,2,3,\ldots \text{ δηλ.}$$

$$(k+1)^{k+1}(k-1)^{k} < k^{2k+1} \quad \text{ή}$$

$$(k^2-1)^{k}(k+1) < k^{2k+1} \quad \text{ή}$$

$$1+\frac{1}{k} < \left(\frac{k^2}{k^2-1}\right)^{k} = \left(1+\frac{1}{k^2-1}\right)^{k}$$

Η τελευταία ανισότητα αποδεικνύεται ως εξής:

$$\left(1+\frac{1}{\kappa^2-1}\right)^{\kappa}=1+\kappa\frac{1}{\kappa^2-1}+\cdots>1+\frac{\kappa}{\kappa^2-1}>1+\frac{1}{\kappa}\ .$$

Ένα άμεσο πόρισμα είναι η παρακάτω χρήσιμη ανισότητα:

$$\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)^{\kappa}<e<\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)^{\kappa+1}\qquad \kappa=1,2,\ldots$$

Μια ωραία εφαρμογή αυτής της ανισότητας είναι η $(e^x)'=e^x$, δηλ. **η e^x ισούται με την παράγωγό της (!).**

Πραγματικά έχουμε δείξει ότι: $(e^x)'=c\,e^x$ όπου $c=\lim \kappa\left(e^{\frac{1}{\kappa}}-1\right)$.

Οι ανισότητες $\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)^{\kappa}<e<\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)^{\kappa+1}$ δίνουν $1<\kappa\left(e^{\frac{1}{\kappa}}-1\right)$ και $(\kappa+1)\left[e^{\frac{1}{\kappa+1}}-1\right]<\frac{\kappa+1}{\kappa}\to 1$ απ' όπου συνάγουμε:

$$\lim \kappa\left(e^{\frac{1}{\kappa}}-1\right)\geqslant 1 \quad \text{και}$$

$$\lim \kappa\left(e^{\frac{1}{\kappa}}-1\right)\leqq 1\ ,\ \text{δηλ.}\ \lim \kappa\left(e^{\frac{1}{\kappa}}-1\right)=1.$$

Η ιδιότητα αυτή μας οδηγεί να χρησιμοποιούμε συνήθως την e^x και όχι τις a^x, $a\neq e$. Όταν π.χ λέμε εκθετική συνάρτηση χωρίς να αναφέρουμε βάση, θα εννοούμε πάντοτε την e^x.

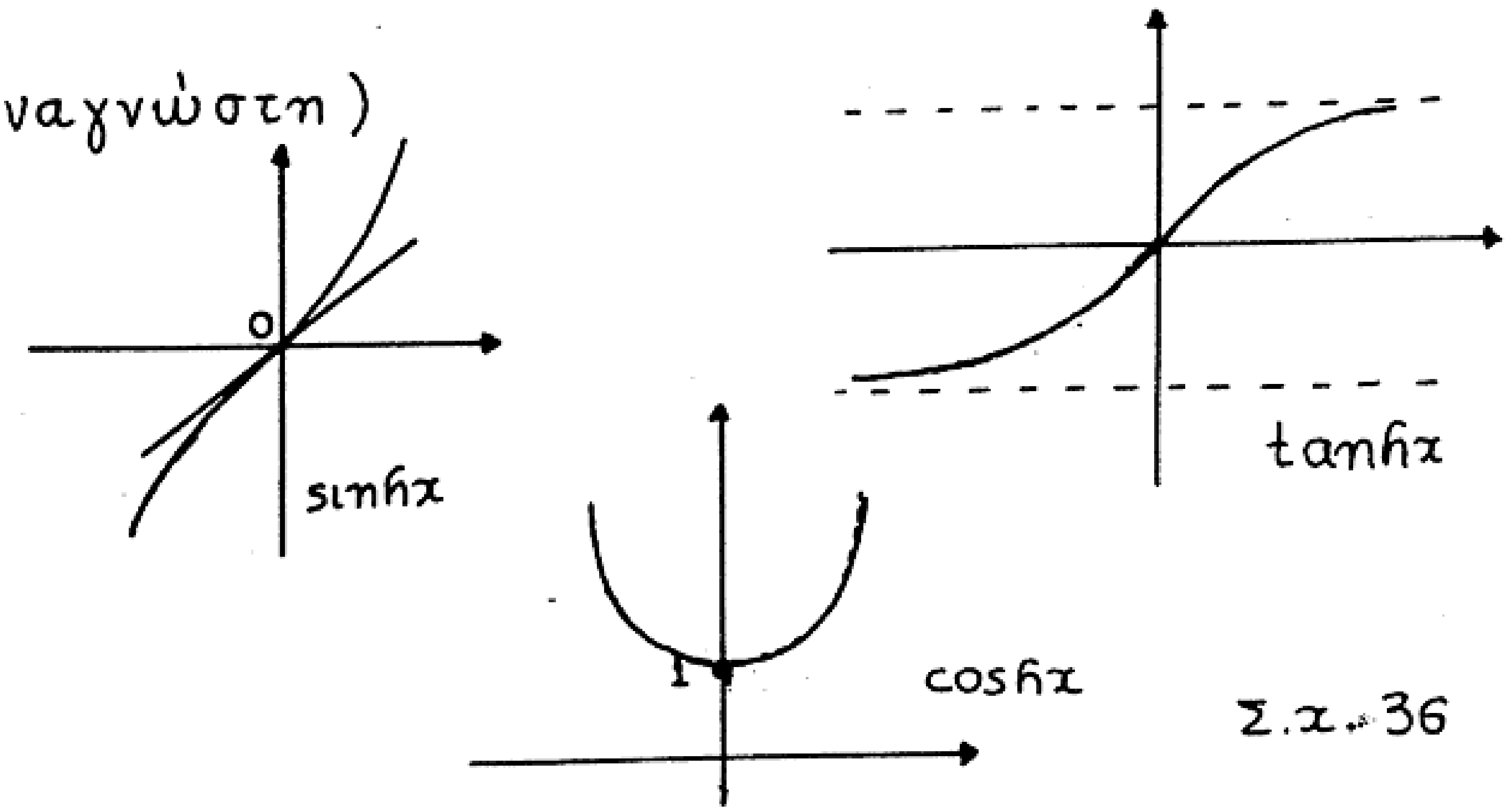
Συχνά επίσης στη βιβλιογραφία χρησιμοποιούμε τις λεγόμενες **υπερβολικές συναρτήσεις** οι οποίες έχουν ιδιότητες παρόμοιες με αυτές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (Στη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων θα μάθετε ότι η σχέση αυτή είναι ακόμη πιο στενή). Οι συναρτήσεις αυτές είναι:

$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (ή $sh x$) **υπερβολικό ημίτονο**

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (ή $ch x$) **υπερβολικό συνημίτονο**

$\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (ή $th x$) **υπερβολική εφαπτομένη**

Οι υπερβολικές συναρτήσεις ορίζονται για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Ιδού οι γραφικές παραστάσεις και μερικές ιδιότητές τους: (οι αποδείξεις είναι απλές και αφήνονται στον αναγνώστη)



Σ.χ. 36

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $\sinh(-x) = -\sinh x$,
$\cosh(-x) = \cosh x$, $\tanh x = \sinh x / \cosh x$,
$\sinh 2x = 2\sinh x \cdot \cosh x$, ...
$(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$,

$(\tanh x)' = \dfrac{1}{(\cosh x)^2}$

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με ένα αποτέλεσμα λίγο διαφορετικού χαρακτήρα.

Ο αριθμός e είναι άρρητος.

Πραγματικά έστω ότι ο e είναι ο ρητός $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$. Η σχέση

$\beta_\kappa = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{\kappa!} \to e$ μας λέγει τότε

$$0<\frac{m}{n}-\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\lim_{\kappa\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!}+\cdots+\frac{1}{(n+\kappa)!}\right)$$ ή

ακόμη $0<n!\left(\frac{m}{n}-\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right)=$

$$=\lim_{\kappa\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+1)\cdots(n+\kappa)}\right)=$$

$=\lim \gamma_\kappa$, όπου $\gamma_\kappa=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{(n+1)\cdots(n+\kappa)}$.

Δηλ. ο θετικός ακέραιος αριθμός
$A=n!\left(\frac{m}{n}-1-\frac{1}{1!}-\cdots-\frac{1}{n!}\right)$ είναι το $\lim \gamma_\kappa$.
Παρατηρούμε όμως ότι

$$0<\gamma_\kappa<\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^\kappa}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{\kappa-3}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\left(2-\frac{1}{2^{\kappa-2}}\right)<\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\cdot 2=\frac{11}{12}$$

οπότε $0<A\leq\frac{11}{12}$ που φυσικά είναι άτοπο.

<u>Παρατήρηση</u>: Ισχύει κάτι πολύ ισχυρότερο. Ο e όχι μόνο δεν είναι ρητός, δηλ. δεν είναι ρίζα εξίσωσης της μορφής $\alpha x+\beta=0$ με α,β ακέραιους, αλλά είναι και υπερβατικός, δηλ. δεν υπάρχει πολυώνυμο, ο-

ποιουδήποτε βαθμού $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ με ακέραιους συντελεστές που να έχει σαν μία ρίζα το e.

Το σημαντικό αυτό θεώρημα αποδείχτηκε το 1872 από το Γάλλο μαθηματικό Hermite και λίγο αργότερα ο Γερμανός μαθηματικός Lindemann, με παρόμοια μέθοδο, έδειξε το ίδιο αποτέλεσμα για το π. Το τελευταίο αυτό αποτέλεσμα είναι το κλειδί για να δειχτεί ότι "ο κύκλος δεν τετραγωνίζεται με κανόνα και διαβήτη."

4.3.3.3 Η λογαριθμική συνάρτηση

Αν $a>0$ και $a\neq 1$ τότε η συνάρτηση a^x είναι γνήσια μονότονη (αύξουσα αν $a>1$, φθίνουσα αν $a<1$). Επίσης

$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$ αν $a>1$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty$ αν $a<1$.

Οι αποδείξεις είναι εύκολες. Π.χ.
$a^x \geqslant a^{[x]} = (1+(a-1))^{[x]} \geqslant 1+[x](a-1)\to+\infty$
όταν $x\to+\infty$ αν $a>1$.

Μία προφανής παραλλαγή του θεωρήματος της ενδιάμεσης τιμής μας λέγει τώρα, ότι για κάθε y, $0<y<\infty$, υπάρχει ακριβώς ένα x (διότι η a^x είναι γνήσια μονότονη) τέτοιο ώστε $a^x=y$. Το x αυτό λέγεται **λογάριθμος με βάση a του y** και συμβολίζεται $\log_a y$.

Η συνάρτηση $\log_a x$, $x>0$ είναι λοιπόν η αντίστροφη της a^x, που είναι συ-
+ νεχής και $(a^x)' \neq 0$ και παραγωγίσιμη. Είναι λοιπόν και η $\log_a x$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$ και για την παράγωγό της θα έχουμε:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{ca^y} = \frac{1}{cx} \quad (\text{αν } x=a^y)$$

Το c είναι το $\lim \frac{a^h-1}{h}$, $h\to 0$.

Οι ιδιότητες της a^x που δείξαμε συνεπάγονται άμεσα τις γνωστές ιδιότητες των λογαρίθμων:

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, διότι

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x\cdot y =$$
$$= a^{\log_a (xy)}$$

$\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$

(αν $a>1$)

$\lim\limits_{0+} \log_a x = -\infty$ (αν $a>1$) (Τι γίνεται αν
$a<1$;) $\log_a x^y = y \log_a x$, διότι
$a^{y\log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^y = x^y$.

Ειδικά αν $a=e$ γράφουμε $\log x$
αντί $\log_e x$ (ή και $\ln x$) και ονομάζουμε αυτό το λογάριθμο φυσικό
ή Νεπέρειο (Αν $a=10$ ονομάζεται δεκαδικός ή λογάριθμος του Briggs).

Υπάρχει μια πολύ απλή σχέση μεταξύ λογαρίθμων ως προς διάφορες βάσεις.
π.χ. $a>0$, $\beta>0$ τότε:
$a = \beta^{\log_\beta a}$ και επομένως αν $\log_a x = y$
($x>0$), τότε $a^y = x$, δηλ. $\beta^{y\log_\beta a} = x$,
οπότε $\log_\beta x = (\log_\beta a)(\log_a x)$

Από τη σχέση $a^x = e^{x\log a}$ μπορούμε
εύκολα να βρούμε μια άλλη μορφή της
σταθεράς c, που εμφανίζεται στην παράγωγο της a^x. Πραγματικά, βρήκαμε
$(a^x)' = ca^x$. Από την άλλη μεριά
$(a^x)' = (e^{x\log a})' = \log a \cdot e^{x\log a} = (\log a)a^x$

δηλ. $c = \log a$.

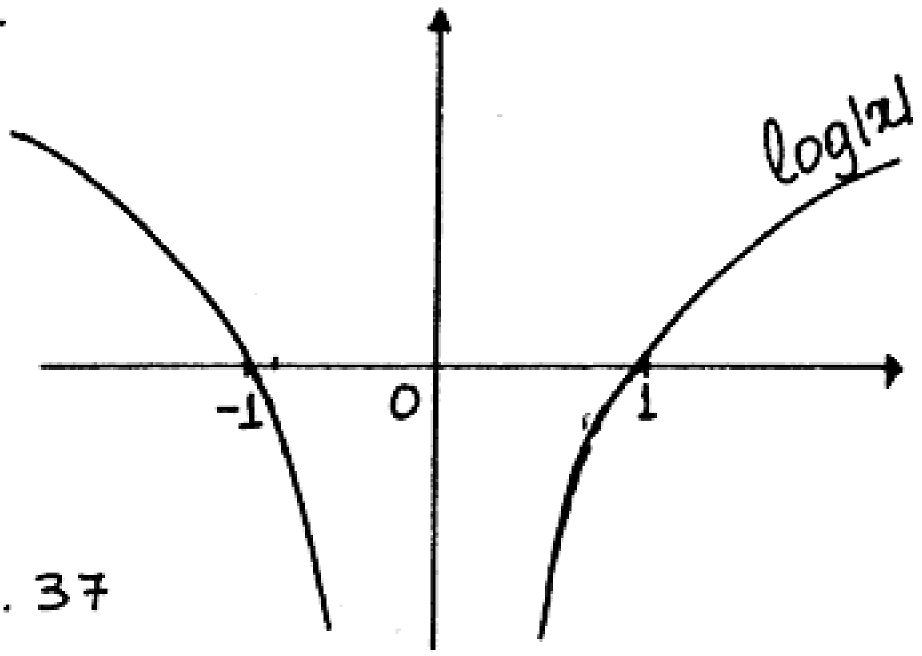
Μπορούμε λοιπόν τώρα να γράψουμε $(a>0)$ $(a^x)' = (\log a)a^x$, $(e^x)' = e^x$ $-\infty<x<\infty$

$(\log_a x)' = \frac{1}{\log a}\frac{1}{x}$, $(\log x)' = \frac{1}{x}$, $x>0$.

Χρήσιμο είναι επίσης να παρατηρήσουμε ότι $(\log|x|)' = \frac{1}{x}$ για όλα τα $x \neq 0$.

Για $x>0$ το έχουμε ήδη δείξει. Αν $x<0$ τότε $(\log|x|)' = (\log(-x))' =$
$= -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$.

Η γραφική παράσταση της $\log|x|$ φαίνεται στο σχ. 37.



Σχ. 37

4.3.3.4 <u>Η συνάρτηση x^b, $x>0$, $b\in\mathbb{R}$</u>

Έχουμε ήδη ορίσει το σύμβολο x^b και μπορούμε να ανάγουμε τη μελέτη της συνάρτησης αυτής στη μελέτη της $\log x$ παρατηρώντας ότι:

$$x^b = e^{b\log x}$$

δηλ. η x^b είναι η σύνθεση των γνωστών πλέον συναρτήσεων e^x και $b\log x$. Έχουμε π.χ ότι για $b>0$ η x^b είναι αύξουσα, τείνει στο $+\infty$ για $x\to+\infty$ και στο 0 για $x\to 0^+$. Αν $b<0$ τότε η x^b είναι φθίνουσα και τείνει στο 0 όταν $x\to+\infty$ και στο $+\infty$ όταν $x\to 0^+$.

Η παράγωγος της x^b είναι αυτή ακριβώς που περιμένουμε, δηλ. bx^{b-1}. Πραγματικά,

$$(x^b)' = (e^{b\log x})' = b\frac{1}{x}(e^{b\log x}) =$$

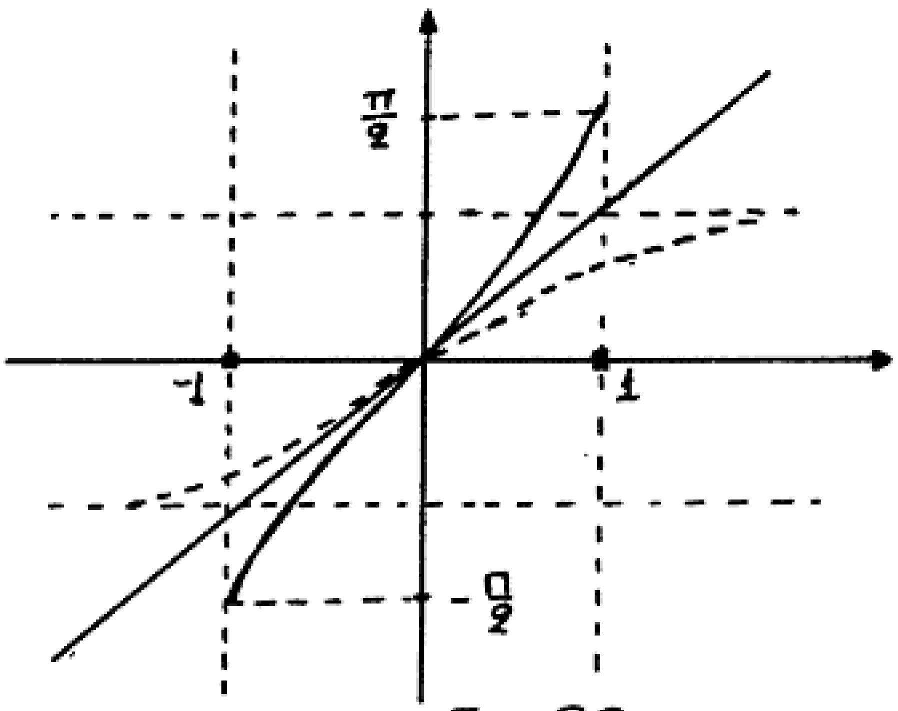
$$= b\frac{1}{x}x^b = bx^{b-1}$$ δηλ. Για οποιοδήποτε $b\in\mathbb{R}$ $(x^b)' = bx^{b-1}$, $x>0$.

4.3.4 Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές και οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις.

Τόσο οι τριγωνομετρικές όσο και οι υπερβολικές συναρτήσεις είναι γνήσια μονότονες σε κάποια διαστήματα και επομένως έχουν αντίστροφες σ' αυτά.

α) $\sin x$, $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$. Στο διάστημα αυτό η $\sin x$ είναι γνήσια αύξουσα, έχει επομένως αντίστροφο, την οποία θα συμβολίζουμε με $\mathrm{Arcsin}\, x$ (η Τοξημx). Η $\mathrm{Arcsin}\, x$ ορίζεται στο διάστημα $[-1,1] = \left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right), \sin\frac{\pi}{2}\right]$ είναι αύξουσα, συνεχής στο $[-1,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$

Η γραφική παράσταση της $\mathrm{Arcsin}x$, όπως έχουμε αναφέρει, προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $\sin x$ με κατοπτρισμό ως προς τη διχοτόμο $y=x$.



Σχ. 38

Αν $x_0 \in (-1,1)$ και $x_0 = \sin y_0$, $-\frac{\pi}{2} < y_0 < \frac{\pi}{2}$, τότε γνωρίζουμε ότι:

$$\left(\mathrm{Arc}\sin x\right)'_{x=x_0} = \frac{1}{(\sin y)'_{y=y_0}} = \frac{1}{\cos y_0} = \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}$$

διότι $\cos y_0 > 0$ για $y_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Στο σημείο 1 η παράγωγος από αριστερά της Arcsinx, όπως αναμένεται και γεωμετρικά, είναι $+\infty$. Στην ανάπτυξη της θεωρίας για μονότονες συναρτήσεις δεν εξετάσαμε την περίπτωση πλευρικών παραγώγων. Τόσο οι διατυπώσεις όσο και οι αποδείξεις είναι προφανείς παραλλαγές της περίπτωσης εσωτερικού σημείου.

Ας δείξουμε απ' ευθείας λοιπόν ότι

$(\text{Arcsin}x)'_{x=1-} = +\infty.$ $\left(x_0 = \frac{\pi}{2}\right)$

Έστω $M>0$. Επειδή $(\sin x)'_{x=x_0} = \cos x_0 = 0$, θα υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\pi}{2} - \delta < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} < \frac{1}{M}, \text{ δηλ.}$$

$$\cos\delta < \sin x < 1 \Rightarrow \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sin x - 1} > M. \text{ Γράφοντας}$$

$\sin x = y$, έχουμε λοιπόν:

$$\cos\delta < y < 1 \Rightarrow \frac{\text{Arcsin}\, y - \frac{\pi}{2}}{y - 1} > M,$$

το οποίο δείχνει ότι $D^{-}\text{Arcsin}x\big/_{x=\frac{\pi}{2}} = +\infty.$

Όμοια δείχνεται ότι η παράγωγος από

~~αριστερά~~ δεξιά στο $x=-1$ είναι πάλι $+\infty$.

<u>Παρατήρηση</u>: Ένα φυσιολογικό ερώτημα είναι γιατί περιορίσαμε την συνάρτηση $\sin x$ στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και όχι σε άλλα διαστήματα, π.χ. $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, όπου πάλι η $\sin x$ είναι μονότονη. Δεν υπάρχει κατ' αρχήν κανείς λόγος γι' αυτό. Σε κάθε διάστημα της μορφής $\left[\kappa\pi-\frac{\pi}{2}, \kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right]$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, η $\sin x$ είναι γνήσια μονότονη (αύξουσα για κ ζυγό και φθίνουσα για κ μονό) και επομένως θα έχει και αντίστροφη $Arc_\kappa \sin$, γνήσια μονότονη, συνεχή στο $\underbrace{\left[\kappa\pi-\frac{\pi}{2}, \kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right]}_{(-1,1)\ \text{με τιμές στο}}$ και με παράγωγο:

$$(Arc_\kappa \sin x)' = (-1)^\kappa \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \in (-1,1)$$

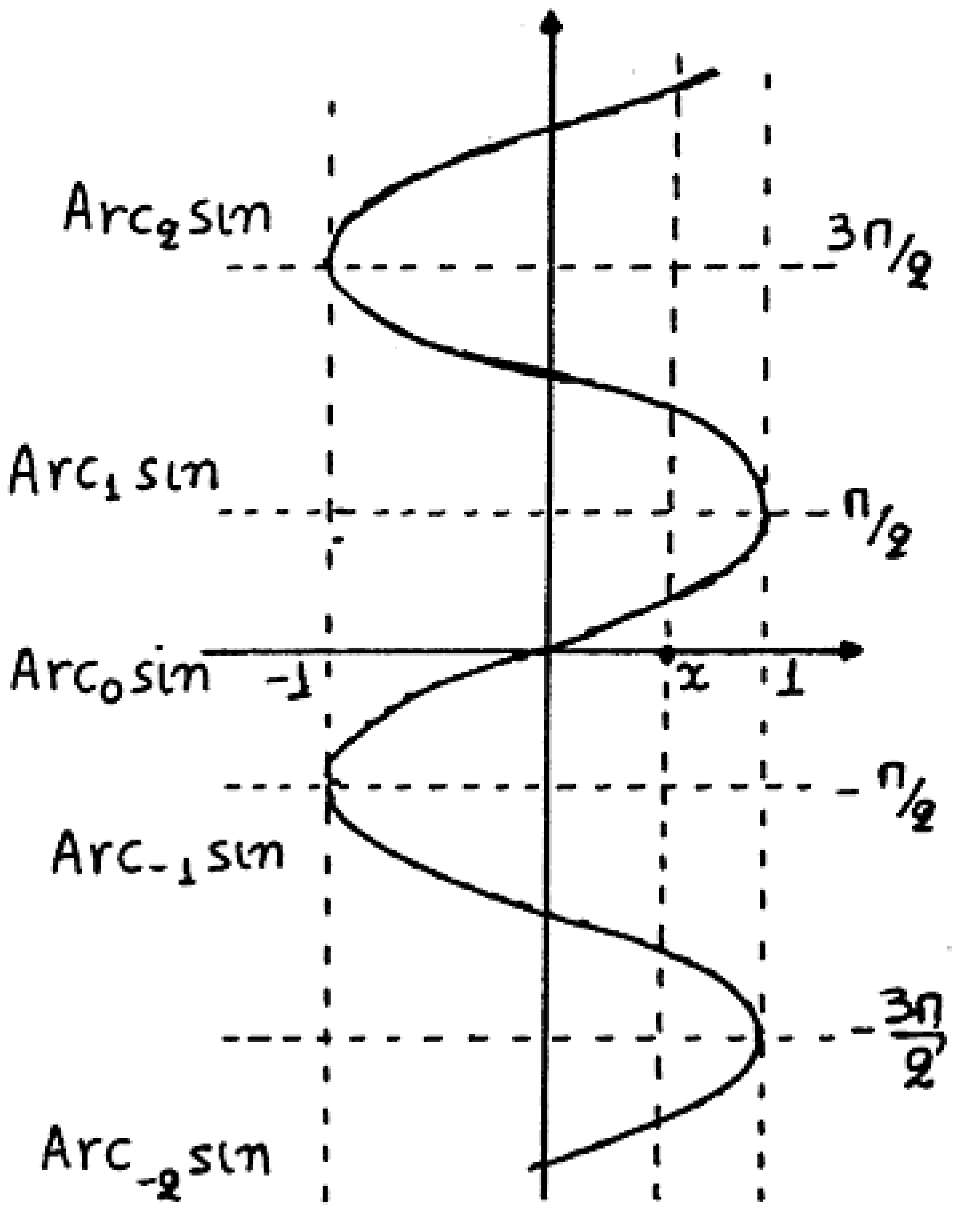
Ο παράγοντας $(-1)^\kappa$ δικαιολογείται από την εξής απλή παρατήρηση:

$Arc_{2\kappa} \sin x = 2\kappa\pi + Arc_0 \sin x = 2\kappa\pi + Arc \sin x$

και $Arc_{2\kappa+1} \sin x = (2\kappa+1)\pi - Arc_0 \sin x =$

$= (2\kappa+1)\pi - Arc \sin x$.

Χρησιμοποιούμε μερικές φορές το σύμβολο arcsinx (μικρό α όχι Arcsinx) για να παραστήσουμε την "πλειότιμη συνάρτηση" που σε κάθε x αντιστοιχεί τις άπειρες τιμές $Arc_k sinx$, $k \in \mathbb{Z}$. Ο ακριβής ορισμός και η μελέτη των πλειοτίμων συναρτήσεων δεν θα μας απασχολήσει εδώ. Ο κλάδος των Μαθηματικών στον οποίο φυσιολογικά ανήκει αυτή η μελέτη, είναι η θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων. Αναφέρουμε μονάχα ότι οι συναρτήσεις $Arc_k sinx$ που ορίσαμε λέγονται κλάδοι της πλειότιμης συνάρτησης arcsinx και ειδικότερα η Arcsinx πρωτεύων κλάδος.



Σχ. 39

Ανάλογες παρατηρήσεις ισχύουν και για τις αντίστροφες των cosx, tanx, αλλά θα τις παραλείψουμε.

β) $\cos x$ $\quad 0 \leq x \leq \pi$. Στο διάστημα αυτό η $\cos x$ είναι γνήσια φθίνουσα έχει επομένως αντίστροφο την οποία θα συμβολίζουμε με $\mathrm{Arccos}\, x$.

Αν $0 \leq x \leq \pi$ τότε $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2}$ και

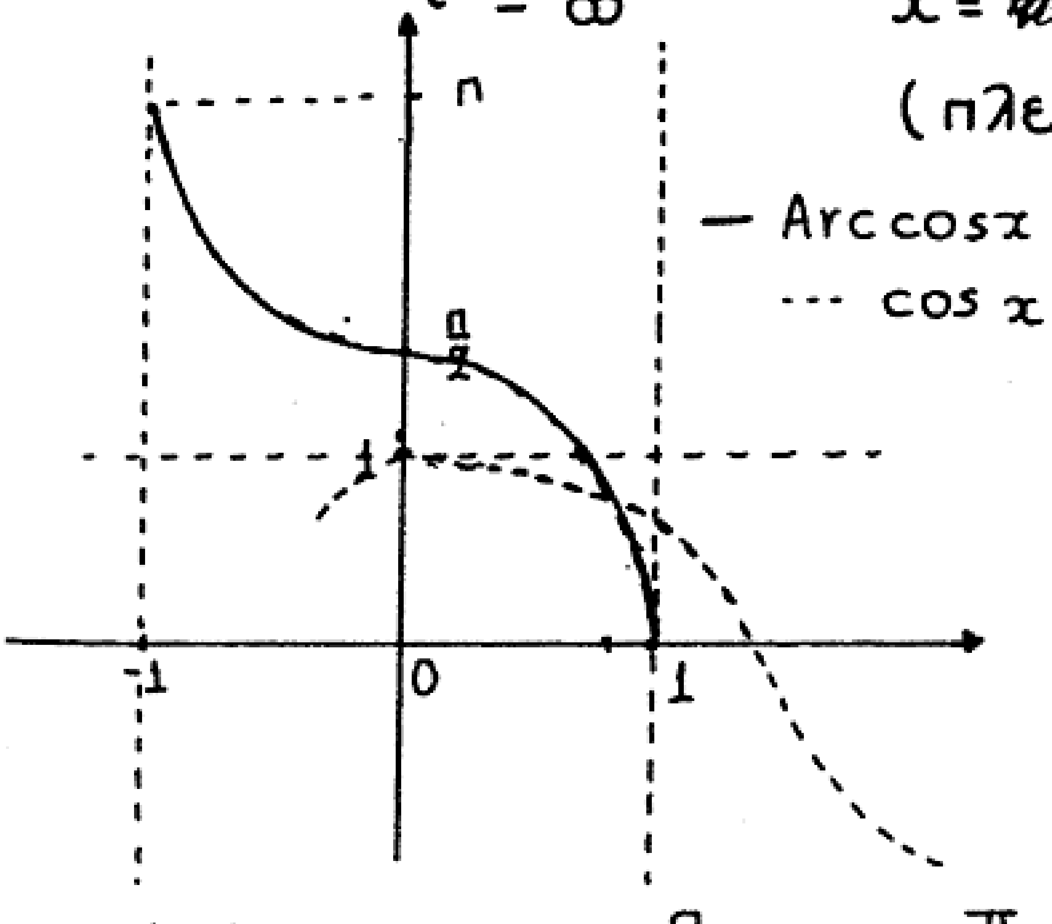
$y = \cos x$ αν και μόνο αν $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Συνάγουμε ότι $\mathrm{Arccos}\, x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arcsin}\, x$

και επομένως

$$(\mathrm{Arccos}\, x)' = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \cancel{0<x<\pi}\ -1<x<1 \\ -\infty & x = \cancel{0,\pi}\ -1, 1 \end{cases}$$

(πλευρική παράγωγος)

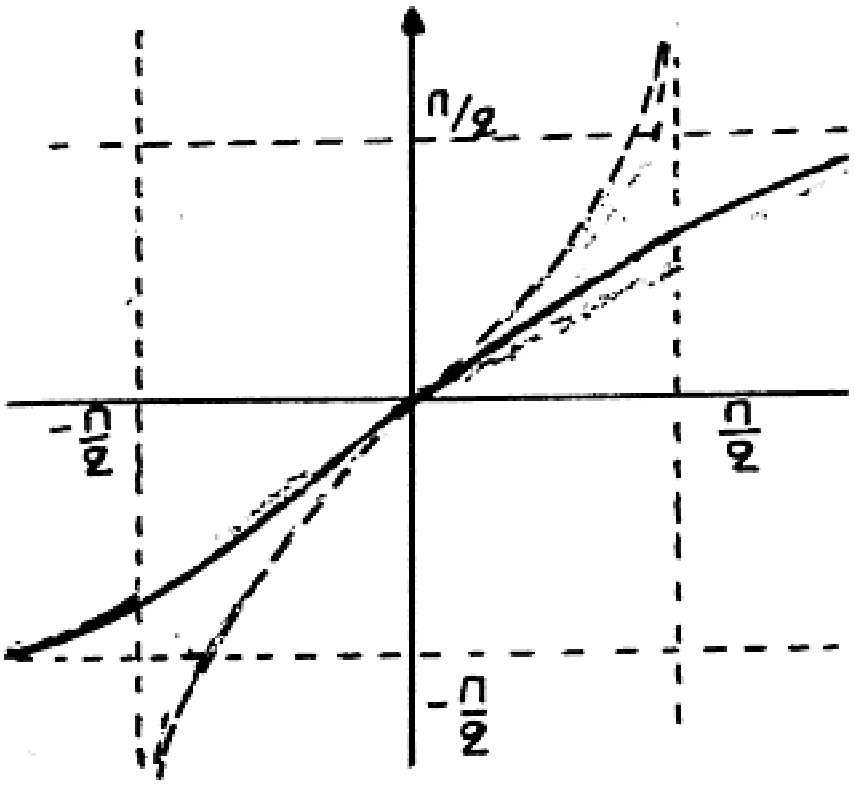


Σχ. 40

γ) $\tan x$ $\quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Η $\mathrm{Arctan}\, x$ ορίζεται στο $-\infty < x < \infty$, είναι αύξουσα και έχει παράγωγο:

$$(\mathrm{Arctan}\,x)' = \left(\frac{1}{\cos^2 y}\right)^{-1} = \left(\frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y}\right)^{-1} = (1+\tan^2 y)^{-1}$$



όπου $x = \tan y$

δηλ. $(\mathrm{Arctan}\,x)' = \dfrac{1}{1+x^2}\,,\ -\infty < x < \infty$.

Σχ. 41

Για τις αντίστροφες των υπερβολικ συναρτήσεων δεν χρειαζόμαστε νέα σύμβολα, μπορούμε να τις εκφράσουμε με τη βοήθεια της συνάρτησης log. (Το ίδιο ισχύει και για τις αντίστροφες τρ γωνομετρικές συναρτήσεις, με κατάλληλη επέκταση της συνάρτησης $\log x$ για μιγαδικά x, όπως μας διδάσκει η θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων).

δ) $\cosh x\,,\ x \geq 0$. Στο διάστημα αυτό η $\cosh x$ είναι γνήσια αύξουσα, $\cosh 0 = 1$, $\lim \cosh x = +\infty\,,\ x \to +\infty$ κα επομένως υπάρχει η αντίστροφή της g στο διάστημα $[0, \infty)$. Αν $x \geqslant 0$ και $\cosh y = x$ τότε: $\frac{e^y + e^{-y}}{2} = x$, δηλαδή

$(e^y)^2 - 2x(e^y) + 1 = 0$, απ' όπου έπεται

$e^y = x \pm \sqrt{x^2-1}$ δηλ. $y = \log(x + \sqrt{x^2-1})$

(γιατί αποκλείσαμε τη ρίζα $x - \sqrt{x^2-1}$;)

Βρήκαμε λοιπόν ότι η αντίστροφη της $\cosh x$, $x \geqslant 0$, είναι η $\log(x + \sqrt{x^2-1})$. Χρησιμοποιείται πάντως στη βιβλιογραφία, κατ' αναλογίαν προς την Arccos, και το σύμβολο Arccosh. Γράφουμε δηλ. $\operatorname{Arccosh} x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$ $x \geqslant 1$.

ε) $\sinh x$, $-\infty < x < \infty$. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο βρίσκουμε ότι η αντίστροφη συνάρτηση, που συμβολίζουμε Arcsinh, είναι η $\log(x + \sqrt{x^2+1})$.

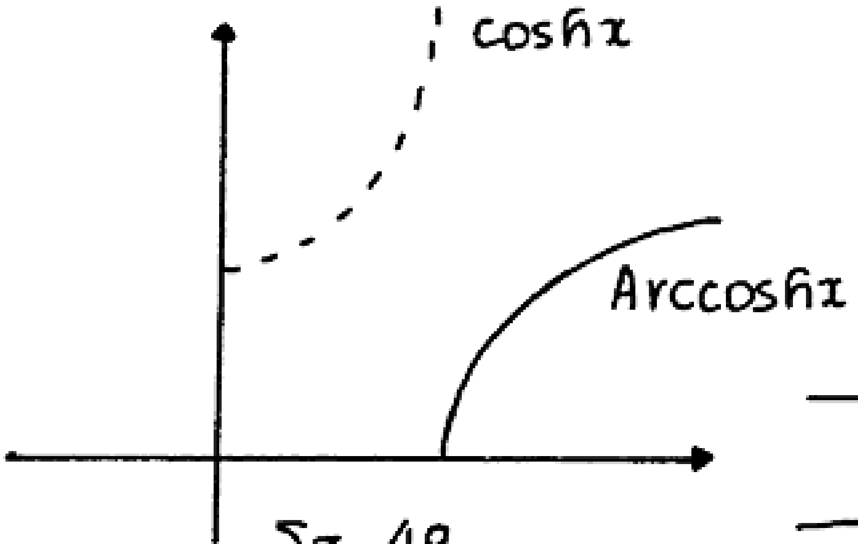
ζ) $\tanh x$ $-\infty < x < \infty$. Παρόμοια πάλι η αντίστροφη συμβολίζεται $\operatorname{Arctanh} x$ και είναι η $\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$.

Είτε με το θεώρημα παραγώγισης αντιστρόφου συνάρτησης και απλές ιδιότητες των υπερβολικών συναρτήσεων, είτε απ' ευθείας βρίσκουμε εύκολα τις παραγώγους των αντιστρόφων υπερβολικών συναρτήσεων:

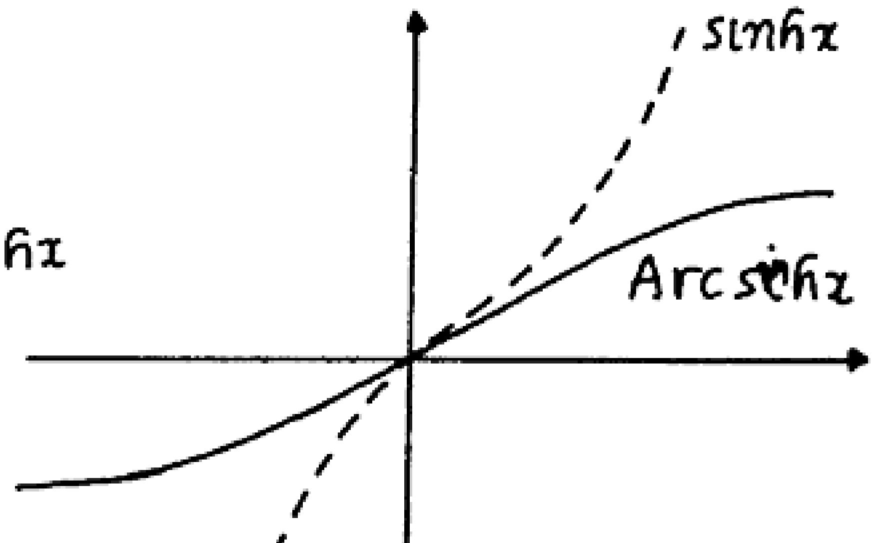
$$(\mathrm{Arc}\cosh x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x>1,$$

$$(\mathrm{Arc}\sinh x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad -\infty<x<\infty$$

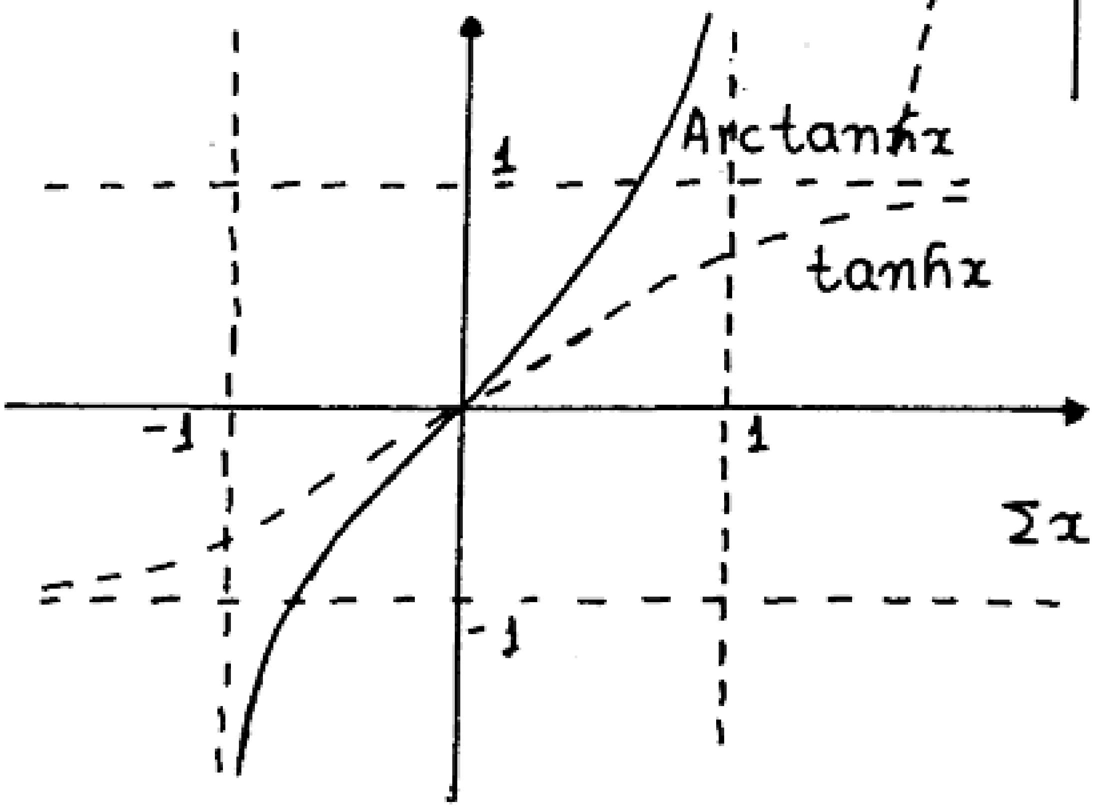
$$(\mathrm{Arc}\tanh x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad -1<x<1.$$



Σχ. 42



Σχ. 43



Σχ. 44

Οι γραφικές παραστάσεις των αντιστρόφων υπερβολικών συναρτήσεων φαίνονται στα σχήματα 42, 43, 44.-

4.4 Οι στοιχειώδεις συναρτήσεις

Ας ανασκοπήσουμε τις συναρτήσεις που μελετήσαμε μέχρι τώρα. Είναι τα πολυώνυμα και οι ρητές συναρτήσεις, οι τριγωνομετρικές και οι αντίστροφές τους, οι υπερβολικές και οι αντίστροφές τους, οι δυνάμεις με πραγματικό εκθέτη, οι εκθετικές και οι αντίστροφές τους λογαριθμικές. Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται **βασικές στοιχειώδεις συναρτήσεις** και οι συναρτήσεις που κατασκευάζονται από αυτές με τις στοιχειώδεις αλγεβρικές πράξεις και συνθέσεις μεταξύ αυτών (δεν θα δώσουμε ακριβή ορισμό) λέγονται **στοιχειώδεις**. Στον επόμενο πίνακα συνοψίζουμε τους τύπους που έχουμε βρει για τις παραγώγους των βασικών στοιχειωδών συναρτήσεων. Σε μερικές περιπτώσεις οι συναρτήσεις ορίζονται και στα άκρα των διαστημάτων που αποτελούν το πεδίο ορισμού. Π.χ. η x^a, αν $a>0$ μπορεί να οριστεί και για $x=0$ $(0^a=0)$ και μάλιστα αν $a\geqslant 1$, τότε υπάρχει η παράγωγός της από δεξιά στο 0 και ισούται με 0, αν $a>1$, και με 1, αν $a=1$ (αν $0<a<1$ η παράγωγος από δεξιά στο 0 είναι $+\infty$). Θα αφήσουμε στον αναγνώστη τη διερεύνηση αυτών των περιπτώσεων.

Παράγωγοι βασικών στοιχειωδών συναρτήσεων.

Συνάρτηση $f(x)$	Πεδίο ορισμού	Παράγωγος
c (σταθερά)	$-\infty<x<\infty$	0
x^n, $n=1,2,\ldots$	$-\infty<x<\infty$	$n\,x^{n-1}$
x^n, $n=-1,-2,\ldots$	$\lvert x\rvert>0$	$n x^{n-1}$
x^a, $a\in\mathbb{R}$	$x>0$	$a x^{a-1}$
a^x, $a>0$	$-\infty<x<\infty$	$(\log a)\,a^x$
e^x	$-\infty<x<\infty$	e^x
$\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$	$x>0$	$\frac{1}{\log a}\cdot\frac{1}{x}$
$\log\lvert x\rvert$	$x\neq 0$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$-\infty<x<\infty$	$\cos x$

Συνάρτηση $f(x)$	Πεδίο ορισμού	Παράγωγος
$\cos x$	$-\infty<x<\infty$	$-\sin x$
$\tan x$	$-\infty<x<\infty,\ x\neq(2\kappa+1)\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$	$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$
$\sinh x$	$-\infty<x<\infty$	$\cosh x$
$\cosh x$	$-\infty<x<\infty$	$\sinh x$
$\tanh x$	$-\infty<x<\infty$	$\frac{1}{\cosh^2 x}=1-\tanh^2 x$
$\operatorname{Arc}\sin x$	$-1<x<1$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Arc}\cos x$	$-1<x<1$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Arc}\tan x$	$-\infty<x<\infty$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{Arc}\sinh x$	$-\infty<x<\infty$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{Arc}\cosh x$	$x>1$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{Arc}\tanh x$	$-1<x<1$	$\frac{1}{1-x^2}$

Η παραγώγιση των στοιχειωδών συναρτήσεων είναι τώρα δουλειά ρουτίνας. Στον επόμενο πίνακα δίνουμε μερικά παραδείγματα, τα οποία θα μας χρειαστούν στο επόμενο κεφάλαιο.

Μερικοί χρήσιμοι τύποι παραγωγίσεων (α, β, γ πραγματικοί)

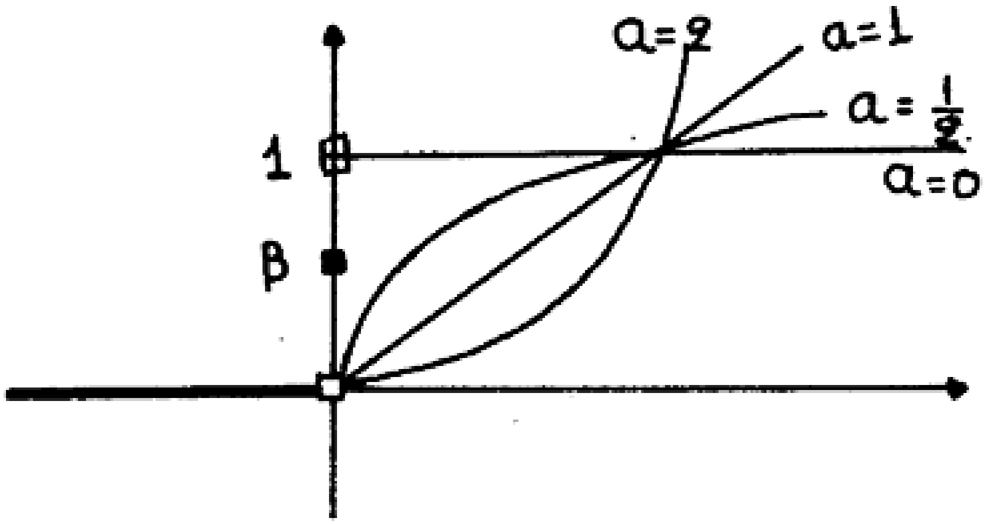
Συνάρτηση	Πεδίο ορισμού	Παράγωγος
$\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}$	$ax^2+\beta x+\gamma>0$	$\dfrac{2ax+\beta}{2\sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}}$
$\log\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$	$-\infty<x<\infty$	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$
$\text{Arcsin}\,\frac{1}{x}$	$x>1$	$-\dfrac{1}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}$
$\log\left\|\tan\frac{x}{2}\right\|$	$x\in\mathbb{R},\ x\neq\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$	$\dfrac{1}{\sin x}$
$\|x\|^a$	$x\neq 0$	$a\,x\,\|x\|^{a-2}$
$\text{Arcsin}\,\frac{x}{a}$	$\|x\|<a$	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$
$\frac{a^2}{2}\left\{\text{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)+\left(\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right)\right\}$	$\|x\|<a$	$\sqrt{a^2-x^2}$

Πολύ συχνά συναντάμε επίσης συναρτήσεις που έχουν πεδίο ορισμού ένα διάστημα εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων του και συμπίπτουν με μια στοιχειώδη συνάρτηση σε κάθε ένα από τα υποδιαστήματα στα οποία τα σημεία αυτά χωρίζουν το αρχικό διάστημα. Η συνάρτηση $\log|x|$ π.χ. είναι τέτοιας μορφής. Στα άκρα των υποδιαστημάτων η συμπεριφορά της συνάρτησης (αν είναι συνεχής, αν έχει παράγωγο, αν είναι συνεχής από δεξιά ή από αριστερά, αν έχει παράγωγο από δεξιά ή από αριστερά) ποικίλει.

Αντί να περιγράψουμε εξαντλητικά αυτές τις περιπτώσεις, το οποίο είναι απλά θέμα ρουτίνας, θα δώσουμε ένα τυπικό παράδειγμα:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x^a & x>0 \\ \beta & x=0 \end{cases}$$

$a \geq 0 \quad , \quad \beta \in \mathbb{R}$



Παρατηρώντας ότι $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 0$ συμπεραίνουμε ότι αν $\beta \neq 0$ η συνάρτησή μας δεν είναι συνεχής από αριστερά άρα ούτε καν συνεχής.

Αν $a \neq 0$ τότε $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0$ και επομένως πάλι στην περίπτωση $\beta = 0$, η συνάρτηση είναι συνεχής και από δεξιά, άρα συνεχής στο 0.

Αν $a = 0$, τότε $\lim\limits_{x \to 0+} x^0 = 1$ και επομένως η συνάρτηση δεν είναι συνεχής. Για $\beta = 1$ είναι συνεχής από δεξιά.

Ας εξετάσουμε τώρα την ύπαρξη παραγώγων από δεξιά και αριστερά στο 0.

Αν $\beta \neq 0$ τότε $D^- f(0) = +\infty$ για $\beta > 0$ και $D^- f(0) = -\infty$ για $\beta < 0$ $\left(\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \right.$

$= \dfrac{-\beta}{x} \to +\infty$, $x \to 0-$, αν $\beta > 0$ και

$\left. -\dfrac{\beta}{x} \to -\infty \right.$, $x \to 0-$ αν $\beta < 0$).

Αν $\beta = 0$ τότε $D^- f(0) = 1$ (τετριμμένο)

Αν $\beta = 0$ και $a \neq 0$, τότε

$$D^+ f(0) = a x^{a-1}\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{για } a > 1 \text{ και}$$

$$D^+ f(0) = +\infty \qquad \text{για } a < 1$$

$\left(\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x^a}{x} = x^{a-1} \to +\infty,\ x \to 0^+, \right.$

για $a < 1$).

Βλέπουμε λοιπόν ότι για $\beta=0$ και $\alpha>1$, η $f(x)$ είναι όχι μόνο συνεχής αλλά και παραγωγίσιμη στο 0. Γεωμετρικά έπρεπε να το περιμένουμε αυτό, γιατί μόνο για $\alpha>1$ το γράφημα της $f(x)$, $x>0$, εφάπτεται του άξονα των x.

Όσο μεγαλύτερος γίνεται ο εκθέτης α τόσο "καλύτερη" γίνεται η συμπεριφορά της συνάρτησης στο 0 ("κολλάνε" καλύτερα τα δύο κομμάτια της f). Αν π.χ. $\alpha>2$ τότε φυσικά $\alpha>1$ και έτσι έχουμε πρώτη παράγωγο f':

$$f'(x)=\begin{cases} 0 & x\leq 0 \\ \alpha x^{\alpha-1} & x>0 \end{cases} \qquad \text{δηλ.}$$

$$f'(x)=\alpha\, g(x) \quad \text{όπου} \quad g(x)=\begin{cases} 0 & x\leq 0 \\ x^{\alpha-1} & x>0 \end{cases}$$

Επειδή $\alpha>2$, $\alpha-1>1$, άρα και η g έχει παράγωγο (και στο 0) και έτσι η f έχει και δεύτερη παράγωγο.

Η κατανόηση της απλής αυτής τεχνικής μας επιτρέπει να ορίζουμε συναρτήσεις που ικανοποιούν ορισμένες προδιαγεγραμμένες συνθήκες. Ιδού ένα παράδειγμα ενός τύπου προβλήματος που εμφανίζεται συχνά.

<u>Πρόβλημα</u>: "Βρείτε μία συνάρτηση $f(x)$, $-\infty<x<\infty$, η οποία να είναι σταθερά ίση με 1 για $x<0$, να ισούται με ένα πολυώνυμο βαθμού 3 για $x>0$ και να είναι δυο φορές παραγωγίσιμη"

Με τον όρο δυο φορές παραγωγίσιμη εννοούμε βέβαια ότι υπάρχει (και είναι πεπερασμένη) η $f''(x)$ για όλα τα x.

Η κατασκευή μιας τέτοιας συνάρτησης f είναι εύκολη. Αν $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$, $x>0$, τότε πρέπει να ισχύουν οι ισότητες $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=0$ (γιατί;;), δηλ.

$$a_0=1,\quad a_1=0,\quad 2a_2=0,$$

οπότε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 1+x^3 & x\geq 0\end{cases}$$

π.χ. είναι μία λύση του προβλήματός μας (βρείτε όλες τις λύσεις του προβλήματος).

Οι συναρτήσεις που ανασκοπήσαμε σ' αυτή την παράγραφο είναι φυσικά από τις πιο συνηθισμένες. Πάντως πρέπει να τονίσουμε ότι πολύ συχνά, ακόμη και σε απλά προβλήματα, χρειαζόμαστε και άλλες συναρτήσεις. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα του απλού εκκρεμούς, η μελέτη του οποίου οδηγεί στις λεγόμενες ελλειπτικές συναρτήσεις. Αποδεικνύεται ότι οι συναρτήσεις αυτές δεν είναι στοιχειώδεις (η απόδειξη δεν είναι εύκολη και δεν θα μας απασχολήσει). Θα επανέλθουμε στο παράδειγμα αυτό στο επόμενο κεφάλαιο.

4.5 <u>Ασκήσεις</u>

1) Στην παράγραφο 4.2.1 αφήσαμε αναπόδεικτο τον ισχυρισμό "Μεταξύ των συναρτήσεων $x(t)$, $-\infty<t<\infty$, οι οποίες έχουν β' παράγωγο μόνον η $\cos\kappa t$ ικανοποιεί την εξίσωση $x''(t)+\kappa^2 x(t)=0$ και τις συνθήκες $x(0)=1$, $x'(0)=0$."

Ο ισχυρισμός αυτός είναι συνέπεια ενός γενικού θεωρήματος των διαφορικών εξισώσεων αλλά μπορείτε να τον δείξετε και με τα μέσα που διαθέτετε τώρα.

α) Γράψτε $x(t)=\cos\kappa t+y(t)$ και δείξτε ότι η $y(t)$ ικανοποιεί την εξίσωση $y''(t)+\kappa^2 y(t)=0$, $-\infty<t<\infty$, και τις συνθήκες $y(0)=y'(0)=0$.

β) Δείξτε ότι η εξίσωση $x''(t)+\kappa^2 x(t)=0$ $-\infty<t<\infty$, συνεπάγεται ότι η συνάρτηση $(x'(t))^2+\kappa^2(x(t))^2$ είναι σταθερά.

γ) Συνδυάστε τα α, β για να συμπληρώσετε την απόδειξη.

δ) Τι σας θυμίζει από τη Μηχανική το β΄ ερώτημα;

2) α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f'(x)$, τότε υπάρχει και η $D^+f(\alpha)$ και ισούται με το όριο αυτό.

β) Δείξτε ότι η υπόθεση ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f'(x)$ δεν μπορεί να παραληφθεί (δηλ. βρείτε ένα παράδειγμα όπου η $D^+ f(a)$ δέν υπάρχει ενώ δεν υπάρχει το $\lim_{x\to a^+} f'(x)$).

3) α) Ποια είναι η γεωμετρική σημασία της σχέσης $f'(x_0)=+\infty$, x_0 εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f. Ίδια ερώτηση για το $-\infty$.

β) Κατασκευάστε μια συνάρτηση $f(x)$, $a<x<\beta$ τέτοια ώστε $D^+ f(x_0)=+\infty$, $D^- f(x_0)=-\infty$ για κάποιο $x_0\in(a,\beta)$.

4) Αν $f(x)$, $g(x)$ είναι πολυώνυμα, $f(x)=(x-a)^\kappa g(x)$, $\kappa\in\mathbb{N}$, και $g(a)\neq 0$, τότε το κ λέγεται πολλαπλότητα της ρίζας a του $f(x)$.

Δείξτε ότι μία ρίζα πολλαπλότητας $\kappa>1$ είναι και ρίζα του $f^{(\kappa-1)}(x)$.

5) Δείξτε ότι

$$(f\cdot g)^\kappa(x)=\sum_{\lambda=0}^{\kappa}\binom{\kappa}{\lambda}f^{(\lambda)}(x)\,g^{(\kappa-\lambda)}(x),$$

όπου $f^{(0)}(x)$ σημαίνει $f(x)$ και οι συναρτήσεις f και g υποτίθενται παραγωγίσιμες τουλάχιστον κ φορές (τύπος του Leibniz).

6) Έστω $f(x)$, $a < x < \infty$, μια συνάρτηση και $A, B \in \mathbb{R}$. Η ευθεία $y = Ax + B$ λέγεται ασύμπτωτος, για $x \to +\infty$ του γραφήματος της f αν $\lim\limits_{x \to \infty} \{f(x) - (Ax+B)\} = 0$

α) Βρείτε την ασύμπτωτο, αν υπάρχει, της $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $x > 0$.

β) Ορίστε κατ' αναλογίαν ασύμπτωτες για $x \to -\infty$ και δώστε παράδειγμα.

γ) Πότε η ευθεία $x = A$ θα λέγεται ασύμπτωτη του γραφήματος μιας f; Προτείνετε έναν ορισμό που να συνεπάγεται ότι η $x = 0$ είναι ασύμπτωτη της $f(x) = \dfrac{1}{x}$ και βρείτε τις ασυμπτώτους της $\tan x$.

7) Βρῆτε τὶς παραγώγους τῶν συναρτήσεων:
$e^{\sin^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$, $(\log x)^{(\log x)^2}$, $x > 0$, x^x, $x > 0$, $x^{(x^x)}$, $x > 0$

8) Δίνεται ὅτι ἡ συνάρτηση f εἶναι ἀσυνεχὴς στὸ $x = 0$ καὶ ὅτι ἡ $g'(0)$ δὲν ὑπάρχει. α) Εἶναι σωστὴ ἢ ὄχι ἡ πρόταση: "Ἡ $f+g$ εἶναι ἀσυνεχὴς στὸ $x=0$". Ἂν εἶναι σωστὴ δῶστε ἀπόδειξη, ἂν ὄχι δῶστε ἀντιπαράδειγμα. β) Μὲ

τό ἴδιο προϋπόθεση), ἴδια ἐρώτηση γιά τήν πρόταση "Η $(fg)'$ δέν ὑπάρχει στό $x=0$".

9) Ἡ f εἶναι παραγωγίσιμη στό $(0,\infty)$ καί $\lim f'(x)=0$, $x\to+\infty$. Δεῖξτε ὅτι $\lim\{f(x+1)-f(x-1)\}=0$, $x\to+\infty$

10) Βρῆτε τίς ἐφαπτόμενες τῆς παραβολῆς $y=x^2+1$ ποὺ περνᾶνε ἀπό τήν ἀρχή $(0,0)$. Ποῦ τέμνει τόν ἄξονα τῶν x ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἴδιας παραβολῆς στό σημεῖο $(1,2)$;

11) Ἔστωσαν $(x_n,0)$, $(0,y_n)$ τά σημεῖα τομῆς τῶν ἐφαπτομένων τῆς $y=x^3$ στά σημεῖο (n,n^3), $n\in N$. Βρῆτε τά ὅρια $\lim x_n$, $\lim y_n$.

12) α) Δεῖξτε τούς τύπους τῶν σελίδων 145-146.

13) Βρῆτε τό μεγαλύτερο διάστημα τῆς μορφῆς $(-a,a)$ μέ τήν ἰδιότητα: "Η συνάρτηση $f(x)=(\sin x)(\cos x)$ ἔχει ἀντίστροφο στό $(-a,a)$". Βρῆτε τήν ἀντίστροφη τῆς f καί τήν παράγωγό της.

14) Ὑποθέτουμε ὅτι οἱ συναρτήσεις $f_1(x),\dots,f_n(x)$ ἔχουν παραγώγους τουλάχιστον n-τάξης σέ ἕνα διάστημα (α,β). Γράφουμε

$$W(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

($g^{(\lambda)}(x)$ σημαίνει τήν παράγωγο λ τάξης τῆς g)

Δεῖξτε ὅτι

$$\frac{dW}{dx}=\begin{vmatrix} f_1(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-2)}(x) & & f_n^{(n-2)}(x) \\ f_1^{(n)}(x) & & f_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

<u>Παρατήρηση</u> Ἡ ὁρίζουσα $W(x)$ λέγεται ὁρίζουσα τοῦ Wronski καί ἔχει ἐφαρμογές στή θεωρία τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων.

15). Δῶστε παραδείγματα (μέ συγκεκριμένο τύπο, ὄχι ἁπλά γραφικές παραστάσεις) στοιχειωδῶν συναρτήσεων (πολυώνυμα, τριγωνομετρικές, ἐκθετικές, ...) f, g, h, q τέτοιων ὥστε

α) $f(-1)=0$, $f(2)=1$, $f'(1)>0$ β) $g(-1)=0$, $g(2)=1$, $g'(1)<0$

γ) $h(k)=0$, $k\in Z$, $|h(x)|<\frac12$, $x\in R$, $h(\frac12)\neq 0$

δ) $g(0)=0$, $g(3)=1$, $g'(1)=0$ καί ή g εἶναι γνήσια αὔξουσα στό $[0,3]$.

16) α) Βρῆτε, ὅπου ὑπάρχουν τίς παραγώγους τῶν συναρτήσεων
$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, $\operatorname{arccot}\frac{1+x}{1-x}$, $\log\{\tanh^{-1}(\tan\frac{x}{2})\}$.

β) Βρῆτε τίς 6' παραγώγους τῶν συναρτήσεων: $e^{x^2}\log x$, $e^{2x}\sin(3x+\frac{\pi}{6})$.

17) Δεῖξτε τούς τύπους: α) $\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$,
β) $\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$, γ) $\tanh 2x=\frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$, $\left(-\frac{x}{8}+\frac{1}{32}\sinh(4x)\right)'=(\sinh x\cosh x)^2$.

18) Ἄν $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, τότε ή $f'(x)$ ἔχει ἀκριβῶς τρεῖς διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

19) Δεῖξτε ὅτι ή ἐξίσωση $e^x=1+x$ ἔχει ἀκριβῶς μία πραγματική ρίζα· ποιά;

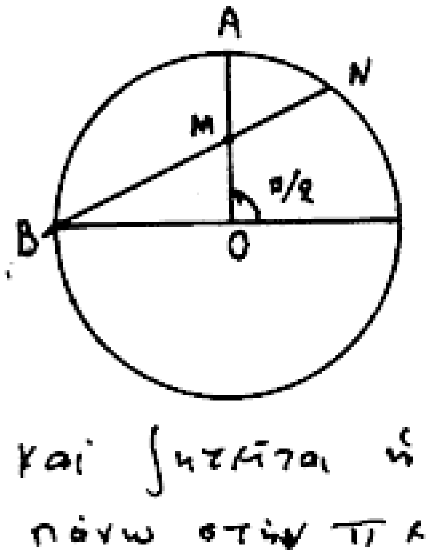
20) Δεῖξτε τό β' μέρος τοῦ θεωρήματος τῆς σελ. 106.

21) Δίνεται $b_n=1+\frac{1}{(2!)^2}+\cdots+\frac{1}{(n!)^2}$. Δεῖξτε ὅτι ή b_n συγκλίνει σέ ἕνα ἄρρητο ἀριθμό.

22) α) Δεῖξτε ὅτι ή ἐξίσωση $\tan x=x$ ἔχει ἄπειρες ρίζες καί μάλιστα ἀκριβῶς μία σέ κάθε διάστημα τῆς μορφῆς:
$I_k=(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2})$, $k\in\mathbb{Z}$.

β) Γράφουμε a_k γιά τή ρίζα στό διάστημα I_k, $k=1,2,\dots$. Βρῆτε, ἄν ὑπάρχῃ, τό $\lim(a_{k+1}-a_k)$ καί δῶστε γεωμετρική ἑρμηνεία τοῦ ἀποτελέσματός σας.

23) Ἕνα κινητό Μ κινεῖται ἰσοταχῶς ἀπό τό Α πρός τό Ο μέ ταχύτητα 1m/sec. Ἡ ἀκτίνα ΟΑ τοῦ κύκλου εἶναι 1m. Στή θέση Β βρίσκεται μιά φωτεινή πηγή καί ζητεῖται ή ταχύτητα τῆς σκιᾶς Ν τοῦ σημείου Μ πάνω στήν περιφέρεια.



24) Δεῖξτε τό παρακάτω χρήσιμο **Θεώρημα**: "Ἄν ή f εἶναι συνεχής καί μονότονη σέ ἕνα διάστημα I, τότε ή εἰκόνα μέσω τῆς f ὁποιουδήποτε διαστήματος $J\subset I$ εἶναι ἐπίσης ἕνα διάστημα".

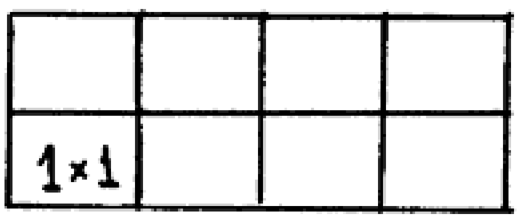
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ον. ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ RIEMANN

Ο Απειροστικός Λογισμός λέγεται συχνά "Διαφορικός και ολοκληρωτικός Λογισμός". Ο όρος διαφόριση, για συναρτήσεις μιας μεταβλητής, είναι ταυτόσημος με τον όρο παραγώγιση (βλ. § 4.2.2). Η "ο λ ο κ λ ή ρ ω σ η", ένα μέρος της οποίας θα μελετήσουμε στη συνέχεια, δικαιολογεί τον όρο Ολοκληρωτικός Λογισμός. Οι αρχές της "ολοκλήρωσης" ανάγονται στη μέθοδο της "εξάντλησης" που χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι για την εύρεση όγκων και εμβαδών. Στο έργο π.χ. του Αρχιμήδη "Τετραγωνισμός της παραβολής", που αναφέραμε και προηγούμενα, αναπτύσσονται με θαυμαστή ακρίβεια οι βασικές έννοιες της ολοκλήρωσης. Στους μαθηματικούς της Αναγέννησης, ειδικότερα στο Newton, οφείλουμε τη σύνδεση μεταξύ παραγώγισης και ολοκλήρωσης. Το όνομα του μεγάλου Γερμανού μαθηματικού Riemann (μέσα 19ου αιώνα) υπάρχει στου τίτλο, γιατί υπάρχουν διάφορες θεωρίες ολοκλήρωσης και αυτή που θα μας απασχολήσει οφείλεται βασικά σ'αυτόν.

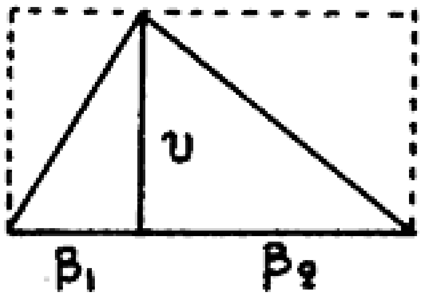
5.1 Το πρόβλημα του εμβαδού

5.1.1 Η μέθοδος της εξάντλησης

Σαν εμβαδό ενός επιπέδου σχήματος Α θεωρούμε τον αριθμό που προκύπτει όταν συγκρίνουμε το Α με ένα τετράγωνο πλευράς 1. Κατ' αρχήν δηλ. αποδίδουμε εμβαδόν 1 σ' αυτό το τετράγωνο (είτε περιέχει είτε όχι τις πλευρές του) και αποδεχόμαστε ότι η ένωση δύο ή περισσοτέρων απλών σχημάτων (ορθογώνια, τρίγωνα, πολύγωνα, ...) με "ξένα εσωτερικά" είναι το άθροισμα των εμβαδών των αντίστοιχων σχημάτων. Έτσι οδηγούμαστε εύκολα στον τύπο για το εμβαδόν ορθογωνίων με ρητές πλευρές. Η περίπτωση τυχαίου ορθογωνίου ανάγεται σ' αυτήν, αν προσεγγίσουμε τις πλευρές με ρητούς, π.χ με μια πεπερασμένη δεκαδική παράστασή τους. Με ένα απλό τέχνασμα βρίσκουμε επίσης τον τύπο για το εμβαδόν τριγώνου (βλ. σχ. 46)



$E = 4 \cdot 2 = 8$

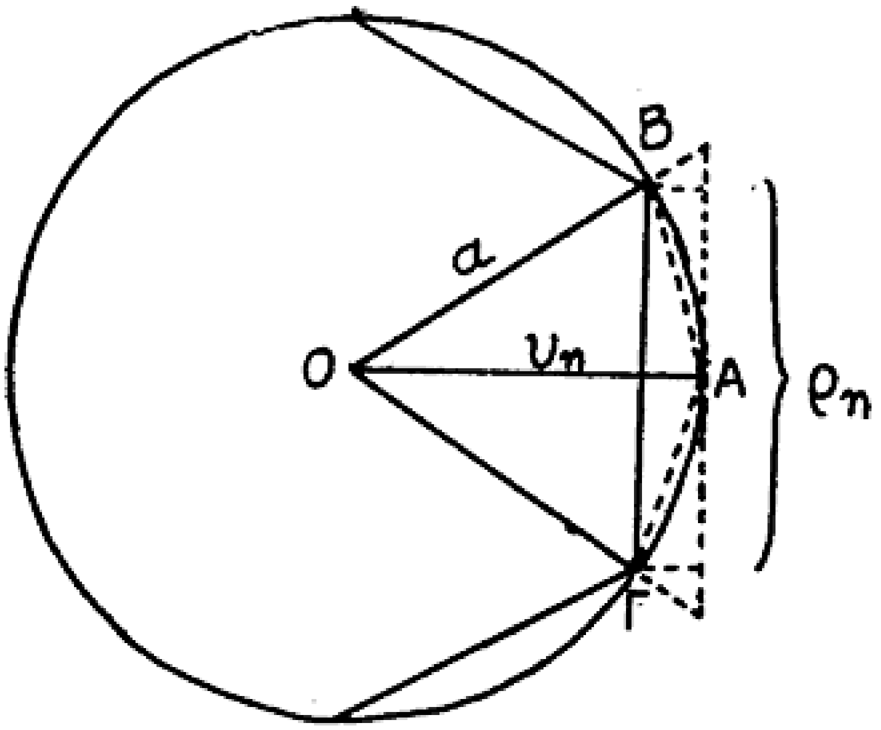


$\beta_1 + \beta_2 = \beta \qquad E = \frac{1}{2}(\beta_1 \upsilon_1) + \frac{1}{2}(\beta_2 \upsilon_2) =$

Σχ. 46

$= \frac{1}{2}\beta\upsilon.$

Η περίπτωση του κύκλου είναι τυπική της μεθόδου της εξάντλησης. Ας είναι a η ακτίνα του κύκλου, υ_n το ύψος και ϱ_n η πλευρά κανονικού πολυγώνου με 2^n πλευρές εγγεγραμμένου στον κύκλο.



Σχ. 47

Όπως φαίνεται εύκολα από το σχήμα, αν Ε είναι το εμβαδόν του κύκλου τότε:

$$2^n \frac{1}{2} \upsilon_n \varrho_n < E < 2^n \left\{ \frac{1}{2} \upsilon_n \varrho_n + (a-\upsilon_n)\varrho_n \right\}$$

Η ακολουθία $\left\{ \frac{1}{2} 2^n \upsilon_n \varrho_n \right\}$ είναι προφανώς αύξουσα (το πολύγωνο με 2^{n+1} πλευρές θα περιέχει επι πλέον 2^n τρίγωνα της μορφής ΑΒΓ) και φράσσεται από το Ε. Από την άλλη μεριά $0 < E - \frac{1}{2} 2^n \upsilon_n \varrho_n <$

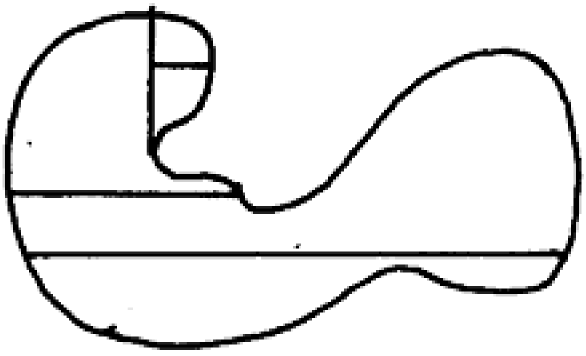
$$< 2^n (a-\upsilon_n)\varrho_n = (a-\upsilon_n) s_n < (a-\upsilon_n) s ,$$

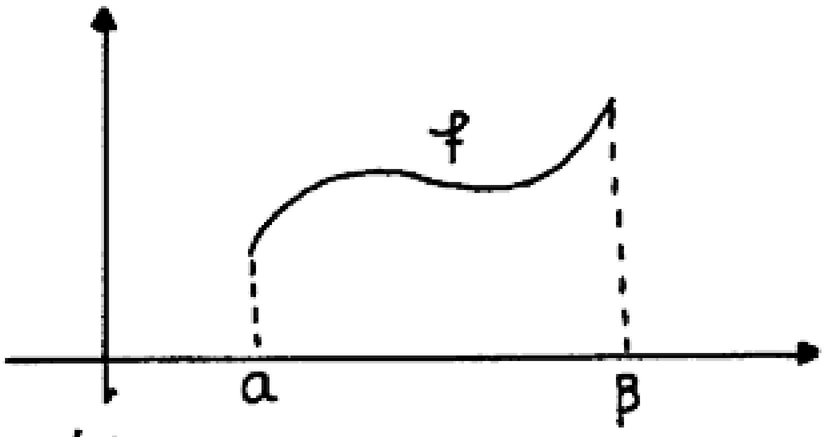
όπου s_n η περίμετρος του πολυγώνου και s η περιφέρεια του κύκλου. Προφανώς όμως $(a-\upsilon_n) \to 0$, οπότε

$$\frac{1}{2} \upsilon_n (2^n \varrho_n) = \frac{1}{2} \upsilon_n s_n \to E \ , \ n \to \infty .$$

Παρατηρώντας τώρα ότι το U_n συγκλίνει στο a και το S_n στο S (αν θέλετε έτσι ορίζουμε το μήκος της περιφέρειας), φτάνουμε στο συμπέρασμα $E = \frac{1}{2} a S$.

Φυσικά θα ήταν μάταιο να επινοεί κανείς και από μία μέθοδο για κάθε σχήμα. Για τα συνηθισμένα γεωμετρικά σχήματα εύκολα βλέπει κανείς, ότι θα αρκούσε να έχει μια γενική μέθοδο για να βρίσκει εμβαδά "κάτω" από το γράφημα μιας θετικής φραγμένης συνάρτησης f.





Σχ. 48

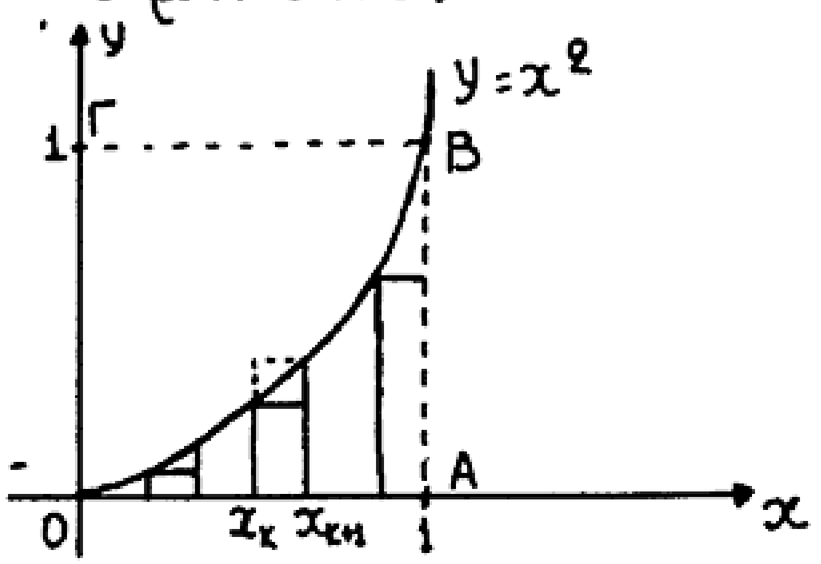
Το εμβαδόν του αριστερά σχήματος π.χ. είναι άθροισμα 5 εμβαδών σχημάτων τέτοιας μορφής. Με τον όρο "κάτω από το γράφημα μιας θετικής f" εννοούμε το σύνολο $\{(x,y) : a \leq x \leq \beta \text{ και } 0 \leq y \leq f(x)\}$. Το σύμβολο που θα χρησιμοποιούμε γι' αυτό το εμβαδόν θα είναι $\int_a^\beta f(t)\,dt$ και θα το ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Το σύμβολο αυτό θα το ορίσουμε με τρόπο που να έχει νόημα και για όχι αναγκαστικά θετικές συναρτήσεις. Δεν θα ορίζεται όμως για όλες τις συναρτήσεις. Εκείνες για τις οποίες ορίζεται θα λέγονται Riemann-ολοκληρώσιμες.

Πριν ξεκινήσουμε τη γενική θεωρία θα δώσουμε ακόμη ένα παράδειγμα. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας τη σημερινή γλώσσα των Μαθηματικών, θα μελετήσουμε ένα πρόβλημα που απασχόλησε τον Αρχιμήδη τον 3ο αιώνα π.Χ. Θα μακρυγορήσουμε λίγο σ' αυτό το παράδειγμα με σκοπό να προετοιμάσουμε καλύτερα το έδαφος για τη γενική περίπτωση.

5.1.2 <u>Ο τετραγωνισμός της παραβολής</u>

<u>Θεώρημα</u>: (Αρχιμήδης)

"Το εμβαδόν του χωρίου ΟΑΒ μεταξύ της παραβολής $f(x) = x^2$, του άξονα των x και της ευθείας $x = 1$ ισούται με



Σχ. 49

το $^1/_3$ του εμβαδού του ορθογωνίου ΟΑΒΓ".

Ας χωρίσουμε το διάστημα $[0,1]$ σε υποδιαστήματα $[x_0, x_1)$, $[x_1, x_2)$, ... $[x_{n-1}, x_n]$ παίρνοντας τα σημεία $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ τέτοια ώστε $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$. Σε κάθε διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ ισχύει $x_k^2 \leqslant x^2 \leqslant x_{k+1}^2$ για $x \in [x_k, x_{k+1}]$ και επομένως το αντίστοιχο κομμάτι του εμβαδού που ζητάμε θα είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του ορθογωνίου με βάση $[x_k, x_{k+1}]$ και ύψος x_k^2 και μικρότερο από το εμβαδόν του ορθογωνίου με την ίδια βάση και ύψος x_{k+1}^2. Αν λοιπόν ονομάσουμε Ε το ζητούμενο εμβαδόν, θα έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k-1} - x_k) x_k^2 < E < \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k-1} - x_k) x_{k+1}^2$$

Ας γράψουμε $\underline{\Sigma}(\Delta)$ για το αριστερά άθροισμα και $\overline{\Sigma}(\Delta)$ για το δεξιά. Το Δ αντιστοιχεί στη "διαμέριση" $\{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ του $[0,1]$ που θεωρήσαμε.

Το σύνολο $\{\underline{\Sigma}(\Delta) : \Delta$ "διαμέριση" του $[0,1]\}$ είναι προφανώς μη κενό και φραγμένο προς τα πάνω, π.χ από το Ε, οπότε και από το $\overline{\Sigma}(\Delta')$ για οποιαδήποτε Δ'. Υπάρχει λοιπόν το supremum αυτού του συνόλου. Γράφουμε:

$$\underline{\int_0^1} x^2 dx = \sup\left\{ \underline{\Sigma}(\Delta) : \Delta \text{ διαμέριση του } [0,1] \right\}$$

και ονομάζουμε το $\underline{\int_0^1} x^2 dx$ "κάτω Darboux ολοκλήρωμα" της x^2 στο $[0,1]$ (Ο Darboux ήταν Γάλλος Γεωμέτρης του $19^{ου}$ αιώνα).

Όμοια ορίζουμε το "πάνω Darboux ολοκλήρωμα"

$$\overline{\int_0^1} x^2 dx = \inf\left\{ \overline{\Sigma}(\Delta) : \Delta \text{ διαμέριση του } [0,1] \right\}$$

Θα έχουμε προφανώς:

$$\underline{\int_0^1} x^2 dx \leqq E \leqq \overline{\int_0^1} x^2 dx$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι:

$\overline{\int_0^1} x^2 dx = \underline{\int_0^1} x^2 dx$. Στην περίπτωση αυτή θα γράφουμε $\int_0^1 x^2 dx$ για την κοινή αυτή τιμή και θα την ονομάζουμε το Riemann ολοκλήρωμα της x^2 στο $[0,1]$.

Ας παρατηρήσουμε κατ' αρχήν ότι για οποιαδήποτε διαμέριση Δ,

$$\underline{\Sigma}(\Delta) \leqq \underline{\int_0^1} x^2 dx \leqq \overline{\int_0^1} x^2 dx \leqq \overline{\Sigma}(\Delta)$$

και επομένως:

$$0 \leqq \overline{\int_0^1} x^2 dx - \underline{\int_0^1} x^2 dx \leqq \overline{\Sigma}(\Delta) - \underline{\Sigma}(\Delta).$$

Αν λοιπόν για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε Δ τέτοια ώστε:

$\overline{\Sigma}(\Delta) - \underline{\Sigma}(\Delta) < \varepsilon$ θα έχουμε τελειώσει. Αυτό όμως είναι αρκετά εύκολο.

Παίρνουμε $\Delta = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n}{n} = 1\right\}$,

$n \in \mathbb{N}$ και έχουμε

$$\underline{\Sigma}(\Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) \frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2,$$

$$\overline{\Sigma}(\Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) \frac{(k+1)^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n} k^2,$$

και επομένως $\overline{\Sigma}(\Delta) - \underline{\Sigma}(\Delta) = \frac{1}{n^3} n^2 = \frac{1}{n}$

Αρκεί λοιπόν να πάρουμε $n > \frac{1}{\varepsilon}$ για να έχουμε $\overline{\Sigma}(\Delta) - \underline{\Sigma}(\Delta) < \varepsilon$.

Αν τώρα θυμηθούμε ότι:

$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (δώστε απόδειξη με επαγωγή), βλέπουμε ότι έχουμε δείξει:

$$\frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2}{n^3} < E < \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

δηλ. $\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{n} < E <$

$$< \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

Οι ακολουθίες αριστερά και δεξιά συγκλίνουν στο $\frac{1}{3}$ · επομένως $\frac{1}{3} \leq E \leq \frac{1}{3}$, δηλ. $E = \frac{1}{3}$, που είναι ακριβώς αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

5.2 Ορισμός και βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος.

5.2.1 Ο ορισμός του Darboux.

Έχοντας για οδηγό το προηγούμενο παράδειγμα, θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα Riemann, για φραγμένες συναρτήσεις, σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ (Δεν υποθέτουμε τώρα ότι οι συναρτήσεις είναι $\geqslant 0$).

Δίνουμε πρώτα μερικούς ορισμούς.

Ένα πεπερασμένο σύνολο $\Delta=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ τέτοιο ώστε $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=\beta$ ονομάζεται **διαμέριση** του $[a,\beta]$. **Πλάτος** της διαμέρισης Δ ονομάζουμε τον αριθμό $d(\Delta)=\max\{|x_1-x_0|, |x_2-x_1|, \ldots, |x_n-x_{n-1}|\}$

Το σύνολο των διαμερίσεων του $[a,\beta]$ θα το συμβολίζουμε με $\mathcal{D}([a,\beta])$ ή απλά $\mathcal{D}$, αν δεν υπάρχει κίνδυνος συγχύσεως. Μια διαμέριση Δ' λέγεται **εκλέπτυνση** μιας διαμέρισης Δ, αν $\Delta'\supset\Delta$. Λέμε ακόμη ότι η Δ' είναι **λεπτότερη** από την Δ. Με άλλα λόγια, περνάμε από μία διαμέριση Δ σε μια εκλέπτυνση της, αν της προσθέσουμε και άλλα διαιρετικά σημεία.

Ιδού μια απλή και χρήσιμη ιδιότητα των διαμερίσεων: **Αν** Δ, Δ' δύο διαμερίσεις του $[a,\beta]$ τότε το σύνολο $\Delta\cup\Delta'$ είναι μία εκλέπτυνση και των δύο. Κάθε άλλη εκλέπτυνση και των δύο περιέχει την $\Delta\cup\Delta'$. Η απόδειξη είναι τετριμμένη.

Έστω τώρα f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $\Delta=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}\in\mathcal{D}([\alpha,\beta])$. Σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\dots$ $\dots,[x_{n-2},x_{n-1}],[x_{n-1},x_n]$ η f είναι φραγμένη και προς τα πάνω και προς τα κάτω. Ονομάζουμε m_k και M_k αντίστοιχα το inf και το sup των τιμών της σ' αυτά τα διαστήματα, δηλ. ορίζουμε:

$m_k=\inf\{f(x): x_k\leq x\leq x_{k+1}\}$,

$M_k=\sup\{f(x): x_k\leq x\leq x_{k+1}\}$, $k=0,1,\dots,n-1$.

Ορίζουμε τώρα για κάθε διαμέριση Δ το κάτω και το πάνω αθροισμα της f με τους τύπους:

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta)=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\,m_k ,$$

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta)=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\,M_k .$$

Η ανισότητα $\underline{\Sigma}(f,\Delta)\leq\overline{\Sigma}(f,\Delta)$ είναι προφανής. Ισχύει και κάτι παραπάνω: 'Αν $\Delta,\Delta'\in\mathcal{D}$ τότε $\underline{\Sigma}(f,\Delta)\leq\overline{\Sigma}(f,\Delta')$"

'Αρκεί να δείξουμε ότι "$\Delta'\supset\Delta$ συνεπάγεται $\underline{\Sigma}(f,\Delta)\leq\underline{\Sigma}(f,\Delta')$ και $\overline{\Sigma}(f,\Delta')\leq\overline{\Sigma}(f,\Delta)$", διότι τότε θα έχουμε

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta)\leq\underline{\Sigma}(f,\Delta\cup\Delta')\leq\overline{\Sigma}(f,\Delta\cup\Delta')\leq\overline{\Sigma}(f,\Delta').$$

Μένει λοιπόν να δείξουμε την τελευταία υπογραμμισμένη πρόταση. Η σχέση $\Delta' \supset \Delta$ σημαίνει ότι η Δ' έχει περισσότερα ή τα ίδια διαιρετικά σημεία με την Δ. Αρκεί λοιπόν να εξετάσουμε την περίπτωση που η Δ' έχει ένα παραπάνω διαιρετικό σημείο. Έστω λοιπόν ότι $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ και $\Delta' = \{x_0, \ldots, x_k, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\}$, δηλ. η Δ' έχει παραπάνω το σημείο y_k με $x_k < y_k < x_{k+1}$

Αν γράψουμε

$$m_k' = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq y_k\}$$

$$m_k'' = \inf\{f(x) : y_k \leq x \leq x_{k+1}\}$$

$$M_k' = \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq y_k\}$$

$$M_k'' = \sup\{f(x) : y_k \leq x \leq x_{k+1}\} ,$$

θα έχουμε:

$$\underline{\Sigma}(f, \Delta') - \underline{\Sigma}(f, \Delta) = m_k'(y_k - x_k) + m_k''(x_{k+1} - y_k) -$$

$$- m_k(x_{k+1} - x_k) = (m_k' - m_k)(y_k - x_k) +$$

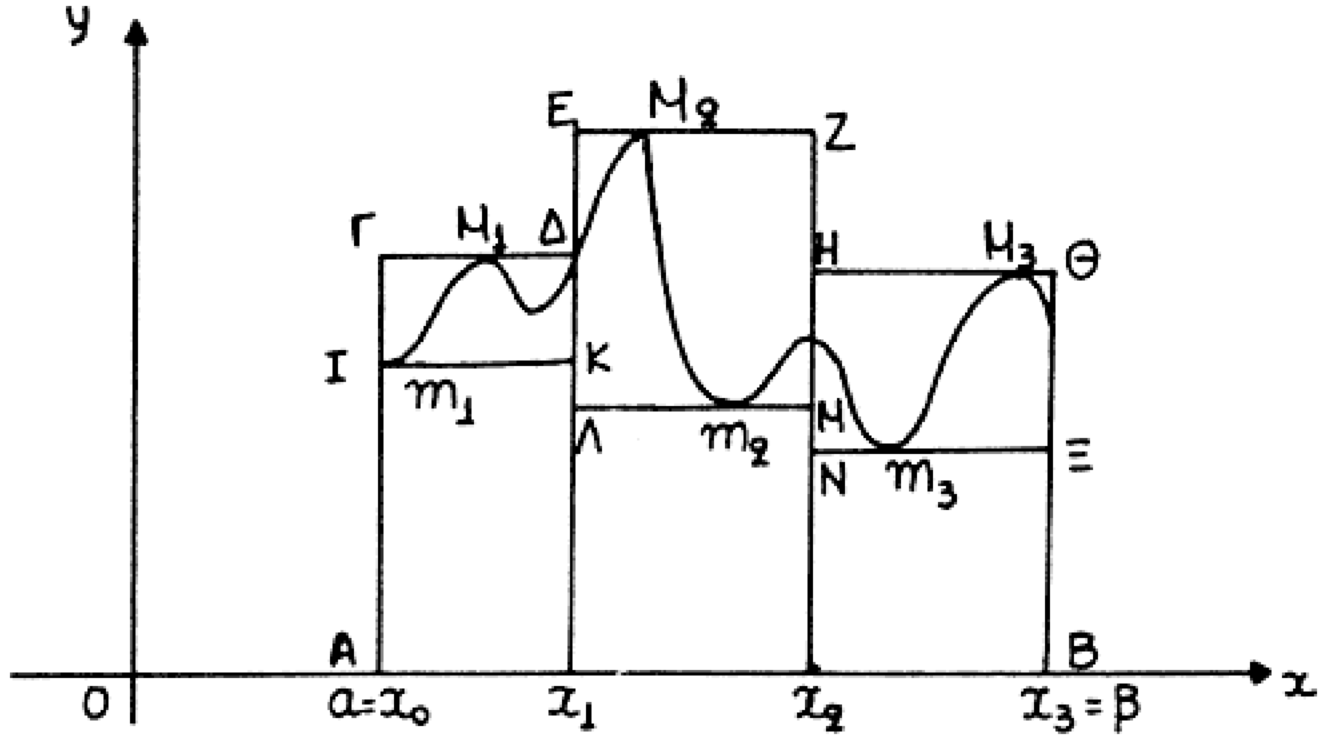
$$+ (m_k'' - m_k)(x_{k+1} - y_k) \geq 0 ,$$

διότι προφανώς $m_k' \geq m_k$ και $m_k'' \geq m_k$, δηλ. $\underline{\Sigma}(f, \Delta') \geq \underline{\Sigma}(f, \Delta)$.

Εντελώς παρόμοια αποδεικνύεται ότι

$\overline{\Sigma}(f,\Delta') \leqq \overline{\Sigma}(f,\Delta)$.

Η γεωμετρική σημασία των όσων είπαμε μέχρι τώρα είναι απλούστατη, αν σκεφτούμε και πάλι το πρόβλημα του εμβαδού κάτω από το γράφημα μιας $f \geqslant 0$. Το $\underline{\Sigma}(f,\Delta)$ παριστάνει το εμβαδόν μιας ένωσης ορθογωνίων που "προσεγγίζει από κάτω" το ζητούμενο εμβαδόν και το $\overline{\Sigma}(f,\Delta)$ δίνει αντίστοιχη "προσέγγιση" από πάνω (βλ σχ. 50).



$\overline{\Sigma}(f,\Delta) = (x_1-x_0)M_1+(x_2-x_1)M_2+(x_3-x_2)M_3 =$
$= \text{εμβ}(\mathrm{ΑΓΔΕΖΗΘΒΑ})$

$\underline{\Sigma}(f,\Delta) = (x_1-x_0)m_1+(x_2-x_1)m_2+(x_3-x_2)m_3 =$
$= \text{εμβ}(\mathrm{ΑΙΚΛΜΝΞΒΑ})$

Σχ. 50

Το σύνολο $\{\underline{\Sigma}(f,\Delta) : \Delta \in \mathcal{D}\}$ είναι προφανώς μη κενό και φραγμένο προς τα πάνω, διότι οποιοδήποτε $\overline{\Sigma}(f,\Delta)$ είναι ένα άνω φράγμα του. Υπάρχει λοιπόν το supremum αυτού του συνόλου (αξίωμα συνεχείας). Θα το συμβολίζουμε με $\underline{\int_a^\beta} f$ ή $\underline{\int_a^\beta} f(x)dx$ και θα το καλούμε κάτω Darboux ολοκλήρωμα της f στο $[a,\beta]$.

Το σύνολο $\{\overline{\Sigma}(f,\Delta) : \Delta \in \mathcal{D}\}$ είναι προφανώς μη κενό και φραγμένο προς τα κάτω, διότι κάθε $\underline{\Sigma}(f,\Delta)$ π.χ. είναι κάτω φράγμα του. Υπάρχει λοιπόν το infimum αυτού του συνόλου. Θα το συμβολίζουμε με $\overline{\int_a^\beta} f$ ή $\overline{\int_a^\beta} f(x)dx$ και θα το καλούμε πάνω Darboux ολοκλήρωμα της f στο $[a,\beta]$.

Δίνουμε τώρα τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann μιας φραγμένης συνάρτησης.

<u>Ορισμός</u> (Darboux). Μία φραγμένη συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα

$[a,\beta]$, λέγεται Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,\beta]$, αν $\overline{\int_a^\beta} f = \underline{\int_a^\beta} f$. Η κοινή αυτή τιμή λέγεται Riemann ολοκλήρωμα της f και συμβολίζεται με $\int_a^\beta f$ ή $\int_a^\beta f(x)\,dx$.

Ο ορισμός που δώσαμε και η συζήτηση που προηγήθηκε δίνει σχεδόν άμεσα μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την Riemann ολοκληρωσιμότητα μιας συνάρτησης f.

<u>Θεώρημα</u>: "Μία φραγμένη συνάρτηση f ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[a,\beta]$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν, και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\Delta\in\mathcal{D}([a,\beta])$ τέτοιο ώστε

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta) - \underline{\Sigma}(f,\Delta) < \varepsilon\text{''}.$$

<u>Απόδειξη</u>: Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι R-ολοκληρώσιμη, οπότε

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta') + \frac{\varepsilon}{2} > \underline{\int_a^\beta} f = \overline{\int_a^\beta} f > \overline{\Sigma}(f,\Delta'') - \frac{\varepsilon}{2}$$

γιά κάποιες διαμερίσεις Δ', Δ'' (γιατί;).

Αν τώρα $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ είναι ~~η~~ μια κοινή εκλέπτυνση των Δ', Δ'', τότε η τελευταία ανισότητα και οι ανισότητες: $\overline{\Sigma}(f,\Delta'') > \overline{\Sigma}(f,\Delta)$, $\underline{\Sigma}(f,\Delta') < \underline{\Sigma}(f,\Delta)$, που δείξαμε προηγουμένως συνεπάγονται $\underline{\Sigma}(f,\Delta) + \frac{\varepsilon}{2} > \overline{\Sigma}(f,\Delta) - \frac{\varepsilon}{2}$, δηλ.

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta) - \underline{\Sigma}(f,\Delta) < \varepsilon .$$

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\Delta \in \mathcal{D}$ τέτοιο ώστε $\overline{\Sigma}(f,\Delta) - \underline{\Sigma}(f,\Delta) < \varepsilon$, τότε οι προφανείς ανισότητες:

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta) \leqq \underline{\int_a^\beta} f \leqq \overline{\int_a^\beta} f \leqq \overline{\Sigma}(f,\Delta)$$

συνεπάγονται

$$0 \leqq \overline{\int_a^\beta} f - \underline{\int_a^\beta} f \leqq \overline{\Sigma}(f,\Delta) - \underline{\Sigma}(f,\Delta) < \varepsilon$$

και επομένως

$$\underline{\int_a^\beta} f = \overline{\int_a^\beta} f .$$

Πριν προχωρήσουμε, ας δώσουμε ένα παράδειγμα μιας φραγμένης συνάρτησης που δεν είναι R-ολοκληρώσιμη.

Η συνάρτηση του Dirichlet

$\chi_{\mathbb{Q}}$, περιορισμένη στο διάστημα $[0,1]$, δηλ. η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}1 & x \text{ ρητός στο } [0,1]\\ 0 & x \text{ άρρητος στο } [0,1]\end{cases}$$

δεν είναι R-ολοκληρώσιμη.

Πραγματικά, για οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta=\{0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1\}$ του $[0,1]$, $M_k=1$ και $m_k=0$, διότι σε κάθε διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ υπάρχουν και ρητοί και άρρητοι αριθμοί. Συνάγουμε λοιπόν ότι: $\underline{\Sigma}(f,\Delta)=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\cdot 0=0$

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta)=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\cdot 1=1-0=1$$ και

επομένως $\underline{\int_0^1} f=0<1=\overline{\int_0^1} f$, δηλαδή η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

5.2.2 Ο ορισμός του Riemann

Ας γυρίσουμε για λίγο στο πρόβλημα του εμβαδού. Διαισθητικά τουλάχιστον μπορούμε να προσεγγίσουμε το εμβαδόν κάτω από το γράφημα μιας $f\geq 0$ ορισμένης στο $[\alpha,\beta]$, χωρίς να ασχοληθούμε με τα $\overline{\Sigma}$ και $\underline{\Sigma}$. Αλλά για κάθε διαμέριση $\Delta=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=\beta\}$ παίρνουμε μια τυχαία επιλογή σημείων $\Xi=\{\xi_0,\dots,\xi_{n-1}\}$ τέτοια ώστε $x_k\leq\xi_k\leq x_{k+1}$, $k=0,1,\dots,n-1$ και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$\Sigma(f,\Delta,\Xi)=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f(\xi_k)$$

Περιμένουμε τώρα ότι αν το πλάτος d της διαμέρισης (υπενθυμίζουμε τόν ορισμό τοῦ d: $d=\max\{x_1-x_0,\dots,x_n-x_{n-1}\}$) τείνει στο 0, τότε το $\Sigma(f,\Delta,\Xi)$ θα τείνει στο εμβαδόν που ζητάμε. Ένας "εύλογος" λοιπόν ορισμός για το $\int_a^\beta f$ θα ήταν:

$$\int_a^\beta f=\lim_{d\to 0}\Sigma(f,\Delta,\Xi).$$

Δυστυχώς ο ορισμός αυτός δεν έχει νόημα και πρέπει να καταλάβουμε καλά το γιατί. Ο λόγος είναι απλά ότι δεν έχουμε ορίσει έννοια ορίου της μορφής $\lim_{d\to 0}\Sigma(f,\Delta,\Xi)$. Με όσα έχουμε πει, μόνο αν το $\cancel{\Sigma(f,\Delta)}$ $\Sigma(f,\Delta,\Xi)$ ήταν μια συνάρτηση του d θα μπορούσαμε να μιλήσουμε για όριο. Αλλά το $\Sigma(f,\Delta,\Xi)$ κάθε άλλο παρά τέτοια συνάρτηση είναι· πραγματικά όπως έπεται από τον ορισμό του, εξαρτάται από την διαμέριση Δ, δηλ. μια n-αδα x_0, x_1, ..., x_n πραγματικών αριθμών και από την επιλογή $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$, δηλ. ακόμη μια n-αδα. Και για να πούμε όλη την αλήθεια η κατάσταση είναι ακόμη χειρότερη, γιατί τα $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ εξαρτώνται από τα $x_0, \ldots, x_n$, αφού πρέπει $x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1}$. Οι μαθηματικοί έφτιαξαν θεωρία που καλύπτει αυτές τις περιπτώσεις (θεωρία δικτύων, ή σύγκλιση Moore-Smith), αλλά δεν χρειάζεται να φτάσουμε σ' αυτήν. Αρκεί να θυμηθούμε τον "εψιλοντικό" ορισμό του ορίου και, χρησιμοποιώντας τον σαν μοντέλο, να περιγράψουμε τι θα θέλαμε να είναι το "$\lim\limits_{d\to 0} \Sigma(f,\Delta,\Xi)$". Το αποτέλεσμα είναι ο επόμενος ορισμός:

<u>Ορισμός</u> (Riemann): Μία φραγμένη συνάρτηση f ορισμένη στο κλειστό διάστημα

$[\alpha,\beta]$, λέγεται ολοκληρώσιμη σ' αυτό, αν υπάρχει ένας αριθμός I που θα τον γράφουμε $\int_\alpha^\beta f$ και θα τον ονομάζουμε ολοκλήρωμα της f στο $[\alpha,\beta]$, τέτοιος ώστε για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ με την ιδιότητα: Για κάθε διαμέριση:
$\Delta=\{\alpha=x_0<x_1<\cdots<x_n=\beta\}$ και κάθε επιλογή $\Xi=\{\xi_0,\dots,\xi_{n-1}\}$ με
$x_k\leqq\xi_k\leqq x_{k+1}$, $k=0,\dots,n-1$ να ισχύει: (πλάτος $\Delta=$) $d<\delta\Rightarrow$

$$\Rightarrow\ \left|\Sigma(f,\Delta,\Xi)-\int_\alpha^\beta f\right|<\varepsilon.$$

Ο ορισμός του Riemann υπήρξε ο πρώτος ιστορικά ακριβής ορισμός του ολοκληρώματος. Θα βασίσουμε την ανάπτυξη της θεωρίας στον ορισμό του Darboux, που είναι εννοιολογικά απλούστερος, και θα αναβάλουμε για αργότερα την απόδειξη της ισοδυναμίας των δύο ορισμών.

5.2.3 Η ολοκληρωσιμότητα των μονοτόνων και συνεχών συναρτήσεων.

Το κριτήριο που δώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο θα μας βοηθήσει να δείξουμε την ολοκληρωσιμότητα τόσο των μονότονων όσο και των συνεχών συναρτήσεων.

Μονότονες συναρτήσεις. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα στο $[a,\beta]$. Διαλέγουμε σαν Δ τη διαμέριση που αντιστοιχεί σε χωρισμό του $[a,\beta]$ σε n ίσα τμήματα δηλ.

$$\Delta=\left\{a,\ a+\frac{\beta-a}{n},\ \ldots,\ a+\kappa\frac{\beta-a}{n},\ \ldots,\ a+n\frac{\beta-a}{n}=\beta\right\}$$

Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta)-\underline{\Sigma}(f,\Delta)=\sum_{\kappa=0}^{n-1}(x_{\kappa+1}-x_\kappa)(M_\kappa-m_\kappa)=$$

$$=\sum_{\kappa=0}^{n-1}(x_{\kappa+1}-x_\kappa)\Big(f(x_{\kappa+1})-f(x_\kappa)\Big)=$$

$$=\frac{\beta-a}{n}\sum_{\kappa=0}^{n-1}\Big(f(x_{\kappa+1})-f(x_\kappa)\Big)=\frac{\beta-a}{n}\Big(f(\beta)-f(a)\Big)$$

Έστω τώρα $\varepsilon>0$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει n τέτοιο ώστε $\frac{\beta-a}{n}\big(f(\beta)-f(a)\big)<\varepsilon$

Φυσικά αυτό είναι πάντοτε δυνατό· αρκεί

να πάρουμε $n > \dfrac{(\beta-a)(f(\beta)-f(a))}{\varepsilon}$.

<u>Συνεχείς συναρτήσεις</u>. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η f είναι συνεχής στο $[a,\beta]$ και $\varepsilon>0$. Πρέπει να βρούμε $\Delta \in \mathcal{D}$ τέτοιο ώστε $\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)(M_k-m_k)<\varepsilon$

Επειδή η f είναι συνεχής θα υπάρχουν ξ_k', ξ_k'' στο $[x_k, x_{k+1}]$ τέτοια ώστε $M_k = f(\xi_k'')$, $m_k = f(\xi_k')$.

Ας κάνουμε κατ' αρχήν την υπόθεση ότι η f είναι όχι μόνο συνεχής, αλλά ότι έχει και παράγωγο φραγμένη στο (a,β) δηλ. ότι υπάρχει η $f'(x)$, $x\in(a,\beta)$ και $|f'(x)| \leq M$, $a<x<\beta$ για κάποιο πραγματικό M.

Το θεώρημα της μέσης τιμής στην περίπτωση αυτή μας λέγει ότι $M_k - m_k = f(\xi_k'') - f(\xi_k') = (\xi_k'' - \xi_k')\, f'(\xi_k''')$, όπου ξ_k''' κάποιος αριθμός μεταξύ των ξ_k' και ξ_k'', και επομένως

$$M_k - m_k \leq |\xi_k'' - \xi_k'|\, M \leq |x_{k+1} - x_k|\, M \leq$$
$$\leq d(\Delta)\, M$$

όπου $d(\Delta)$ το πλάτος της Δ.

Αν λοιπόν πάρουμε μια Δ με
$d(\Delta) < \dfrac{\varepsilon}{(M+1)(\beta-a)}$, τότε

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta) - \underline{\Sigma}(f,\Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}-x_k)(M_k - m_k) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{(\beta-a)(M+1)} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}-x_k) M =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\cancel{(\beta-a)}(M+1)} M \cancel{(\beta-a)} < \varepsilon$$

Αν καλοσκεφτούμε τον παραπάνω συλλογισμό, βλέπουμε ότι η παραγωγισιμότητα της f μας χρειάστηκε μόνο για να δείξουμε ότι η f ικανοποιεί μια συνθήκη λίγο ισχυρότερη από τη συνέχεια στο $[a,\beta]$. Πιο συγκεκριμένα την εξής:

Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για όλα τα x_1, x_2 από το πεδίο ορισμού της f $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Μια συνάρτηση που ικανοποιεί τη συνθήκη αυτή στο πεδίο ορισμού της λέγεται ομοιόμορφα συνεχής σ' αυτό. Η ολοκληρωσιμότητα των συνεχών συναρτήσεων είναι τώρα άμεση συνέπεια του παρακάτω σημαντικού θεωρήματος.

<u>Θεώρημα</u>: Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε είναι και ομοιόμορφα συνεχής σ' αυτό, δηλ. για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ με την ιδιότητα: για κάθε $x,y\in[\alpha,\beta]$ με $|x-y|<\delta$ έπεται $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Σε επόμενο κεφάλαιο θα δώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος αυτού καθώς και ορισμένα σχόλια πάνω στην ομοιόμορφη συνέχεια. Παρατηρούμε πάντως, ότι η ειδική περίπτωση που αποδείξαμε είναι αρκετή για την παραπέρα ανάπτυξη της θεωρίας. Πραγματικά, ένα απλό πόρισμα της ειδικής αυτής περίπτωσης είναι ότι "Οι ρητές, οι τριγωνομετρικές, οι υπερβολικές, οι λογαριθμικές, οι εκθετικές συναρτήσεις καθώς και συνδυασμοί με απλές πράξεις ή συνθέσεις αυτών είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε κλειστό διάστημα [α,β] που περιέχεται στο πεδίο ορισμού τους"

Πραγματικά οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους και οι παράγωγοί τους είναι συνεχείς. Σε ένα κλειστό λοιπόν διάστημα αυτές οι παράγωγοι είναι φραγμένες, επομένως εφαρμόζεται το αποτέλεσμα που αποδείξαμε παραπάνω.

5.2.4 Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Όπως και στην περίπτωση των ορισμών της συνέχειας και της παραγώγου, έτσι και τώρα πρέπει να αποδείξουμε τουλάχιστον τις απλές ιδιότητες του ολοκληρώματος, αυτές που "αναμένεται" να έχει η καινούργια έννοια που ορίσαμε. Η απόδειξη είναι η ανταμοιβή για ένα πετυχημένο ορισμό, ή, αν θέλετε, το ανάλογο της πειραματικής επαλήθευσης μιας θεωρίας στη Φυσική. Για να είμαστε όμως ειλικρινείς, πρέπει να πούμε ότι σε αρκετές περιπτώσεις η δουλειά αυτή είναι α γ γ α ρ ε ί α (συλλογισμοί ρουτίνας, περιπτωσιολογία, ...). Στις περιπτώσεις αυτές είναι "αναγκαίο κακό".

Θα χρησιμοποιήσουμε τους συμβολισμούς των προηγουμένων παραγράφων για τα Δ, M_k, m_k, χωρίς να επαναλαμβάνουμε κάθε φορά τον ορισμό τους.

α) Αν $f(x) = c =$ σταθερά, $a \leqslant x \leqslant \beta$, τότε $\int_a^\beta f = c(\beta - a)$.

Πραγματικά, στην περίπτωση αυτή έχουμε $M_k = m_k = c$ και επομένως

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)\,c = c(\beta - a),$$

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)\,c = c(\beta - a),$$

οπότε και $\underline{\int_a^\beta} f = \overline{\int_a^\beta} f = c(\beta - a)$

β) Αν οι f και g είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,\beta]$, τότε και η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει:

$$\int_a^\beta (f+g) = \int_a^\beta f + \int_a^\beta g$$

Χρησιμοποιούμε τα m_k, M_k για το inf και sup της $f+g$ στο $[x_k, x_{k+1}]$, τα m_k', M_k' για την f και τα m_k'', M_k'' για την g αντίστοιχα. Για κάθε x στο $[x_k, x_{k+1}]$ έχουμε:

$$f(x) + g(x) \leq M_k' + M_k'',$$

δηλ. το $M_k' + M_k''$ είναι προφανώς άνω φράγμα της $f+g$ στο $[x_k, x_{k+1}]$, άρα είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το supremum της $f+g$ στο ίδιο διάστημα. Συνάγουμε λοιπόν ότι:

$M_k \leq M_k' + M_k''$ και ομοίως $m_k \geq m_k' + m_k''$. Πολλαπλασιάζοντας αυτές τις ανισότητες με τον θετικό αριθμό $(x_{k+1} - x_k)$ και προσθέτοντας για $k = 0, 1, \ldots, n-1$, βρίσκουμε:

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta) + \underline{\Sigma}(g,\Delta) = \Sigma(m_k' + m_k'')(x_{k+1} - x_k) \leq$$

$$\leq \Sigma\, m_k (x_{k+1} - x_k) = \underline{\Sigma}(f+g, \Delta) \leq$$

$$\leq \overline{\Sigma}(f+g, \Delta) = \Sigma\, M_k (x_{k+1} - x_k) \leq$$

$$\leq \Sigma(M_k' + M_k'')(x_{k+1} - x_k) = \overline{\Sigma}(f,\Delta) + \overline{\Sigma}(g,\Delta),$$

δηλαδή,

$$\left(\underline{\Sigma}(f,\Delta)+\underline{\Sigma}(g,\Delta)\right) \leqq \underline{\Sigma}(f+g,\Delta) \leqq$$

$$\leqq \overline{\Sigma}(f+g,\Delta) \leqq \left(\overline{\Sigma}(f,\Delta)+\overline{\Sigma}(g,\Delta)\right).$$

Από τις τελευταίες ανισότητες προκύπτει άμεσα ότι:

$$0 \leqq \overline{\Sigma}(f+g,\Delta)-\underline{\Sigma}(f+g,\Delta) \leqq$$

$$\leqq \left(\overline{\Sigma}(f,\Delta)-\underline{\Sigma}(f,\Delta)\right)+\left(\overline{\Sigma}(g,\Delta)-\underline{\Sigma}(g,\Delta)\right).$$

Έστω τώρα $\varepsilon>0$. Από το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας που ξέρουμε συνάγουμε ότι υπάρχουν Δ_1, Δ_2 τέτοια ώστε

$$0 \leqq \overline{\Sigma}(f,\Delta_1)-\underline{\Sigma}(f,\Delta_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και}$$

$$0 \leqq \overline{\Sigma}(g,\Delta_2)-\underline{\Sigma}(g,\Delta_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αν $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$ η κοινή εκλέπτυνση των Δ_1, Δ_2, τότε οι ανισότητες αυτές θα εξακολουθούν να ισχύουν αν θέσουμε Δ στη θέση των Δ_1, Δ_2 (γιατί;).

Προσθέτοντας τις ανισότητες που προκύπτουν βρίσκουμε:

$$0 \leqq \overline{\Sigma}(f+g,\Delta)-\underline{\Sigma}(f+g,\Delta) < \varepsilon$$

που, σύμφωνα πάλι με το κριτήριό μας, δείχνει ότι η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη.

Μένει να δείξουμε ότι $\int_a^\beta (f+g) = \int_a^\beta f + \int_a^\beta g$

Εστω $\varepsilon>0$. Δείξαμε πριν λίγες γραμμές την ανισότητα:

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta)+\underline{\Sigma}(g,\Delta) \leqq \underline{\Sigma}(f+g,\Delta) \leqq$$
$$\leqq \int_a^\beta (f+g) \leqq \overline{\Sigma}(f+g,\Delta) \leqq \overline{\Sigma}(f,\Delta)+\overline{\Sigma}(g,\Delta)$$

για οποιαδήποτε $\Delta \in \mathcal{D}([a,\beta])$.
Επειδή $\int_a^\beta f = \inf \overline{\Sigma}(f,\Delta)$, θα υπάρχει Δ_1 τέτοιο ώστε $\overline{\Sigma}(f,\Delta_1) < \int_a^\beta f + \frac{\varepsilon}{2}$ (γιατί;) και παρόμοια θα υπάρχει Δ_2 τέ-τέτοιο ώστε $\overline{\Sigma}(g,\Delta_2) < \int_a^\beta g + \frac{\varepsilon}{2}$. Οι ανισότητες αυτές θα ισχύουν και για την κοινή εκλέπτυνση Δ των Δ_1, Δ_2 οπότε θα έχουμε:

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta)+\overline{\Sigma}(g,\Delta) < \int_a^\beta f + \int_a^\beta g + \varepsilon .$$

Με όμοιο συλλογισμό βρίσκουμε:

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta)+\underline{\Sigma}(g,\Delta) > \int_a^\beta f + \int_a^\beta g - \varepsilon$$

(μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ίδια διαμέριση Δ εμφανίζεται και στις δύο ανισότητες· γιατί;)

Συνδυάζοντας όσα είπαμε παραπάνω συνάγουμε:

$$\int_a^\beta f + \int_a^\beta g - \varepsilon < \int_a^\beta (f+g) < \int_a^\beta f + \int_a^\beta + \varepsilon$$

άρα, επειδή το ε είναι αυθαίρετος θετικός αριθμός,

$$\int_a^\beta (f+g) = \int_a^\beta f + \int_a^\beta g .$$

<u>Παρατήρηση</u>: Η απόδειξη θα ήταν συντομότερη αν χρησιμοποιούσαμε τον ορισμό του Riemann, γιατί αντί για ανισότητες θα χρησιμοποιούσαμε την προφανή ισότητα:

$$\Sigma(f+g, \Delta, \Xi) = \Sigma(f, \Delta, \Xi) + \Sigma(g, \Delta, \Xi)$$

Δεν ακολουθήσαμε αυτή τη μέθοδο γιατί δεν έχουμε ακόμη αποδείξει την ισοδυναμία των δύο ορισμών.

γ) Αν f ολοκληρώσιμη στο $[a, \beta]$ και λ πραγματικός αριθμός, τότε και η λf είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει

$$\int_a^\beta \lambda f = \lambda \int_a^\beta f$$

Η απόδειξη είναι παρόμοια και αφήνεται στον αναγνώστη.

δ) Αν f, g ολοκληρώσιμες στο $[a,\beta]$ και λ, μ πραγματικοί αριθμοί, τότε η $\lambda f+\mu g$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει:

$$\int_a^\beta (\lambda f+\mu g) = \lambda \int_a^\beta f + \mu \int_a^\beta g$$

<u>Απόδειξη</u>: Άμεση συνέπεια των β, γ.

ε) Αν $a<c<b$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c,b]$. Ισχύει τότε:

$$\int_a^\beta f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

<u>Απόδειξη</u>: Ας υποθέσουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c,b]$. Έστω επίσης $\varepsilon>0$. Υπάρχουν $\Delta_1 \in \mathcal{D}([a,c])$ και $\Delta_2 \in \mathcal{D}([c,b])$ τέτοια ώστε

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta_1) \leq \int_a^c f \leq \overline{\Sigma}(f,\Delta_1) \quad \text{και}$$

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta_1) - \underline{\Sigma}(f,\Delta_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad ,$$

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta_2) \leq \int_c^b f \leq \overline{\Sigma}(f,\Delta_2) \quad \text{και}$$

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta_2) - \underline{\Sigma}(f,\Delta_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Προφανώς $\overline{\Sigma}(f,\Delta) = \overline{\Sigma}(f,\Delta_1) + \overline{\Sigma}(f,\Delta_2)$
και $\underline{\Sigma}(f,\Delta) = \underline{\Sigma}(f,\Delta_1) + \underline{\Sigma}(f,\Delta_2)$ αν
$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \in \mathcal{D}([a,\beta])$ η ένωση των
Δ_1, Δ_2.

Συνάγουμε λοιπόν ότι:

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta) \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq \overline{\Sigma}(f,\Delta) \quad \text{και}$$

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta) - \underline{\Sigma}(f,\Delta) = \left(\overline{\Sigma}(f,\Delta_1) - \underline{\Sigma}(f,\Delta_1)\right) + \left(\overline{\Sigma}(f,\Delta_2) - \underline{\Sigma}(f,\Delta_2)\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Έχουμε επίσης:

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\Sigma}(f,\Delta)$$

Συνδυάζοντας τις τρεις τελευταίες ανισότητες βρίσκουμε:

$$\left| \underline{\int_a^b} f - \left(\int_a^c f + \int_c^b f \right) \right| \leq \overline{\Sigma}(f,\Delta) - \underline{\Sigma}(f,\Delta) < \varepsilon,$$

οπότε

$$\underline{\int_a^b} f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Παρόμοια έχουμε: $\overline{\int_a^b} f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Η άλλη κατεύθυνση είναι ευκολότερη και αφήνεται στον αναγνώστη.

J) Αν αλλάξουμε την τιμή ~~της~~ μιας

ολοκληρώσιμης στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ συνάρτησης f σε ένα σημείο, το ολοκλήρωμά της δεν αλλάζει, δηλ. αν $f(x) = g(x)$ για όλα τα $x \in [\alpha, \beta]$ εκτός ίσως για $x = x_0$, τότε

$$\int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^\beta g$$

Φυσικά το ίδιο θα ισχύει και αν αλλάξουμε την τιμή της f σε ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων (τετριμμένη επαγωγή).

<u>Απόδειξη</u>: Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι η $h = f - g$ είναι παντού 0 στο $[\alpha, \beta]$ εκτός ίσως από το x_0. Αρκεί λοιπόν, λόγω της ιδιότητας δ για $\lambda = 1$ και $\mu = -1$, να δείξουμε ότι $\int_\alpha^\beta h = 0$. Αν $h(x_0) = 0$ το αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια της ιδιότητας α. Έστω λοιπόν $h(x_0) \neq 0$ και $\varepsilon > 0$. Ας πάρουμε μια διαμέριση Δ με πλάτος $d(\Delta) < \dfrac{\varepsilon}{2|h(x_0)|}$. Το πολύ δύο όροι των αθροισμάτων που ορίζουν τα $\overline{\Sigma}(h, \Delta)$ και $\underline{\Sigma}(h, \Delta)$ θα είναι διάφο-

ροι του μηδενός και ο καθένας απ' αυτούς θα είναι κατ' απόλυτο τιμή μικρότερος του $\cancel{}d(\Delta)\cdot|h(x_0)|<\varepsilon/2$.

Θα έχουμε λοιπόν

$$-\varepsilon<\underline{\Sigma}(h,\Delta)\leq\underline{\int_a^\beta} h\leqq\overline{\int_a^\beta} h\leq\overline{\Sigma}(h,\Delta)<\varepsilon,$$

απ' όπου άμεσα έπεται ότι το $\int_a^\beta h$ υπάρχει και ισούται με 0.

η) Αν $m\leqq f\leqq M$, $a\leqq x\leqq\beta$, και f ολοκληρώσιμη, τότε

$$m(\beta-a)\leq\int_a^\beta f\leq M(\beta-a)$$

<u>Απόδειξη</u>: Για κάθε Δ έχουμε

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta)=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)M_k\leqq M\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)=$$

$$=M(\beta-a).$$

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta)=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)m_k\geqq m\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)=$$

$$=m(\beta-a).$$

θ) Αν $f(x)\leqq g(x)$, $a\leqq x\leqq\beta$, και f,g ολοκληρώσιμες στο $[a,\beta]$ τότε:

$$\int_a^\beta f\leqq\int_a^\beta g$$

<u>Απόδειξη</u>: Αρκεί να δείξουμε ότι $\int_a^\beta h \geqslant 0$ για κάθε ολοκληρώσιμη h με $h(x) \geqslant 0$, $a \leqq x \leqq \beta$ (γιατί;). Αυτό όμως είναι φανερό γιατί η υπό υπόθεση $h(x) \geqslant 0$ συνεπάγεται $m_K \geqslant 0$, άρα $\underline{\Sigma}(h,\Delta) \geqslant 0$ για οποιαδήποτε διαμέριση Δ.

i) $\left| \int_a^\beta f \right| \leqq \int_a^\beta |f|$ για κάθε f ολοκληρώσιμη στο $[a,\beta]$.

<u>Απόδειξη</u>: Η ευφώνιση της ιδιότητας αυτής είναι λίγο "πονηρή". Ας την αποδείξουμε κατ' αρχήν αφελώς και μετά ας δούμε που την "πατήσαμε".

Έχουμε:

$$-|f(x)| \leqq f(x) \leqq |f(x)|, \quad a \leqq x \leqq \beta,$$

οπότε οι ιδιότητες β και θ μας δίνουν

$$-\int_a^\beta |f| \leqq \int_a^\beta f \leqq \int_a^\beta |f|, \text{ δηλ.}$$

$$\left| \int_a^\beta f \right| \leqq \int_a^\beta |f| .$$

Που την "πατήσαμε"; Μα φυσικά έπρεπε κατ' αρχήν να αποδείξουμε ότι "η ολοκληρωσιμότητα της f συνεπάγεται την ολοκληρωσιμότητα της $|f|$." Ευτυχώς η απόδειξη είναι εύκολη και αφήνεται στον αναγνώστη (υπόδειξη: η διαφορά $M_\kappa - m_\kappa$ για την $|f|$ δεν ξεπερνάει την αντίστοιχη διαφορά για την f)

κ) Μία γενίκευση.

Το $\int_a^\beta f(x)dx$ έχει οριστεί μόνο στην περίπτωση $a<\beta$. Θα είναι χρήσιμο να το ορίσουμε και στις περιπτώσεις $a=\beta$ και $a>\beta$. Ο ορισμός είναι ο εξής:

<u>Ορισμός</u>: Αν $a=\beta$ και η f είναι ορισμένη στο a, θέτουμε

$$\int_a^a f = 0$$

Αν $a>\beta$ και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\beta, a]$, θέτουμε $\int_a^\beta f = -\int_\beta^a f$

Είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι όλες οι ιδιότητες που δείξαμε ισχύουν και με τη γενικευμένη αυτή έννοια του ολοκληρώματος. Π.χ. αν $a>\beta$ και οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[\beta, a]$, τότε

$$\int_a^\beta (f+g) = -\int_\beta^a (f+g) = -\int_\beta^a f - \int_\beta^a g =$$

$$= \int_a^\beta f + \int_a^\beta g \, .$$

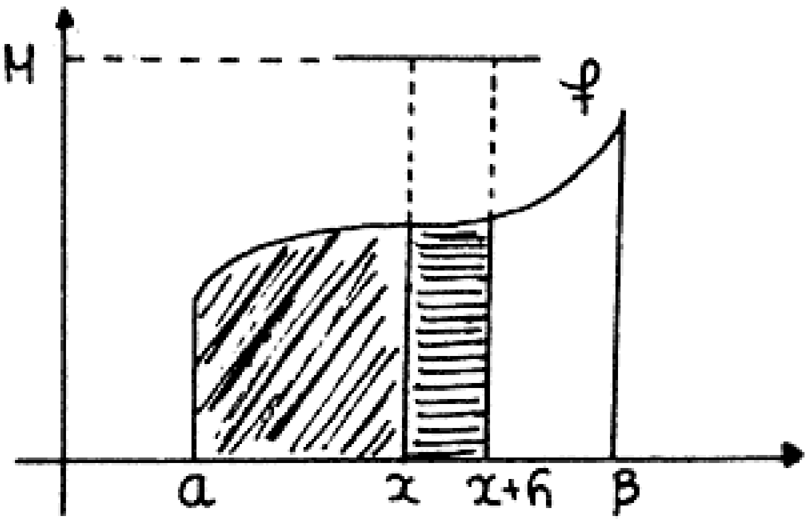
Η επαλήθευση των υπολοίπων ιδιοτήτων αφήνεται στον αναγνώστη.

5.2.5 Τα βασικά θεωρήματα για το ολοκλήρωμα

Τα δύο θεωρήματα που θα αποδείξουμε σ' αυτή την παράγραφο είναι από τα σημαντικότερα του Απειροστικού Λογισμού, γι' αυτό και ονομάζονται "θεμελιώδη θεωρήματα". Ουσιαστικά θα συνδέσουν τις έννοιες παραγώγιση και ολοκλήρωση. Η ανακάλυψή τους αποδίδεται στους Newton και Leibniz. Είναι ακριβώς αυτά τα θεωρήματα που οριοθετούν μια νέα εποχή για τον Απειροστικό Λογισμό λίγο μετά την Αναγέννηση και για πολλούς την αρχή του.

Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση f ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Δεν υποθέτουμε ότι $f \geq 0$, αλλά είναι σκόπιμο να έχει ο αναγνώστης αυτή την περίπτωση στο μυαλό του, για να παρακολουθεί τη γεωμετρική σημασία τόσο των αποτελεσμάτων όσο και των αποδείξεων που θα δώσουμε.

Δείξαμε (ιδιότητα ε) ότι αν $\alpha < x < \beta$ τότε το $\int_\alpha^x f$ υπάρχει. Η γενίκευση που δώσαμε μάλιστα στο τέλος της προηγούμενης παραγράφου μας



Σχ. 51

επιτρέπει να ορίσουμε το $\int_\alpha^x f$ για $\alpha \leq x \leq \beta$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^x f$ ορίζει μία συνάρτηση, ας την γράψουμε $F(x)$, ορισμένη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

$$F(x) = \int_\alpha^x f \quad , \quad \alpha \leq x \leq \beta .$$

As μελετήσουμε τη συνάρτηση αυτή. Η διαφορά $F(x+h)-F(x)$ παριστάνει γεωμετρικά το οριζόντια διαγραμμισμένο εμβαδό στο σχ. 51. Το εμβαδόν αυτό προφανώς είναι μικρότερο από το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση h και ύψος M, όπου M ένα άνω φράγμα της $|f|$, $|f(x)|<M$, $a\leqq x\leqq \beta$, και επομένως τείνει στο 0 με το h. Το συμπέρασμα λοιπόν είναι: Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,\beta]$ τότε η συνάρτηση $F(x)=\int_a^x f$ είναι συνεχής στο $[a,\beta]$". Η ακριβής απόδειξη είναι εξ' ίσου απλή. Έχουμε:

$$|F(x_0+h)-F(x_0)|=\left|\int_a^{x_0+h} f-\int_a^{x_0} f\right|=$$

$$=\left|\int_{x_0}^{x_0+h} f\right|\leqq M|h| \text{ και επομένως}$$

$$|F(x+h)-F(x)|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

Αποδείξαμε λοιπόν, κάτι παραπάνω από τη συνέχεια της F, δηλ. όχι μόνο ότι η $|F(x+h)-F(x)|$ είναι μικρή με το $|h|$ αλλά και ότι ισχύει η σχέση

$$|F(x_0+h) - F(x_0)| \leq M|h|$$

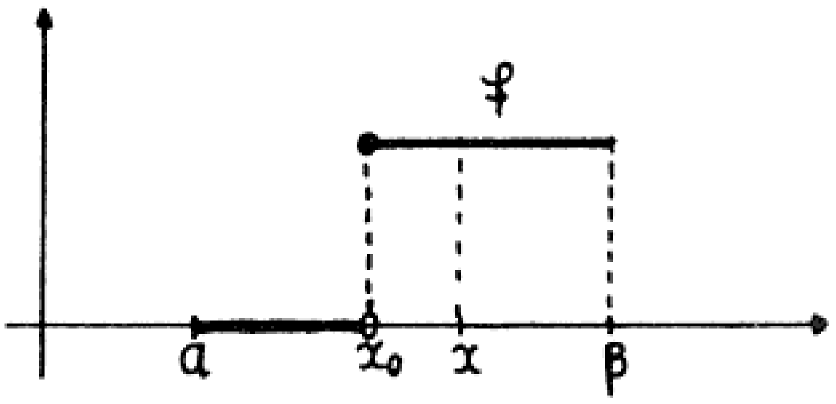
Οι μαθηματικοί χρησιμοποιούν για τέτοιες συνεχείς συναρτήσεις τον όρο "Lipschitz συνεχείς", αλλά δε θα επεκταθούμε σ' αυτή την έννοια. Έχοντας όμως τώρα δείξει ότι υπάρχει "περίσσευμα" συνεχείας στο x_0 θα εξετάσουμε μήπως υπάρχει και η παράγωγος της F στο x_0. Η απάντηση είναι **αρνητική** χωρίς κάποια επιπρόσθετη υπόθεση. Αυτό μπορούμε να το καταλάβουμε αμέσως με ένα παράδειγμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x_0 \leq x < \beta \\ 0 & \alpha \leq x < x_0 \end{cases}$$

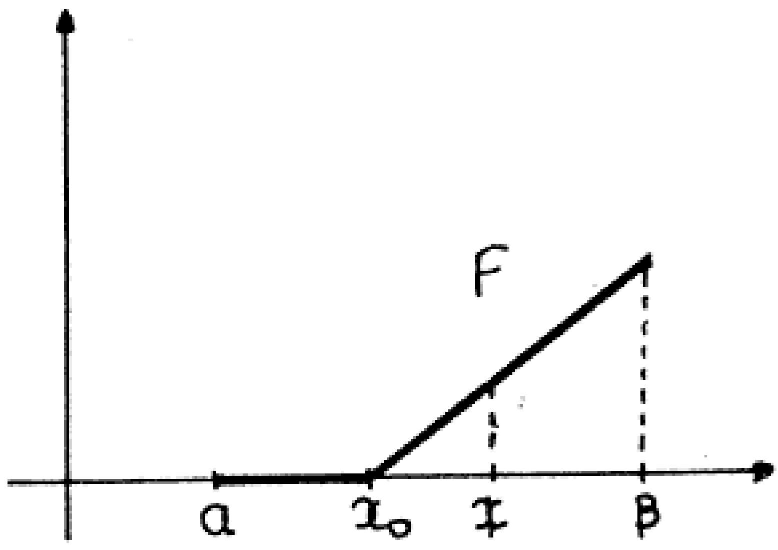
Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ (γιατί;) και

$$F(x) = \int_\alpha^x f = \begin{cases} 0 & \alpha \leq x \leq x_0 \\ x-x_0 & x_0 \leq x \leq \beta \end{cases} \quad (\text{γιατί;})$$

Η γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω τύπου είναι προφανής (βλ. σχ. 52, 52').



Σχ. 52



Σχ. 59.

Ο τύπος που βρήκαμε για την $F(x)$ επαληθεύει αμέσως τη συνέχεια της F και δείχνει επίσης ότι η F' δεν υπάρχει στο x_0 $(F'(x_0+)=1,\ F'(x_0-)=0)$.

Αν όμως $x \neq x_0$ τότε $F'(x) = \begin{cases} 0 & \alpha \leq x < x_0 \\ 1 & x_0 < x \leq \beta \end{cases}$,

δηλ. για $x \neq x_0$ η F' υπάρχει και ισούται με $f(x)$. Το συμπέρασμα αυτό είναι γενικό και ονομάζεται **πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού**

<u>Θεώρημα</u>: Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και συνεχής στο $x_0 \in [\alpha,\beta]$ τότε η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f$, $\alpha \leq x \leq \beta$, είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η παράγωγός της ισούται με $f(x_0)$.

Φυσικά αν $x_0=\alpha$ $(x_0=\beta)$ εννοούμε συνέχεια και παραγώγιση από δεξιά (αριστερά).

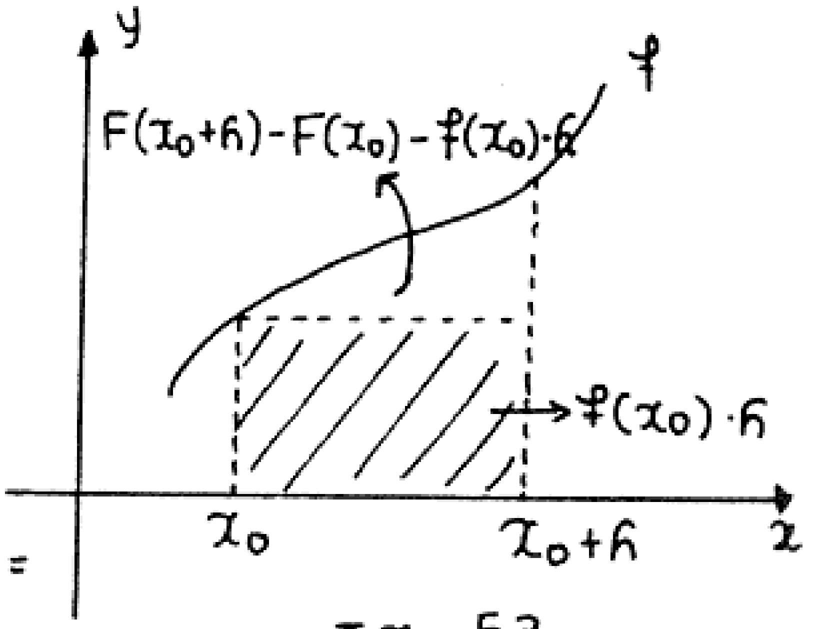
<u>Απόδειξη</u>: Θα εξετάσουμε την περίπτωση $a<x_0<\beta$ και θα υποθέτουμε ότι $|h|<\min\{\beta-x_0,\, x_0-a\}$ ούτως ώστε $x_0+h\in(a,\beta)$. Η περίπτωση $x_0=a$ ή $x_0=\beta$ είναι τελείως ανάλογη και αφήνεται στον αναγνώστη. Καλείται επίσης ο αναγνώστης να παρακολουθήσει όλα τα βήματα της απόδειξης στο σχήμα 53.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $F'(x_0)=f(x_0)$ δηλαδή ότι:

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right\}=0$$

Έστω πρώτα $h>0$.

Θα έχουμε:



σχ. 53

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{h}\left\{\int_a^{x_0+h}f-\int_a^{x_0}f-h\,f(x_0)\right\}\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{h}\left\{\int_{x_0}^{x_0+h}f-\int_{x_0}^{x_0+h}f(x_0)\right\}\right|=\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\big(f-f(x_0)\big)\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\left|f-f(x_0)\right|.$$

Έστω $\varepsilon>0$. Επειδή η f υποτέθηκε συνεχής στο x_0 θα υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε $|h|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Αν λοιπόν $|h|<\delta$, τότε $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, $x_0 \leq x \leq x_0+h$, και επομένως

$$0<h<\delta \Rightarrow \left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f-f(x_0)| < \frac{1}{h}\cdot h\cdot\varepsilon = \varepsilon,$$

που αποδεικνύει ότι $F'(x_0+)=f(x_0)$. Όμοια δείχνουμε ότι $F'(x_0-)=f(x_0)$ και επομένως $F'(x_0)=f(x_0)$. (Δικαιολογείστε όλα τα βήματα της παραπάνω απόδειξης. Πού χρησιμοποιήθηκε η υπόθεση $h>0$;).

Πριν προχωρήσουμε σε σχόλια και εφαρμογές του θεωρήματος αυτού ας προχωρήσουμε σε ένα πόρισμά του που ονομάζεται **β' θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.**

Ας θεωρήσουμε πάλι μια συνάρτηση f ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ και συνεχή για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Έστω τώρα G μια άλλη συνάρτηση με πεδίο ορισμού πάλι το $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β), συνεχής στο

$[a,\beta]$, και τέτοια ώστε $G'(x)=f(x)$, $a<x<\beta$. Μια τέτοια συνάρτηση θα ονομάζεται **αρχική** ή **αόριστο ολοκλήρωμα** της f. (πιο σπάνια λέγεται και αντιπαράγωγος).

Δείξαμε ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_a^x f$ είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η $F(x)-G(x)$ είναι σταθερά στο (a,β) και (αφού είναι συνεχής) επομένως σταθερά και στο $[a,\beta]$. Θα έχουμε λοιπόν $F(x)-G(x)=c$, $a\leq x\leq\beta$.

Αν $x=0$, τότε $F(a)=\int_a^a f=0$ άρα $c=-G(a)$

οπότε:

$$F(x)=G(x)-G(a)=\int_a^x f$$

και ειδικότερα

$$F(\beta)=\int_a^\beta f=G(\beta)-G(a)$$

Δείξαμε λοιπόν το:

<u>Θεώρημα</u> " Αν G είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f, $a\leq x\leq\beta$, τότε $\int_a^\beta f=G(\beta)-G(a)$ "

Συνήθως η G ορίζεται σε ένα διάστημα (γ,δ) με $\gamma<a<\beta<\delta$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, οπότε η συνέχειά της στα a,β είναι αυτόματη

Στην παραπάνω απόδειξη δείξαμε ουσιαστικά ότι αν $G_1(x)$ και $G_2(x)$ είναι δύο αόριστα ολοκληρώματα της f τότε $G_2(x)-G_1(x)=$ σταθερά και επομένως αν ξέρουμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα, τα ξέρουμε όλα.

Για το αόριστο ολοκλήρωμα θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο με το ορισμένο ολοκλήρωμα αλλά χωρίς όρια ολοκλήρωσης (τα a,β στο $\int_a^\beta f$ λέγονται όρια ολοκλήρωσης, πάνω όριο το β και κάτω όριο το a). Θα γράφουμε δηλαδή $\int f$ ή $\int f(x)dx$ για κάθε συνάρτηση της οποίας η παράγωγος ισούται με f στο πεδίο ορισμού της f (που υποτίθεται ότι είναι ένα διάστημα).

Ο τύπος $\int_a^\beta f=G(\beta)-G(a)$ έχει επικρατήσει να γράφεται $\int_a^\beta f=G(x)\Big|_a^\beta$, δηλ.

χρησιμοποιούμε το σύμβολο $G(x)\Big|_a^\beta$ για τη διαφορά $G(\beta)-G(a)$.

Με τα όσα έχουμε πει μέχρι τώρα, συνάγουμε ότι "ο υπολογισμός ορισμένων ολοκληρωμάτων ανάγεται στην εύρεση αρχικών συναρτήσεων (αόριστων ολοκληρωμάτων)". Αυτό δεν είναι πάντοτε απλό ακόμη και αν η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι στοιχειώδης. Στις περιπτώσεις αυτές αν ενδιαφερόμαστε για την αριθμητική τιμή ή για μια καλή προσσέγγιση ενός ορισμένου ολοκληρώματος, χρησιμοποιούμε διάφορες μεθόδους που βασίζονται στον ορισμό του $\int_a^\beta f$.

Ο πίνακας των παραγώγων ορισμένων στοιχειωδών συναρτήσεων που δώσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο δίνει σχεδόν αυτόματα ένα πίνακα αορίστων ολοκληρωμάτων. Το γράμμα c θα σημαίνει ως συνήθως μία σταθερά. Οι τύποι ισχύουν για τα x για τα οποία τα δε-γιά μέλη ορίζονται (και έχουν, όπως ξέρουμε, τότε παράγωγο).

Πίνακας αορίστων ολοκληρωμάτων

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \neq -1 \quad , n \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + c$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \qquad a \in \mathbb{R} \quad , a \neq -1$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c \qquad a > 0$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \operatorname{Arcsin} x + c = -\operatorname{Arc\,cos} x + \left(\frac{\pi}{2} + c\right)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arc\,tan} x + c$$

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x + c$$

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + c$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx = \tanh x + c$$

5.3 Βασικές τεχνικές ολοκλήρωσης

'Οπως αναμένουμε πολλές ιδιότητες της παραγώγισης μεταφέρονται σε αντίστοιχες ιδιότητες για την αόριστη ολοκλήρωση. Θα εξετάσουμε μερικές από αυτές που είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στον υπολογισμό αορίστων, άρα και ορισμένων ολοκληρωμάτων.

'Ετσι π.χ. η γνωστή σχέση $(aF+\beta G)' = aF' + \beta G'$, a, β σταθερές, συνεπάγεται τη σχέση $\int (af+\beta g) = a\int f + \beta \int g$.

<u>Παράδειγμα</u>: Για τυχαίο πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, έχουμε

$$\int f = c + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Πιο ενδιαφέροντες είναι οι κανόνες ολοκλήρωσης που προέρχονται από τον τύπο παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης (κανόνας της αλυσίδας) και από τον τύπο παραγώγισης γινομένου. Λέγονται αντίστοιχα "ολοκλήρωση με αντικατάσταση" (ή αλλαγή μεταβλητής) και "ολοκλήρωση κατά μέρη".

5.3.1 <u>Ολοκλήρωση με αντικατάσταση</u>.

Αν $F(x)$ είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f, σε ένα διάστημα $\alpha<x<\beta$, δηλ. αν $F'(x)=f(x)$, $x\in(\alpha,\beta)$ και $q(y)$, $\gamma<y<\delta$, μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα $q(y)\in(\alpha,\beta)$, $\gamma<y<\delta$, τότε η σύνθετη συνάρτηση $F(q(y))$ ορίζεται και η παράγωγός της δίνεται από τον τύπο (κανόνας της αλυσίδας):

$$(F(q(y)))' = F'(q(y))\,q'(y) = f(q(y))\,q'(y),$$

$\gamma<y<\delta$.

Με άλλα λόγια η συνάρτηση $F(q(y))$ είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $f(q(y))\,q'(y)$. Γράφουμε συνήθως αυτή την ιδιότητα ως εξής:

$$\int f(q(y))\,q'(y)\,dy = \int f(x)\,dx\,.$$

Φυσικά αυτό σημαίνει ότι, εκτός από μία προσθετική σταθερά, η συνάρτηση του y που παριστάνει το αριστερά μέλος προκύπτει από τη συνάρτηση του x που παριστάνει το δεξιά μέλος, αν αντικαταστήσουμε το x με $q(y)$.

<u>Παρατήρηση</u>: Φορμαλιστικά ο παραπάνω τύπος προκύπτει από το ολοκλήρωμα $\int f(x)\,dx$ αν στη θέση του x θέσουμε $q(y)$ και στη θέση του "διαφορικού" dx το $dq(y)=q'(y)\,dy$. Φυσικά το dx στο ολοκλήρωμα $\int f(x)\,dx$ είναι απλώς σύμβολο, που βρίσκεται εκεί για να μας θυμίζει το $\Delta x_k = x_{k+1}-x_k$ στο άθροισμα $\Sigma f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$ του ορισμού του Riemann.

Ο παραπάνω τύπος δίνει μια πολύ χρήσιμη μέθοδο ολοκλήρωσης στις περιπτώσεις που το ολοκλήρωμα του αριστερά μέλους είναι ευκολότερο στον υπολογισμό.

<u>Παραδείγματα:</u>

α) $\int (2x+3)^3\,dx$

θέτουμε $2x+3=y$ δηλ. $x=\frac{y-3}{2}$ και έχουμε $\int(2x+3)^3dx=\int y^3\frac{1}{2}\,dy=\frac{1}{2}\,\frac{y^4}{4}+c=$

$$=\frac{(2x+3)^4}{8}+c\,.$$

β) $\int\cos^3x\,dx$. Εδώ, όπως και σε άλλες περιπτώσεις, δεν φαίνεται άμεσα η "καλή" αντικατάσταση. Θα μπορούσε κανείς να δώσει διάφορους κανόνες που θα κάλυπταν αρκετές περιπτώσεις αλλά δεν θα ακολουθήσουμε αυτή την τακτική. Εξ' άλλου σε καμία περίπτωση οι κανόνες αυτοί δεν πρόκειται να αντικαταστήσουν την εμπειρία που έρχεται με την εξάσκηση.

Παρατηρούμε ότι $\cos^3x=\cos^2x\cdot\cos x=$ $=(1-\sin^2x)(\sin x)'$. Επομένως, θέτοντας $\sin x=y$:

$$\int\cos^3x\,dx=\int(1-y^2)\,dy=c+y-\frac{y^3}{3}=$$

$$=c+\sin x-\frac{\sin^3x}{3}\,.$$

γ) $\int xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int(-2x)\,e^{-x^2}dx=$

$$= -\frac{1}{2}\int(-x^2)' e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int e^y\,dy =$$

$$= c - \frac{e^y}{2} = c - \frac{e^{-x^2}}{2}.$$

δ) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-a)^m} \qquad m = 1, 2, \ldots$

$$\int\frac{dx}{(x-a)^m} = \int(x-a)^{-m}(x-a)'\,dx = \int y^{-m}\,dy =$$

$$= \begin{cases} c + \log|y| = c + \log|x-a| & \text{αν} \quad m = -1 \\[2ex] \dfrac{y^{-m+1}}{-m+1} = \dfrac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} & \text{αν} \quad m \neq -1 \end{cases}$$

ε) $\displaystyle\int\frac{ax+\beta}{x^2+\gamma x+\delta}\,, \quad \Delta = \gamma^2 - 4\delta = -4\kappa^2 < 0$

$$\int\frac{ax+\beta}{x^2+\gamma x+\delta}\,dx = \int\frac{a\left(x+\frac{\gamma}{2}\right)+\beta-\frac{a\gamma}{2}}{\left(x+\frac{\gamma}{2}\right)^2+\frac{4\delta-\gamma^2}{4}}\,dx =$$

$$= \frac{a}{2}\int\frac{2\left(x+\frac{\gamma}{2}\right)dx}{\left(x+\frac{\gamma}{2}\right)^2+\frac{4\delta-\gamma^2}{4}} + \left(\beta-\frac{a\gamma}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{\gamma}{2}\right)^2+\frac{4\delta-\gamma^2}{4}}.$$

Υπολογίζουμε χωριστά τα δύο ολοκληρώματα του β' μέλους γράφοντας $\kappa^2 = \frac{4\delta-\gamma^2}{4}$ $\left(= -\frac{\Delta}{4} > 0\right)$:

$$I_1 = \int \frac{2(x+\frac{\gamma}{2})\,dx}{(x+\frac{\gamma}{2})^2+\frac{4\delta-\gamma^2}{4}} = \int \frac{\left((x+\frac{\gamma}{2})^2+\kappa^2\right)'dx}{(x+\frac{\gamma}{2})^2+\kappa^2} =$$

$$= \int \frac{dy}{y} = c+\log|y| = c+\log\left|(x+\frac{\gamma}{2})^2+\kappa^2\right| =$$

$$= c+\log|x^2+\gamma x+\delta|.$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x+\frac{\gamma}{2})^2+\frac{4\delta-\gamma^2}{4}} = \int \frac{dx}{(x+\frac{\gamma}{2})^2+\kappa^2}$$

$$= \frac{1}{\kappa^2}\int \frac{dx}{\left\{\frac{1}{\kappa}(x+\frac{\gamma}{2})\right\}^2+1} = \frac{1}{\kappa}\int \frac{\left(\frac{1}{\kappa}(x+\frac{\gamma}{2})\right)'dx}{\left[\frac{1}{\kappa}(x+\frac{\gamma}{2})\right]^2+1} =$$

$$= \frac{1}{\kappa}\int \frac{dy}{y^2+1} = c+\frac{1}{\kappa}\,\mathrm{Arctan}\,y =$$

$$= c+\frac{1}{\sqrt{4\delta-\gamma^2}}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x+\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{4\delta-\gamma^2}},$$

5.3.2. <u>Ολοκλήρωση κατά μέρη</u>

Ο τύπος $(f\cdot g)' = f'g + fg'$ οδηγεί αμέσως στον παρακάτω τύπο που είναι γνωστός σαν "τύπος ολοκλήρωσης κατά μέρη" :

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Ο τύπος γράφεται συχνά και ως εξής:

$$\int f\cdot dg = f\cdot g - \int g\cdot df$$

και έχει πάρα πολλές εφαρμογές τόσο για υπολογισμούς ολοκληρωμάτων όσο και για την εξαγωγή θεωρητικών αποτελεσμάτων.

Παραδείγματα:

i) $\int_1^2 \log x\, dx$. Υπολογίζω πρώτα ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $\log x$ με ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\int \log x\, dx = \int (x)' \log x\, dx = x\log x - \int x(\log x)'dx$$

$$= x\log x - \int \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}\, dx = x\log x - x + c.$$

Έχουμε τώρα: $\int_1^2 \log x\, dx = x\log x - x\Big|_1^2 =$

$$= 2\log 2 - 2 + 1 = -1 + \log 4 = \log\frac{4}{e}.$$

Πιο συχνά προχωράμε ταυτόχρονα στην εύρεση του ορισμένου ολοκληρώματος, σε περιπτώσεις σαν την παραπάνω, γράφοντας:

$$\int_1^2 \log x\,dx = \int_1^2 (x)' \log x\,dx =$$

$$= x\log x\Big|_1^2 - \int_1^2 x\,\frac{1}{x}\,dx = 2\log 2 - 1\log 1 -$$

$$-(2-1) = -1 + \log 4 = \log\frac{4}{e}.$$

η) $\int x^2 \cos x\,dx = \int x^2 (\sin x)'\,dx =$

$$= x^2 \sin x - \int 2x \sin x\,dx =$$

$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x\,dx =$$

$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c.$$

θ) $\int \frac{ax+\beta}{(x^2+\gamma x+\delta)^\mu}\,dx$; $\Delta = \gamma^2 - 4\delta = -\kappa^2 < 0$,
$\mu = 2, 3, \ldots$

Προχωράμε όπως στο παράδειγμα ε και έχουμε:

$$\int \frac{ax+\beta}{(x^2+\gamma x+\delta)^\mu}\,dx = \frac{a}{2}\int \frac{2\left(x+\frac{\gamma}{2}\right)}{(x^2+\gamma x+\delta)^\mu}\,dx +$$

$$+\left(\beta - \frac{a\gamma}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+\gamma x+\delta)^\mu}$$

Υπολογίζουμε χωριστά τα δύο ολοκληρώματα του β' μέλους

$$I_1 = \int \frac{2(x+\frac{\gamma}{2})}{(x^2+\gamma x+\delta)^\mu}\,dx = \int \frac{(x^2+\gamma x+\delta)'dx}{(x^2+\gamma x+\delta)^\mu} =$$

$$= \int \frac{dy}{y^\mu} = C + \frac{y^{-\mu+1}}{-\mu+1} = C - \frac{1}{\mu-1}\,\frac{1}{(x^2+\gamma x+\delta)^{\mu-1}}$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\{(x+\frac{\gamma}{2})^2+\kappa^2\}^\mu} = \int \frac{\kappa\left(\frac{x+\gamma/2}{\kappa}\right)'dx}{\kappa^{2\mu}\left\{\left(\frac{x+\gamma/2}{\kappa}\right)^2+1\right\}^\mu} =$$

$$= \kappa^{1-2\mu}\int \frac{dy}{(y^2+1)^\mu}.$$

Μας μένει έτσι να υπολογίσουμε το $\int \frac{dy}{(1+y^2)^\mu}$ και να αντικαταστήσουμε το y με $\frac{1}{\kappa}(x+\frac{\gamma}{2})$. Θα βρούμε ένα τύπο για το ολοκλήρωμα αυτό, ας το καλέσουμε I_μ, συναρτήσει του $I_{\mu-1}$. Μετά από $\mu-1$ βήματα θα φτάσουμε στο $I_1 = \int \frac{dy}{1+y^2}$ το οποίο ξέρουμε να το υπολογίζουμε ($=\text{Arctan}\,y+c$).

Έχουμε λοιπόν:

$$I_\mu = \int \frac{dy}{(1+y^2)^\mu} = \int \frac{1+y^2-y^2}{(1+y^2)^\mu}\, dy =$$

$$= \int \frac{dy}{(1+y^2)^{\mu-1}} - \int \frac{y^2}{(1+y^2)^\mu}\, dy =$$

$$= I_{\mu-1} - \frac{1}{2}\int y\, \frac{2y}{(1+y^2)^\mu}\, dy =$$

$$= I_{\mu-1} - \frac{1}{2}\int y\, \frac{(1+y^2)'}{(1+y^2)^\mu}\, dy =$$

$$= I_{\mu-1} - \frac{1}{2}\int y\,(1+y^2)^{-\mu}(1+y^2)'\, dy =$$

$$= I_{\mu-1} + \frac{1}{2(\mu-1)}\int y \left\{(1+y^2)^{-(\mu-1)}\right\}' dy =$$

$$= I_{\mu-1} + \frac{1}{2(\mu-1)} \left\{\frac{y}{(1+y^2)^{\mu-1}} - \int \frac{dy}{(1+y^2)^{\mu-1}}\right\} =$$

$$= \frac{2\mu-3}{2\mu-2}\, I_{\mu-1} + \frac{1}{2(\mu-1)}\, \frac{y}{(1+y^2)^{\mu-1}} \,,$$

δηλ. βρήκαμε το I_μ συναρτήσει του $I_{\mu-1}$. Στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ολοκλήρωση κατά μέρη.

<u>Παρατήρηση</u>: Τα ολοκληρώματα δ, ε, θ θα μας χρειαστούν στην επόμενη παράγραφο για την ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων.

5.3.3 <u>Η ολοκλήρωση των ρητών συναρτήσεων.</u>

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε ότι με τις μεθόδους που αναπτύξαμε μέχρι τώρα μπορούμε να ολοκληρώσουμε συναρτήσεις της μορφής $\frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου τα $P(x)$, $Q(x)$ είναι πολυώνυμα και το Q έχει τη μορφή

$$Q(x)=(x-a_1)^{n_1}\cdots(x-a_k)^{n_k}(x^2+\gamma_1 x+\delta_1)^{m_1}\cdots(x^2+\gamma_\lambda x+\delta_\lambda)^{m_\lambda}$$

όπου $a_1,\dots\delta_\lambda\in\mathbb{R}$, $n_1,\dots,m_\lambda\in\mathbb{N}$ και $\gamma_\rho^2-4\delta_\rho^2<0$ για $1\leqq\rho\leqq\lambda$

<u>Παρατήρηση</u>: Στην πραγματικότητα κάθε πολυώνυμο μπορεί να γραφεί σαν μία σταθερά επί ένα πολυώνυμο της παραπάνω μορφής. Αυτό είναι πόρισμα του λεγόμενου θεμελιώδους θεωρήματος της "Άλγεβρας" σύμφωνα με το οποίο "κάθε μη σταθερό πολυώνυμο έ-

χει τουλάχιστον μία, εν γένει μιγαδική, ρίζα". Στην παραπάνω διατύπωση το πολυώνυμο μπορεί να έχει και μιγαδικούς συντελεστές. Στην περίπτωση τώρα που το πολυώνυμο έχει πραγματικούς συντελεστές, τότε οι καθαρά μιγαδικές ρίζες του εμφανίζονται ανά ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών και τα ζεύγη αυτά δημιουργούν τους παράγοντες της μορφής $(x^2+\gamma x+\delta)^m$. Δεν θα παρουσιάσουμε εδώ αυτή τη θεωρία, διότι φυσιολογικά ανήκει στη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων. Στους υπολογισμούς το θεώρημα δεν είναι χρήσιμο, γιατί δε μας δίνει μέθοδο να βρίσκουμε τις ρίζες. Το ότι η απόδειξη του θεωρήματος, παρά το όνομά του, χρειάζεται μέσα του Απειροστικού Λογισμού (η θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων είναι κατά κάποια έννοια η επέκταση του Απειροστικού Λογισμού για μιγαδικές συναρτήσεις), μπορούμε να το δούμε από την περίπτωση πολυωνύμου βαθμού 3 (για πολυώνυμα βαθμού 1 και 2 το θεώρημα είναι γνωστό

από τα Γυμνασιακά μαθηματικά). Πραγματικά, με τη βοήθεια του θεωρήματος της ενδιάμεσης τιμής δείξαμε ότι κάθε πολυώνυμο 3ου βαθμού έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Αν λοιπόν $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$, $a_3\neq 0$, θα υπάρχει πραγματικός ρ τέτοιος ώστε $f(\rho)=0$ και επομένως $f(x)=f(x)-f(\rho)=$
$=a_1(x-\rho)+a_2(x^2-\rho^2)+a_3(x^3-\rho^3)=$

$$=a_3(x-\rho)\left\{x^2+x\rho+\rho^2+\frac{a_2}{a_3}(x+\rho)+\frac{a_1}{a_3}\right\}=$$

$$=a_3(x-\rho)\left\{x^2+\left(\rho+\frac{a_2}{a_3}\right)x+\left(\rho^2+\frac{a_2}{a_3}\rho+\frac{a_1}{a_3}\right)\right\},$$

δηλ. πράγματι η $f(x)$ έχει τη μορφή που περιγράψαμε στην αρχή της παραγράφου. Για την απόδειξη πάντως χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής, δηλ. ένα θεώρημα που κατ' εξοχήν ανήκει στον Απειροστικό Λογισμό.

Η μέθοδος ολοκλήρωσης ρητών συναρτήσεων $\frac{P(x)}{Q(x)}$ με παρονομαστή Q της μορφής που περιγράψαμε (θεωρητικά δηλ. όλων των ρητών συναρτήσεων) στηρίζεται στο παρακάτω θεώρημα, που ονομάζεται "θεώρημα ανάλυσης σε απλά κλάσματα".

<u>Θεώρημα</u>: Αν τα ~~μονώνυμα~~ διώνυμα $x-a_1, \dots, x-a_k$ είναι διαφορετικά ανά δύο, τα ~~διώνυμα~~ τριώνυμα $x^2+\gamma_1 x+\delta_1$, $\dots, x^2+\gamma_\lambda x+\delta_\lambda$ διαφορετικά ανά δύο, οι διακρίνουσες $\gamma_\rho^2-4\delta_\rho$ αρνητικές για $\rho=1,\dots,\lambda$ και $n_1,\dots,n_k,m_1,\dots,m_\lambda$ φυσικοί αριθμοί, τότε υπάρχουν σταθερές

$A_1^1,\dots,A_1^{n_1};\dots;A_k^1,\dots,A_k^{n_k};\Delta_1^1,\dots,\Delta_1^{m_1};\dots$
$\dots;\Delta_\lambda^1,\dots,\Delta_\lambda^{m_\lambda};\Gamma_1^1,\dots,\Gamma_1^{m_1};\dots;\Gamma_\lambda^1,\dots,\Gamma_\lambda^{m_\lambda}$

τέτοιες ώστε:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{x-a_1} + \cdots + \frac{A_1^{n_1}}{(x-a_1)^{n_1}} +$$

$$+ \quad - \quad - \quad -$$

$$- \quad - \quad -$$

$$+ \frac{A_k^1}{(x-a_k)} + \cdots + \frac{A_k^{n_k}}{(x-a_k)^{n_k}} +$$

$$+ \frac{\Gamma_1^1 x+\Delta_1^1}{(x^2+\gamma_1 x+\delta_1)} + \cdots + \frac{\Gamma_1^{m_1} x+\Delta_1^{m_1}}{(x^2+\gamma_1 x+\delta_1)^{m_1}} +$$

$+ \quad - \quad - \quad -$

$- \quad - \quad -$

$$+ \frac{\Gamma_\lambda^1 x + \Delta_\lambda^1}{(x^2+\gamma_\lambda x+\delta_\lambda)} + \cdots + \frac{\Gamma_\lambda^{m_\lambda} x + \Delta_\lambda^{m_\lambda}}{(x^2+\gamma_\lambda x+\delta_\lambda)^{m_\lambda}},$$

όπου P, Q πολυώνυμα με "βαθμός $P<$ βαθμός Q" και

$$Q(x) = (x-a_1)^{n_1}\cdots(x-a_k)^{n_k}(x^2+\gamma_1 x+\delta_1)^{m_1}\cdot$$
$$\cdots(x^2+\gamma_\lambda x+\delta_\lambda)^{m_\lambda}.$$

Παρατήρηση: Εκτελώντας τη διαίρεση $P(x) = \Pi(x)\,Q(x) + Y(x)$, βαθμός $Y(x)<$ βαθμός $Q(x)$ βλέπουμε ότι

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \Pi(x) + \frac{Y(x)}{Q(x)}$$

και επομένως η υπόθεση "βαθμός $P<$ $<$ βαθμός Q" δεν βλάπτει ουσιαστικά τη γενικότητα.

Απόδειξη: Η ιδέα της απόδειξης είναι πολύ απλή και θα μας δώσει και την επιπρόσθετη πληροφορία, ότι οι σταθερές $A_1^1, \ldots, \Delta_\lambda^{m_\lambda}$ είναι μονοσήμαντα ορισμένες

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς τον βαθμό $n_1+n_2+\cdots+n_k+2m_1+\cdots+2m_\lambda = N$

του Q. Για $N=1$ το θεώρημα είναι τετριμμένο. Υποθέτουμε $N>1$.

Αν πιστέψουμε κατ' αρχήν την ανάλυση σε κλάσματα που λέει το θεώρημα, τότε η παράσταση

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A_1^{n_1}}{(x-a_1)^{n_1}} = \frac{P(x) - A_1^{n_1} Q_1(x)}{Q(x)}, \text{ όπου}$$

$Q_1(x)$ το πολυώνυμο $\dfrac{Q(x)}{(x-a_1)^{n_1}}$, μετά την εκτέλεση των πράξεων θα πρέπει να πάρει τη μορφή $\dfrac{B(x)}{Q_2(x)}$ όπου B, Q_2 πολυώνυμα,

$Q_2(x) = \dfrac{Q(x)}{x-a_1}$ και "βαθμός $B <$ βαθμός Q_2"

(γιατί;). Το $A_1^{n_1}$ λοιπόν καθορίζεται, αν αυτό είναι δυνατόν, από τη συνθήκη:

"Το πολυώνυμο $P(x) - A_1^{n_1} Q_1(x)$ διαιρείται με $x-a_1$, δηλ. $P(a_1) - A_1^{n_1} Q_1(a_1) = 0$"

Το ότι πραγματικά η συνθήκη αυτή καθορίζει το $A_1^{n_1}$ προκύπτει από το ότι $Q_1(a_1) \neq 0$ (γιατί;)

Η ίδια σκέψη μας καθοδηγεί και για τον καθορισμό των $\Gamma_1^{m_1}$, $\Delta_1^{m_1}$. Έχουμε:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{\Gamma_1^{m_1}x + \Delta_1^{m_1}}{(x^2+\gamma_1 x+\delta_1)^{m_1}} = \frac{P(x)-(\Gamma_1^{m_1}x+\Delta_1^{m_1})Q_1(x)}{Q(x)}$$

όπου $Q_1(x)$ είναι το πολυώνυμο $\dfrac{Q(x)}{(x^2+\gamma_1 x+\delta_1)^m}$

Τα $\Gamma_1^{m_1}, \Delta_1^{m_1}$ καθορίζονται όπως και προηγούμενα, αν αυτό είναι δυνατόν, από τη συνθήκη "Το πολυώνυμο $P(x) - (\Gamma_1^{m_1}x+\Delta_1^{m_1})Q_1(x)$ διαιρείται με το τριώνυμο $x^2+\gamma_1 x+\delta_1$."

Αν γράψουμε $\varrho_1 x+\varrho_2$, $q_1 x+q_2$ τα υπόλοιπα των διαιρέσεων των P, Q_1 δια του $x^2+\gamma_1 x+\delta_1$, η παραπάνω συνθήκη ισοδυναμεί με την "Υπάρχει σταθερά B τέτοια ώστε:

$(\Gamma_1^{m_1}x+\Delta_1^{m_1})(q_1 x+q_2)-(\varrho_1 x+\varrho_2) = B(x^2+\gamma_1 x+\delta_1)$"

δηλαδή:

$$\left.\begin{aligned} q_1\Gamma_1^{m_1} + 0\,\Delta_1^{m_1} - B &= 0 \\ q_2\Gamma_1^{m_1} + q_1\Delta_1^{m_1} - \gamma_1 B &= \varrho_1 \\ 0\,\Gamma_1^{m_1} + q_2\Delta_1^{m_1} - \delta_1 B &= \varrho_2 \end{aligned}\right\}$$

Για να είναι λοιπόν δυνατός ο καθορισμός των $\Gamma_1^{m_1}$, $\Delta_1^{m_1}$ πρέπει η ορίζουσα:

$$D = \begin{vmatrix} q_1 & 0 & -1 \\ q_2 & q_1 & -\gamma_1 \\ 0 & q_2 & -\delta_1 \end{vmatrix} = -\delta_1 q_1^2 + \gamma_1 q_1 q_2 - q_2^2$$

να είναι $\neq 0$. Κατ' αρχήν αποκλείεται $q_1 = q_2 = 0$ γιατί τότε και το πολυώνυμο $Q_1(x) = \dfrac{Q(x)}{(x^2+\gamma_1 x+\delta_1)^{m_1}}$ θα έπρεπε να διαιρείται με $x^2+\gamma_1 x+\delta_1$, το οποίο δεν συμβαίνει. Η απόδειξη είναι εύκολη αλλά όχι τελείως τετριμμένη. (Το $x^2+\gamma_1 x+\delta_1$ είναι ανάγωγο (δε γίνεται γινόμενο πολυωνύμων α' βαθμού), διότι $\gamma_1^2-4\delta_1<0$, και επομένως για να διαιρεί το Q_1 πρέπει να διαιρεί έναν από τους ανάγωγους παράγοντές του. Το τελευταίο όμως δεν μπορεί να συμβεί).

Έστω λοιπόν $q_2 \neq 0$. Θα έχουμε:

$$D = -q_2^2 \left\{ \delta_1 \left(\frac{q_1}{q_2} \right)^2 - \gamma_1 \left(\frac{q_1}{q_2} \right) + 1 \right\}$$ και επειδή εξ' υποθέσεως $\gamma_1^2 - 4\delta_1 < 0$ έπεται $D \neq 0$.

Αφαιρώντας λοιπόν από το $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ένα όρο της μορφής $\frac{A}{(x-a)^m}$ ή $\frac{\Gamma x+\Delta}{(x^2+\gamma x+\delta)^m}$,

αναγόμαστε σε μια ρητή συνάρτηση $\frac{B(x)}{Q_2(x)}$, όπου το πολυώνυμο $B(x)$ έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του πολυωνύμου $Q_2(x)$ και ο βαθμός του τελευταίου είναι μικρότερος του N. Η επαγωγική υπόθεσή μας και οι παρατηρήσεις αυτές συμπληρώνουν εύκολα την απόδειξη.

<u>Παρατήρηση</u>: Αν μας επιτρεπόταν η χρήση μιγαδικών αριθμών, η απόδειξη θα ήταν σημαντικά απλούστερη (γιατί;).

<u>Παράδειγμα</u>: $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)}$

Αρχίζουμε με την ανάλυση

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{\Gamma}{x+1}+\frac{\Delta x+E}{x^2+1}$$

Η βασική μέθοδος προσδιορισμού των συντελεστών A, B, Γ, Δ, E συνίσταται, αφού κάνουμε τις πράξεις στο β' μέλος, στο να εξισώσουμε τους συντελεστές των αριθμητών καί να λύσουμε το σύστημα που προκύπτει. Ας εφαρμόσουμε τη μέθοδο στο παράδειγμά μας:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{\Gamma}{x+1}+\frac{\Delta x+E}{x^2+1}=$$

$$=\frac{A(x-1)(x+1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+\Gamma(x-1)(x^2+1)+\Delta(x-1)^2\cdot(x+1)(\Delta x+E)}{(x-1)^2\,(x+1)\,(x^2+1)},$$

οπότε πρέπει

$$1=(A+\Gamma+\Delta)x^4+(B-2\Gamma-\Delta+E)x^3+(B+2\Gamma-\Delta-E)x^2+$$
$$+(B-2\Gamma+\Delta-E)x+(-A+B+\Gamma+E)\text{ , δηλ.}$$

$$\left.\begin{aligned}&A+\Gamma+\Delta=0\\&B-2\Gamma-\Delta+E=0\\&B+2\Gamma-\Delta-E=0\\&B-2\Gamma+\Delta-E=0\\&-A+B+\Gamma+E=1\end{aligned}\right\}$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε

$$A=-\frac{3}{8}\ ,\quad B=\frac{1}{4}\ ,\quad \Gamma=\frac{1}{8}\ ,\quad \Delta=\frac{1}{4}\ ,\quad E=\frac{1}{4}$$

Ένας άλλος τρόπος να βρούμε τους συντελεστές, που αντιστοιχούν σε παρονομαστή της μορφής $(x-a_k)^{m_k}$, είναι να πολλαπλασιάσουμε τη σχέση που δίνει την ανάλυση του $\frac{P(x)}{Q(x)}$ επί $(x-a_k)^{m_k}$ και να θέσουμε $x=a_k$. Στο παράδειγμά μας π.χ. πολλαπλασιάζοντας επί $(x-1)^2$ και θέτοντας $x=1$, βρίσκουμε:

$B = \frac{1}{(1+1)(1^2+1)} = \frac{1}{4}$. Πολλαπλασιάζοντας επί $x+1$ και θέτοντας $x=-1$, βρίσκουμε

$$\Gamma = \frac{1}{(-1-1)^2((-1)^2+1)} = \frac{1}{4\cdot 2} = \frac{1}{8}.$$

Η ολοκλήρωση τώρα της συνάρτησης $\frac{1}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)}$ ανάγεται σε γνωστά ολοκληρώματα.

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)} = -\frac{3}{8}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{8}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4}\int\frac{x+1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= -\frac{3}{8}\log|x-1| + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x-1}\right) + \frac{1}{8}\log|x+1| + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{8}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= -\frac{3}{8}\log|x-1| - \frac{1}{4}\,\frac{1}{x-1} + \frac{1}{8}\log|x+1| + \frac{1}{4}\operatorname{Arctan}x + \frac{1}{8}\log|x^2+1|$$

$+ c$.

5.3.4. Ολοκληρώματα που ανάγονται σε ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Πολλές μορφές ολοκληρωμάτων ανάγονται σε ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων. Παρουσιάζουμε μερικές από αυτές τις περιπτώσεις. Θα χρησιμοποιούμε το γράμμα R για ρητές συναρτήσεις μιας ή περισσότερων μεταβλητών. Π.χ. $R(x,y)$ θα σημαίνει μια συναρτηση της μορφής $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ όπου P και Q πολυώνυμα των x, y.

α) $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$.

Η αντικατάσταση $\tan\frac{x}{2} = y$ $(x = 2\operatorname{Arctan} y)$ ανάγει τα ολοκληρώματα αυτά σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων. Πραγματικά, θα έχουμε:

$$\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}\ ,\quad \sin x = \frac{2y}{1+y^2}\ ,\quad (2\operatorname{Arctan} y)' = \frac{2}{1+y^2}\,,$$

οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται:

$\int R\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}, \frac{2y}{1+y^2}\right)\frac{2}{1+y^2}\,dy$, δηλ. το ολοκλήρωμα μιας ρητής συνάρτησης. Η μέθοδος είναι αρκετά επίπονη, για αυτό επιδιώκουμε συχνά, ανάλογα με τη μορφή της R, να βρούμε απλούστερους τρόπους ολοκλήρωσης. Αν π.χ. η $R(\cos x, \sin x)$ έχει τη μορφή $(\cos x)\,R_1(\cos x, \sin x)$ και στη ρητή συνάρτηση $R_1(x,y)$ εμφανίζονται μόνο άρτιες δυνάμεις του x, τότε η αντικατάσταση $y = \sin x$ ανάγει το $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ πάλι σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης (γιατί;).

<u>Παράδειγμα:</u> $\int \frac{dx}{\sin x}$

Θέτω $y = \tan\frac{x}{2}$, οπότε $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$ και έχω:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+y^2}{2y} (2\,\mathrm{Arctan}\,y)' dy =$$

$$= \int \frac{\cancel{1+y^2}}{2y} \frac{2}{\cancel{1+y^2}} dy = \int \frac{dy}{y} = \log|y| + c =$$

$$= c + \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|.$$

Αν και εδώ το ολοκλήρωμα υπολογίστηκε εύκολα, ας δώσουμε και ένα άλλο τρόπο υπολογισμού.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)\left(\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\right)dx$$

$$= \int \frac{(\tan\frac{x}{2})'}{\tan\frac{x}{2}} dx = c + \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$$

β) $\int R(e^x)\,dx$. Η αντικατάσταση $e^x = y$ ανάγει το ολοκλήρωμα στο $\int R(y)\frac{dy}{y}$. Στην περίπτωση αυτή ανάγονται και τα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων των υπερβολικών συναρτήσεων.

<u>Παράδειγμα:</u> $\int \sinh^2 x\, dx$

Θέτω $y=e^x$, οπότε $\sinh x = \frac{1}{2}(y-\frac{1}{y})$

και έχω $\int \sinh^2 x\, dx = \int \frac{1}{4}(y-\frac{1}{y})^2 \frac{dy}{y} =$

$$= \frac{1}{4}\int (y^2+\frac{1}{y^2}-2)\frac{1}{y}\, dy =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int y\, dy + \int y^{-3} dy - 2\int \frac{dy}{y}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{y^2}{2} + \frac{y^{-2}}{-2} - 2\log|y|\right] + c =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x}) - 2x\right] + c = \frac{\sinh x}{4} - \frac{x}{2} + c.$$

γ) $\int R\left(x, \left(\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{1}{n}}\right) dx \quad , \quad n \in \mathbb{N}$

Η αντικατάσταση $y = \left(\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{1}{n}}$ ανάγει το ολοκλήρωμα σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης.

<u>Παράδειγμα:</u>

$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$. Θέτω $x-1=y^2$, οπότε

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int \frac{2\cancel{y}\, dy}{(1+y^2)\cancel{y}} = 2\,\mathrm{Arctan}\, y + c =$$

$$= 2\,\mathrm{Arctan}\sqrt{x-1} + c .$$

δ) $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}\right) dx$

Τα ολοκληρώματα αυτά είναι η ειδική περίπτωση $n=2$ ολοκληρωμάτων της μορφής $\int R(x, \sqrt{P(x)})\, dx$, όπου $P(x)$ ένα πολυώνυμο βαθμού n. Την περίπτωση $n=1$ την έχουμε ουσιαστικά εξετάσει. Πραγματικά το $\int R(x, \sqrt{ax+\beta})\, dx$ ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης αν θέσουμε $y^2 = ax+\beta$. Ας δούμε λεπτομερέστερα γιατί.

Η αντικατάσταση $y^2 = ax+\beta$, δηλαδή $x = \frac{y^2-\beta}{a}$ μετατρέπει την $R(x, \sqrt{ax+\beta})$ στη ρητή συνάρτηση $R\left(\frac{y^2-\beta}{a}, y\right)$ και το ολοκλήρωμα $\int R(x,y)$ στο

$$\int R\left(\frac{y^2-\beta}{a}, y\right)\left(\frac{y^2-\beta}{a}\right)' dy = \int R\left(\frac{y^2-\beta}{a}, y\right) \frac{2y}{a}\, dy .$$

Ήταν ουσιαστικό για τη μετατροπή αυτή το γεγονός ότι η $y^2 = \alpha x + \beta$ έχει ρητή λύση ως προς x: $x = \dfrac{y^2 - \beta}{\alpha}$. Έτσι π.χ η αντικατάσταση $y^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ δεν είναι η κατάλληλη για τη μετατροπή του ολοκληρώματος $\int R(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma})\,dx$ σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης. Πραγματικά θα είχαμε $x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4(\gamma - y^2)}}{2\alpha}$ δηλαδή

$$\int R(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma})\,dx =$$

$$= \int R\left(\frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4(\gamma - y^2)}}{2\alpha}, y\right)\left(\frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4(\gamma - y^2)}}{2\alpha}\right)' dy$$

δηλ., εν γένει ολοκλήρωμα πάλι μη ρητής συνάρτησης.

Ας υποθέσουμε κατ' αρχήν $\alpha > 0$. Μια μικρή αλλαγή στην παραπάνω ιδέα, που οφείλεται στο μεγάλο Ελβετό μαθηματικό του 18ου αιώνα L. Euler, θα μας δώσει την επιθυμητή αντικατάσταση. Θέτουμε: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = (y + \sqrt{\alpha}\, x)^2$. Τώρα μπορούμε να βρούμε ρητά το x συναρτήσει y (γι' αυτό προσθέσαμε τον όρο $\sqrt{\alpha}\, x$):

$x = \frac{\gamma - y^2}{2\sqrt{a}\, y - \beta}$, οπότε το ολοκλήρωμα μετατρέπεται ως εξής:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+\beta x+\gamma})\, dx =$$

$$= \int R\left(\frac{\gamma - y^2}{2\sqrt{a}\, y-\beta}, y+\sqrt{a}\, \frac{\gamma-y^2}{2\sqrt{a}\, y-\beta}\right)\left(\frac{\gamma-y^2}{2\sqrt{a}\, y-\beta}\right)' dy$$

Αν $a<0$, τότε το τριώνυμο $ax^2+\beta x+\gamma$ θα έχει δύο πραγματικές ρίζες ρ_1, ρ_2 (αλλιώς θα ήταν <0 για όλα τα x) και θα έχουμε:

$$ax^2+\beta x+\gamma = a(x-\rho_1)(x-\rho_2) = (x-\rho_1)^2 \frac{a(x-\rho_2)}{x-\rho_1}$$

Αν λοιπόν θέσουμε

$$y^2 = \frac{a(x-\rho_2)}{x-\rho_1}$$

τότε μπορούμε να λύσουμε πάλι ρητά ως προς x και θα έχουμε $x = \frac{a\rho_2 - \rho_1 y^2}{a-y^2}$, οπότε

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}) =$$

$$= \int R\left(\frac{a\rho_2-\rho_1 y^2}{a-y^2}, y\left(\frac{a\rho_2-\rho_1 y^2}{a-y^2} - \rho_1\right)\right)\left(\frac{a\rho_2-\rho_1 y^2}{a-y^2}\right)' dy$$

Μία διαφορετική μέθοδος για την ολοκλήρωση θα ήταν, με μετασχηματισμούς ανάλογους με αυτούς που χρησιμοποιήσαμε στο παράδειγμα ε της § 5.3.1, να αναχθούμε σε ολοκληρώματα της μορφής $\int R(x, \sqrt{x^2+1})dx$ ή $\int R(x, \sqrt{x^2-1})$ ή $\int R(x, \sqrt{1-x^2})$

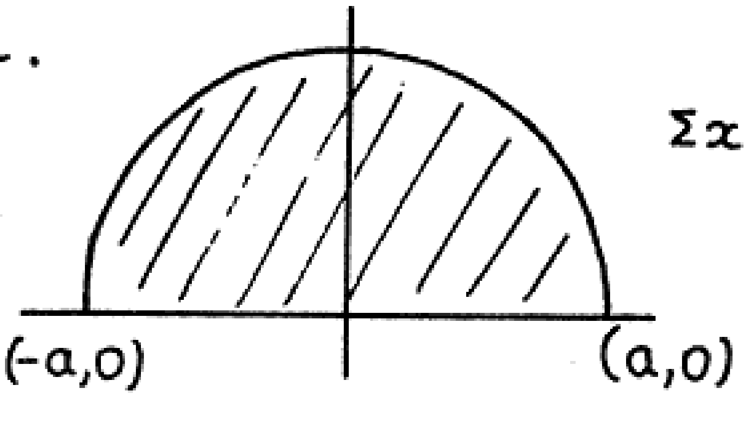
Το $\int R(x, \sqrt{x^2+1})$ μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης των $\sin y$, $\cos y$ με την αντικατάσταση $x = \tan y$.

Το $\int R(x, \sqrt{x^2-1})dx$ μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του e^x με την αντικατάσταση $x = \cosh y$ και το $\int R(x, \sqrt{1-x^2})dx$ μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης των $\sin y$, $\cos y$ με την αντικατάσταση $x = \sin y$.

<u>Παραδείγματα</u>: α) Η συνάρτηση $y = \sqrt{a^2-x^2}$, $-a \leq x \leq a$, παριστάνει ημιπεριφέρεια με ακτίνα a.

Το ολοκλήρωμα

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx$$



Σχ. 54

παριστάνει επομένως το εμβαδόν του διαγραμμισμένου ημικυκλίου και θα πρέπει να ισούται με $\frac{1}{2}\pi a^2$. Ας το επαληθεύσουμε.

Θέτουμε $x = a\cdot \sin t \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ και

έχω $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\, a\cos t\, dt =$

$= a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt$ και μένει να δείξουμε ότι

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{2}$. Η απόδειξη είναι εύκολη:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t)\,(2t)'\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \cos y\, dy = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin y\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}(0-0) = \frac{\pi}{2}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Δεν πρέπει να διέφυγε την προσοχή του αναγνώστη ότι χρησιμοποιήσαμε δύο φορές την εξής ιδιότητα:

" Αν $x = q(t)$, $\gamma \leq t \leq \delta$, είναι παραγωγίσιμη τότε

$$\int_{q(\gamma)}^{q(\delta)} f(x)\,dx = \int_{\gamma}^{\delta} f(q(t))\,q'(t)\,dt \text{ ''.}$$

Εδώ βέβαια έχουμε κάνει, χωρίς να το πούμε, και άλλες υποθέσεις, όπως η ολοκληρωσιμότητα των $f(x)$ και $f(q(t))q'(t)$. Δεν θα ψάξουμε να βρούμε τις ακριβείς προϋποθέσεις, θα υποθέσουμε απλά ότι οι q και f είναι τέτοιες ώστε να ισχύει ο τύπος αόριστης ολοκλήρωσης με αντικατάσταση

$$\int f(x)\,dx = \int f(q(t))\,q'(t)\,dt\ , \quad (x = q(t))$$

Το αριστερό μέλος είναι μια συνάρτηση $F(x)$ και το δεξιό μία συνάρτηση $G(t)$ τέτοια ώστε $F(q(t)) = G(t)$. Επομένως

$$\int_{q(\gamma)}^{q(\delta)} f(x)\,dx = F(q(\delta)) - F(q(\gamma)) = G(\delta) - G(\gamma) =$$

$$= \int_{\gamma}^{\delta} f(q(t))\,q'(t)\,dt\ .$$

Αν η q είναι π.χ. αύξουσα, τότε έχουμε μία διαισθητικά ξεκάθαρη εικόνα: Όταν το t μεταβάλλεται από γ μέχρι δ το $x = q(t)$ μεταβάλλεται, αυξανόμενο και αυτό, από $q(\gamma)$ έως $q(\delta)$. Αν η q δεν είναι αύξουσα, γενικότερα μονότονη, τότε η διαισθητική εικόνα είναι πιο πολύπλοκη. Ας φανταστούμε το $\int_0^1 x dx$. Γράφοντας $x = \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, είναι φανερό, και αναλυτικά και διαισθητικά, ότι $\int_0^1 x dx =$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin t \cdot \cos t \, dt.$$

$$\left(\int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \right.$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \, dt = \frac{1}{2} \, \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\sin 2t)(2t)' dt =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin y \, dy = \frac{1}{4} \left[-\cos y \right]_0^{\pi} = \frac{1}{4} \left[-(-1) - (-1) \right] =$$

$$\left. = \frac{1}{2} \right).$$

Παίρνοντας τώρα $x = \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{5\pi}{2}$ (όχι $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$), σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο θα έπρεπε πάλι να βρούμε:

$$\int_0^1 x dx = \int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin t \cos t \, dt$$

$$\left(= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t \, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \sin t \cos t \, dt \right)$$

Αυτό πράγματι είναι σωστό γιατί $\int_{\pi/2}^{5\pi/2} \sin t \cos t \, dt = 0$ όπως φαίνεται άμεσα με ένα απλό υπολογισμό. Στη γενική περίπτωση το τελευταίο ολοκλήρωμα θα αντιστοιχούσε σε ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int_\gamma^\delta g'(t)\,dt$, όπου $g(\gamma) = g(\delta)$ (πάρτε $g(t) = F(q(t))$, οπότε $g'(t) = F'(q(t))q'(t) = f(q(t))\,q'(t)$). Ένα τέτοιο όμως ολοκλήρωμα είναι φυσικά 0, διότι

$$\int_\gamma^\delta g'(t)\,dt = g(\delta) - g(\gamma) = 0$$

β) $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$

Θέτουμε $x = \sinh y$ οπότε $1+x^2 = \cosh^2 y$ και έχω:

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \int \cosh y \cosh y \, dy =$$

$$= \int \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2 dy = \frac{1}{4}\int \left(e^{2y} + e^{-2y} + 2\right) dy =$$

$$= \frac{1}{4}\int e^{2y}\, dy + \frac{1}{4}\int e^{-2y}\, dy + \frac{y}{2} + c =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{e^{2y}}{2} - \frac{1}{4}\,\frac{e^{-2y}}{2} + \frac{y}{2} + c = \frac{1}{4}\sinh 2y + \frac{y}{2} + c =$$

$$= \frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \log (x + \sqrt{1+x^2}) + c$$

• Με τον μετασχηματισμό του Euler θα προχωρούσαμε ως εξής:

$(1+x^2) = (y+x)^2$ δηλ. $x = \dfrac{1-y^2}{2y}$, οπότε

$$\int \sqrt{1+x^2} = \int \left(y + \frac{1-y^2}{2y}\right) \left(\frac{1-y^2}{2y}\right)' dy =$$

$$= - \int \frac{1+y^2}{2y} \cdot \frac{1+y^2}{2y^2} \, dy = - \frac{1}{4} \int \frac{1+2y^2+y^4}{y^3} \, dy =$$

$$= - \frac{1}{4} \int (y^{-3} + 2y^{-1} + y) \, dy =$$

$$= - \frac{1}{4} \left\{ \frac{y^{-2}}{-2} + 2 \log|y| - \frac{y^2}{2} \right\} + c = (y = \sqrt{1+x^2} - x)$$

$$= \frac{1}{8} \frac{1}{(\sqrt{1+x^2} - x)^2} - \frac{1}{2} \log (\sqrt{1+x^2} - x) - \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)^2}{8} + c.$$

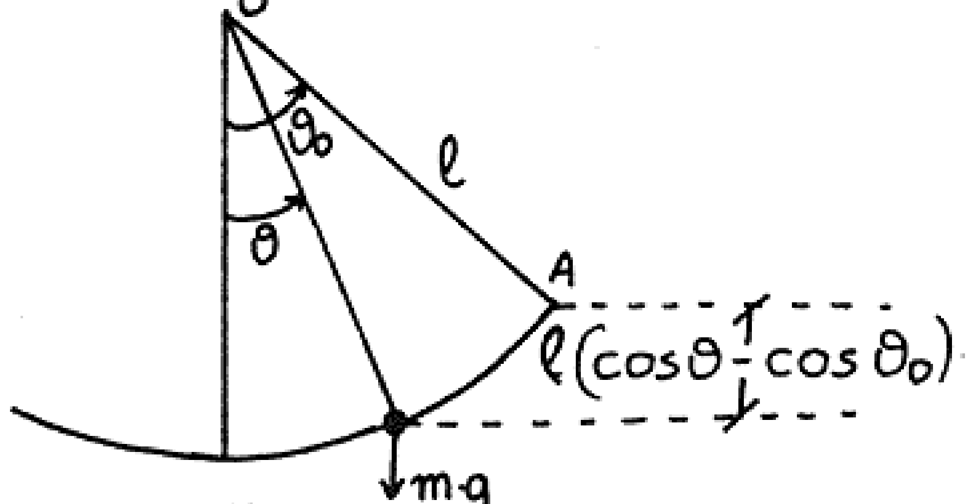
Πού κάναμε λάθος; Απάντηση: πουθενά! Απλούστατα οι δύο εκφράσεις που βρήκαμε διαφέρουν μεταξύ τους κατά μία σταθερά (αποδείξτε το).—

5.3.5 Το απλό εκκρεμές.

Τα ολοκληρώματα $\int R(x, \sqrt{P(x)})$ με $P(x)$ πολυώνυμο βαθμού μεγαλύτερου του 2 εν γένει δεν εκφράζονται με τη βοήθεια στοιχειωδών συναρτήσεων. Οι περιπτώσεις βαθμού 3 ή 4 οδηγούν στα λεγόμενα ελλειπτικά ολοκληρώματα. Η πολύ ενδιαφέρουσα θεωρία τους ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτών των σημειώσεων. Ξεκινάει βασικά από το Νορβηγό μαθηματικό N. Abel (αρχή 19ου αιώνα).

Σημειώνουμε ότι τέτοια ολοκληρώματα εμφανίζονται ακόμη και σε απλά, τουλάχιστον στη διατύπωση, προβλήματα όπως π.χ. η εύρεση του μήκους ελλειπτικού τόξου ή η μελέτη της κίνησης του απλού εκκρεμούς. Ας εξετάσουμε λεπτομερέστερα το απλό εκκρεμές.

Γράφουμε g για την επιτάχυνση της βαρύτητας ($\simeq 10\ m/sec^2$) και θεωρούμε αμελητέες τις δυνάμεις που προέρχονται από



Σχ.55

τριβή, αντίσταση του αέρα κ.τ.λ). Η θέση του εκκρεμούς καθορίζεται από τη γωνία $\vartheta = \vartheta(t)$. Περιμένουμε, από φυσική εποπτεία, ότι η συνάρτηση $\vartheta = \vartheta(t)$ θα είναι μια συνεχής περιοδική συνάρτηση, με περίοδο T ίση με το χρόνο που χρειάζεται η μάζα για να επιστρέψει στην αρχική της θέση, φθίνουσα για $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$ και αύξουσα για $\frac{T}{2} \leq t \leq T$.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι βρισκόμαστε στην αρχή της κίνησης οπότε η ϑ είναι φθίνουσα. Η αρχή της διατηρήσεως της ενεργείας συνεπάγεται

$$\frac{1}{2} m \left(\ell \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = mg \left(\cos\vartheta(t) - \cos\vartheta_0 \right) \ell .$$

Η μαθηματική ερμηνεία του ότι ή ϑ φθίνει στην αρχή της κίνησης δ είναι η υπόθεση $\frac{d\vartheta}{dt} < 0$, οπότε

$$\frac{d\vartheta}{dt} = - \sqrt{\frac{2g}{\ell} \left(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0 \right)} =$$

$$= - \sqrt{\frac{2g}{\ell} \left(1 - 2\sin^2\frac{\vartheta}{2} - 1 + 2\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} \right)}$$

δηλ. $\frac{d\theta}{dt} = -2\sqrt{\frac{g}{\ell}\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$

Η υπόθεση $\frac{d\theta}{dt} < 0$, σημαίνει ότι η $\theta = \theta(t)$ αντιστρέφεται και για την αντίστροφή της $t = t(\theta)$ θα έχουμε

$$\frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\ \frac{1}{\sin\frac{\theta_0}{2}\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\frac{\theta}{2}}}\ , \ -\theta_0 < \theta < \theta_0,$$

όπου θέσαμε $\kappa = \frac{1}{\sin\frac{\theta_0}{2}}$. Το t λοιπόν θα είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της παραπάνω συνάρτησης και επομένως ο προσδιορισμός του ανάγεται στην εύρεση ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\theta}}$$

Τα ολοκληρώματα αυτής της μορφής λέγονται "ελλειπτικά α' είδους με τη μορφή του Lagrange".

Γράφοντας $\sin\theta = y$, το παραπάνω ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2\theta}} = \int \frac{\cos\theta \; d\theta}{\cos\theta \sqrt{1-\kappa^2 \sin^2\theta}} =$$

$$= \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\kappa^2 y^2)}} \; ,$$

δηλ. είναι πραγματικά της μορφής $\int R(x, \sqrt{P(x)})$, όπου το P είναι πολυώνυμο $4^{ου}$ βαθμού.

5.3.6 Ολοκλήρωση με τη βοήθεια του υπολογιστή.

Ο αριθμητικός υπολογισμός ενός ορισμένου ολοκληρώματος $\int_a^\beta f(x)\,dx$, όταν δίνονται οι αριθμοί α, β και η συνάρτηση f, ακόμα και όταν δεν μπορούμε να βρούμε με τη βοήθεια στοιχειωδών συναρτήσεων τύπο για το $\int f(x)\,dx$, διευκολύνεται πολύ με τη βοήθεια των υπολογιστών. Αυτό ήταν γνωστό από πολλά χρόνια και έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι για να γίνεται όσο το δυνατόν αποδοτικότερα αυτή η δουλειά. Θα πούμε λίγα λόγια στο τέλος του κεφάλαιου και θα μάθετε περισσότερα σε άλλα μαθήματα. Προς το τέλος της δεκαετίας του 1970 άρχισαν να χρησιμοποιούνται προγράμματα υπολογιστών, τα οποία δε δίνουν μόνο αριθμητικές τιμές αλλά εκτελούν και αόριστες ολοκληρώσεις σε όλες τις περιπτώσεις που αυτό είναι δυνατό να γίνει. Έτσι π.χ. όλες οι ολοκληρώσεις που <u>μάθαμε</u> (ρητών συναρτήσεων $R(x, \sqrt{ax^2+\beta x+\gamma}), \ldots$) μπορούν να γίνουν με τη βοήθεια των υπολογιστών. Αυτό δεν πρέπει να προκαλεί έκπληξη, γιατί, εννοιολογικά τουλάχιστον, όταν είναι γνωστή η θεωρία η υπόλοιπη διαδικασία είναι δουλειά ρουτίνας. Φαίνεται όμως ότι υπήρχαν αρκετά προβλήματα που έπρεπε να επιλυθούν μέχρι να γίνει δυνατή η χρήση των υπολογιστών γι' αυτό το σκοπό και αυτό δικαιολογεί τη χρονική καθυστέρηση σ' αυτό τον τομέα.

Ιδού η εντολή και η απάντηση του Computer (πρόγραμμα macsyma) για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)(x^2+1)}$$

ἀνάλογου μέ αὐτά πού εἴδαμε στήν § 5.3.2.
(Η απάντηση δόθηκε σε λιγότερο από 1 sec!)

```
(c5) integrate(x/((x-1)^2*(x+1)*(x^2+1)),x);
                2
         log(x  + 1)   log(x + 1)   atan(x)   log(x - 1)      1
(d5)     ----------- - ---------- - ------- - ---------- - -------
              8             8           4          8        4 x - 4
```

5.4 Γενικευμένα ολοκληρώματα

Το ολοκλήρωμα Riemann ορίστηκε για φραγμένες συναρτήσεις ορισμένες σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Είναι πολύ χρήσιμο να επεκτείνουμε τον ορισμό και για συναρτήσεις (όχι αναγκαστικά φραγμένες) ορισμένες σε άλλης μορφής διαστήματα. Δίνουμε πρώτα τους σχετικούς ορισμούς:

<u>Ορισμός:</u> i) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[\gamma, \beta]$, $\alpha < \gamma \leq \beta$ και υπάρχει το όριο $\lim\limits_{\gamma \to \alpha^+} \int_\gamma^\beta f$ τότε λέμε ότι υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha^+}^\beta f$ και ισούται με το

παραπάνω όριο.

ii) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[\alpha,\gamma]$, $\alpha \leqq \gamma < \beta$ και υπάρχει το όριο $\lim\limits_{\gamma\to\beta^-}\int_{\alpha}^{\gamma} f$, τότε λέμε ότι υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta^-} f$ και ισούται με το παραπάνω όριο.

iii) Αν υπάρχουν τα $\int_{\alpha+}^{\gamma} f$, $\int_{\gamma}^{\beta-} f$ για κάποιο γ, $\alpha<\gamma<\beta$, τότε λέμε ότι υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha+}^{\beta-} f$ και ισούται με το άθροισμα $\int_{\alpha+}^{\gamma} f + \int_{\gamma}^{\beta-} f$. (Εύκολα φαίνεται ότι αν υπάρχει το $\int_{\alpha+}^{\beta-}$ τότε υπάρχουν τα $\int_{\alpha+}^{\delta}$, $\int_{\delta}^{\beta-}$ και για οποιοδήποτε άλλο δ, $\alpha<\delta<\beta$, και η τιμή του $\int_{\alpha+}^{\beta-} f$ είναι ανεξάρτητη της επιλογής του

γ, $\alpha<\gamma<\beta$).

iv) Τα ολοκληρώματα $\int_{\alpha}^{\infty}$, $\int_{\alpha+}^{\infty}$, $\int_{-\infty}^{\beta}$, $\int_{-\infty}^{\beta-}$, $\int_{-\infty}^{\infty}$ ορίζονται ανάλογα. Π.χ. το $\int_{\alpha}^{\infty} f$ υπάρχει αν η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[\alpha, M]$, $M>\alpha$ και υπάρχει το όριο $\lim\limits_{M\to\infty} \int_{\alpha}^{M} f$, το οποίο ορίζεται ως η τιμή του $\int_{\alpha}^{\infty} f$.

Μια τετριμμένη παρατήρηση σχετικά με τα γενικευμένα ολοκληρώματα είναι ότι η ύπαρξη π.χ. του $\int_{\alpha}^{\beta} f$ συνεπάγεται και την ύπαρξη των $\int_{\alpha+}^{\beta} f$, $\int_{\alpha}^{\beta-} f$, $\int_{\alpha+}^{\beta-} f$. Ας εξετάσουμε π.χ. το $\int_{\alpha+}^{\beta} f$. Αν $\alpha<\gamma<\beta$ τότε $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f - \int_{\gamma}^{\beta} f \right| = \left| \int_{\alpha}^{\gamma} f \right| \leqq (\gamma-\alpha) M$, όπου M ένα άνω φράγμα της $|f|$ στο $[a,\beta]$ (το οποίο υπάρχει λόγω της ολοκληρωσιμότητας της f στο $[a,\beta]$). Από την ανισότητα αυτή έπεται άμεσα ότι $\int_\gamma^\beta f \to \int_a^\beta f$, $\gamma \to a+$, δηλ. $\int_a^\beta f = \int_{a+}^\beta f$.

Οι ενδιαφέρουσες επομένως περιπτώσεις είναι εκείνες στις οποίες η f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,\beta]$ (ή το διάστημα είναι της μορφής $[a,\infty)$, $(-\infty,\beta]$, (a,∞), $(-\infty,\beta)$). Αυτό μπορεί να συμβεί i) όταν η f δεν είναι ορισμένη στο a ή στο β ή και στα δύο ή ii) όταν η f δεν είναι φραγμένη.

Σημειώνουμε ακόμη ότι τα γενικευμένα ολοκληρώματα συναντιώνται πολύ συχνά και είναι σημαντικότατα τόσο σε διάφορους κλάδους των μαθηματικών όσο και σε εφαρμογές.

Πριν προχωρήσουμε σε εφαρμογές θα δώσουμε ένα απλό αλλά σημαντικό κριτήριο για την ύπαρξη γενικευμένων ολοκληρωμάτων. Θα το διατυπώσουμε στην περίπτωση διαστήματος της μορφής

$[a,\infty)$, αλλά ισχύει με τις προφανείς αλλαγές και στις υπόλοιπες περιπτώσεις.

Αν $|f(t)| \leq g(t)$, $a \leq t < \infty$, και το $\int_a^\infty g$ υπάρχει, τότε υπάρχει και το $\int_a^\infty f$, εφ' όσον η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[a, M]$, $M > a$.

<u>Απόδειξη</u>: Δείχνουμε πρώτα ότι υπάρχει το $\int_a^\infty (f(t)+g(t))\,dt$. Πραγματικά, η υπόθεσή μας συνεπάγεται ότι $0 \leq f(t)+g(t) \leq 2g(t)$, άρα η $\Phi(M) = \int_a^M (f(t)+g(t))dt$ είναι αύξουσα συνάρτηση του M και φράσσεται προς τα πάνω από το $2\int_a^\infty g$ (γιατί;). Συνάγουμε λοιπόν ότι υπάρχει το όριο $\lim\limits_{M\to\infty} \int_a^M (f(t)+g(t))$, δηλ. το $\int_a^\infty (f+g)$. Εξ' υποθέσεως όμως υπάρχει και το

$\lim\limits_{M\to+\infty}\int_a^M g(t)dt$, άρα θα υπάρχει και το

$\lim\limits_{M\to+\infty}\left(\int_a^M (f+g) - \int_a^M g\right) = \lim\limits_{M\to\infty}\int_a^M f$, δηλ. θα

υπάρχει το $\int_a^\infty f$.

Αφήνουμε στον αναγνώστη να διατυπώσει και αποδείξει απλές ιδιότητες των γενικευμένων ολοκληρωμάτων ανάλογες με αυτές που δείξαμε για τα απλά ολοκληρώματα (π.χ. $\int_{a+}^{\beta} f + \int_{a+}^{\beta} g = \int_{a+}^{\beta} f+g$ κλπ).

Αν δεν υπάρχει κίνδυνος συγχύσεως θα γράφουμε απλά $\int_a^\beta f$, αντί $\int_{a+}^{\beta}$ ή $\int_a^{\beta-}$ κ.τ.λ.

Παραδείγματα

a) $\int_{0+}^{1} x^a dx$. Το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο "στο 0", γιατί η x^a δεν ορίζεται για $x=0$ (εκτός για $a\in\mathbb{N}$, σύμφωνα με τους ορισμούς που δώσαμε σ' αυτές τις σημειώσεις).

Αν $a=-1$ και $\varepsilon>0$ τότε

$$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}=\log x\Big|_{\varepsilon}^{1}=-\log\varepsilon=\log\frac{1}{\varepsilon}\to+\infty\,,\ \varepsilon\to 0+$$

άρα το ολοκλήρωμα δεν υπάρχει. (Λέμε επίσης σε τέτοιες περιπτώσεις: Το ολοκλήρωμα αποκλίνει στο $+\infty$).

Αν $a\neq-1$ και $\varepsilon>0$, τότε

$$\int_{\varepsilon}^{1}x^{a}\,dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}\Big|_{\varepsilon}^{1}=\frac{1}{a+1}-\frac{\varepsilon^{a+1}}{a+1}$$

και επομένως το ολοκλήρωμα υπάρχει, και ισούται με $\frac{1}{a+1}$, αν $a>-1$, ενώ δεν υπάρχει (αν θέλετε, αποκλίνει στο $+\infty$) για $a<1$.

β) $\int_{1}^{\infty}x^{a}\,dx$. Αν $a=-1$ και $M>1$ τότε $\int_{1}^{M}\frac{dx}{x}=\log x\Big|_{1}^{M}=\log M\to+\infty\,,\ M\to\infty$, άρα το $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x}$ δεν υπάρχει.

Αν $a\neq-1$, τότε $\int_{1}^{M}x^{a}\,dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}\Big|_{1}^{M}=\frac{M^{a+1}}{a+1}-\frac{1}{a+1}$ και επομένως το ολοκλήρωμα υπάρχει και ισούται με $-\frac{1}{a+1}$, αν $a<-1$, ενώ δεν υπάρχει (είναι $+\infty$) αν $a>-1$.

<u>Παρατήρηση</u> Τα δύο αυτά παραδείγματα χρησιμοποιούνται πολύ συχνά σε συνδυασμό με το κριτήριο που αποδείξαμε προηγούμενα. Π.χ. τό $\int_1^\infty \frac{(\sin x)x}{x^3+1}dx$ υπάρχει.

Πραγματικά έχουμε, για $x \geqslant 1$,

$$\left|\frac{(\sin x)x}{x^3+1}\right| \leqq \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \text{ και } -2<-1 .$$

γ) $\int_{0+}^\infty x^a dx$. Δεν υπάρχει για κανένα a (γιατί;).

δ) Ένα πολύ σημαντικό ολοκλήρωμα είναι το λεγόμενο "ολοκλήρωμα του Euler β' είδους" ή "Γάμμα συνάρτηση", που ορίζεται για όλα τα $s>0$ ως εξής:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$$

Το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο και στο 0 λόγω του παράγοντα t^{s-1}.

Πρέπει να δείξουμε την ύπαρξη των $\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}dt$ και $\int_1^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$. Για το πρώτο

παρατηρούμε ότι $|t^{s-1}e^{-t}| \leq t^{s-1}$ (γιατί;) και χρησιμοποιούμε το παράδειγμα α.
Για το δεύτερο παρατηρούμε ότι
$t^{s-1}e^{-t} = \left(t^{s-1}e^{-\frac{t}{2}}\right)e^{-\frac{t}{2}}$ και θα δείξουμε σε λίγο ότι η $t^{s-1}e^{-\frac{t}{2}}$ είναι φραγμένη στο $[1,\infty)$ δηλ. υπάρχει M τέτοια ώστε $0 \leq t^{s-1}e^{-\frac{t}{2}} \leq M$, $t \geq 1$. Με βάση το κριτήριό μας αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το $\int_1^\infty Me^{-\frac{t}{2}}dt$ υπάρχει. Αυτό όμως είναι απλό διότι :

$$\int_1^N Me^{-\frac{t}{2}}dt = M\left[-2e^{-\frac{t}{2}}\right]_1^N = M\left[2e^{-\frac{1}{2}} - 2e^{-\frac{N}{2}}\right] \to$$
$$\to 2Me^{-\frac{1}{2}}.$$

Μένει να δείξουμε ότι η $f(t) = t^{s-1}e^{-\frac{t}{2}}$ είναι φραγμένη στο $[1,\infty)$. Παρατηρούμε ότι $f(t) \geq 0$ και

$$f'(t) = t^{s-2}e^{-t/2}\left\{(s-1) - \frac{1}{2}t\right\}$$

Η $f'(t)$ είναι λοιπόν ≤ 0 για $t \geq 2(s-1)$ οπότε η $f(t)$ είναι φθίνουσα για $t \geq 2(s-1)$.
Από την άλλη μεριά η $f(t)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[1, 2(s-1)]$ και

επομένως είναι φραγμένη εκεί, έστω $|f(t)| \leq A$, $1 \leq t \leq 2(s-1)$. Συνολικά λοιπόν θα έχουμε $|f(t)| \leq A$, για όλα τα t με $t \geq 1$, όπως ακριβώς έπρεπε να δείξουμε.

<u>Παρατήρηση</u> Στο τελευταίο μέρος της απόδειξης ουσιαστικά δείξαμε ότι για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$ $t^n e^{-t} \to 0, n \to \infty$ (γιατί;). Θα επανέλθουμε σ' αυτή την πολύ σημαντική οριακή σχέση.

Ας πούμε με την ευκαιρία του παραδείγματος δύο λόγια παραπάνω για τη συνάρτηση $\Gamma(s)$, $s > 0$.

Έχουμε

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

άρα $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t}\Big|_0^{\infty} = 1$

(Δικαιολογείστε πλήρως την πιο πάνω γραμμή. Όσο πιο γρήγορα γίνει κτήμα σας το περιεχόμενο αυτής της παραγράφου τόσο πιο γρήγορα θα μπορείτε και σεις, χωρίς να κάνετε λάθη, να χρησιμοποιείτε αυτού του είδους τις συντομεύσεις).

Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά μέρη, πάλι με συντομεύσεις, έχουμε:

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{\infty} t^s e^{-t}\,dt = \int_0^{\infty} t^s (-e^{-t})'\,dt =$$

$$= t^s e^{-t}\Big|_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t}\,dt = s\,\Gamma(s)$$

(και πάλι δικαιολογείστε πλήρως τις συντομεύσεις).

Η "συναρτησιακή" αυτή σχέση, $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$, δίνει αμέσως $\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1$, $\Gamma(3)=2\Gamma(2)=2\cdot 1$, $\Gamma(4)=3\cdot\Gamma(2)=3\cdot 2\cdot 1$, ... και γενικά (τετριμμένη επαγωγή) $\Gamma(n+1)=n!$, $n\in\mathbb{N}$. Με άλλα λόγια η $\Gamma(s)$ είναι μία συνάρτηση η οποία για ακέραιες θετικές τιμές του s συμπίπτει με το $(s-1)!$. Αυτό μόνο του δεν λέει πολλά πράγματα αν η Γ δεν έχει και άλλες καλές ιδιότητες, π.χ να είναι συνεχής, να έχει παραγώγους κλπ. Στην πραγματικότητα έχει όλες αυτές τις ιδιότητες. Ας δείξουμε π.χ. ότι είναι συνεχής.

Έστω $s_0>0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της μέσης τιμής έχουμε:

$$\Gamma(s)-\Gamma(s_0)=\int_0^\infty (t^{s-1}-t^{s_0-1})\,e^{-t}\,dt=$$

$$=(s-s_0)\int_0^\infty t^{\xi-1}(\log t)\,e^{-t}\,dt$$

και επομένως

$$|\Gamma(s)-\Gamma(s_0)|\leq |s-s_0|\left|\int_0^\infty t^{\xi-1}\log t\; e^{-t}dt\right|,$$

όπου ξ είναι ένας αριθμός, που εξαρτάται εν γένει από το t, μεταξύ των s_0 και s. Παίρνοντας $|s-s_0|<\frac{s_0}{2}$ και παρατηρώντας ότι η t^a είναι μονότονη συνάρτηση του a συνάγουμε ότι:

$$\log t.t^{\frac{s_0}{2}-1}.e^{-t}\leq \log t.t^{\xi-1}.e^{-t}\leq \log t.t^{\frac{3s_0}{2}-1}.e^{-t}\quad t>0$$

(γιατί;)

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που δείξαμε την ύπαρξη του $\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$, $a>0$, δείχνουμε και την ύπαρξη του $\int_0^\infty t^{a-1}(\log t)e^{-t}dt$ (δείξτε το). Φτάσαμε λοιπόν στο συμπέρασμα:

$$|s-s_0|<\frac{s_0}{2}\Rightarrow|\Gamma(s)-\Gamma(s_0)|<|s-s_0|\left\{\left|A\left(\frac{s_0}{2}\right)\right|+\left|A\left(\frac{3s_0}{2}\right)\right|\right\},$$

όπου $A(a)=\int_0^\infty e^{-t}\,t^{a-1}(\log t)\,dt$.

Η συνέχεια της Γ έπεται εύκολα από την τελευταία ανισότητα.

<u>Ερώτημα</u>. Μαντέψτε (όχι αποδείξτε) ποια σχέση υπάρχει μεταξύ $\Gamma(a)$ και $A(a)$, $a>0$; Αν θέλετε τώρα αποδείξτε αυτό που μαντέψατε.

5.5 <u>Ο ορισμός του $\log x$ με τη βοήθεια του ολοκληρώματος</u>

Θα κλείσουμε αυτή την παράγραφο με μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή, που δείχνει πώς μπορούμε να ορίσουμε νέες συναρτήσεις με τη βοήθεια του ολοκληρώματος. Πιο συγκεκριμένα θα δώσουμε ένα δεύτερο ορισμό της συνάρτησης $\log x$. Ο ορισμός αυτός δεν είναι διαισθητικά τόσο ικανοποιητικός όσο ήταν ο ορισμός που δώσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα είναι όμως απλούστερος.

Ξεκινάμε από τον τύπο:

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \log x - \log 1 = \log x \quad , x>0 ,$$ που ήδη γνωρίζουμε. Υποθέτουμε ότι δεν έχει οριστεί ακόμη η συνάρτηση $\log x$, οπότε χρησιμοποιούμε τον παραπάνω τύπο για

ορισμό, δηλ. ορίζουμε:

$$\log x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad , \quad x>0$$

Ο ορισμός είναι "καλός" γιατί σε κάθε διάστημα $[1,x]$ (ή $[x,1]$ αν $x<1$) η συνάρτηση $\frac{1}{t}$ είναι συνεχής (και έχει φραγμένη παράγωγο, αν δεν θέλετε να χρησιμοποιήσετε το αναπόδεικτο ακόμη θεώρημα για την ολοκληρωσιμότητα των συνεχών συναρτήσεων). Η συνάρτηση λοιπόν που ορίσαμε είναι και παραγωγίσιμη και ισχύει

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \quad , \quad x>0 ,$$

όπως φυσικά περιμένουμε.

Επειδή η $(\log x)'$ είναι παντού θετική, η συνάρτηση $\log x$ είναι αύξουσα και επομένως έχει αντίστροφο. Την αντίστροφο αυτή συμβολίζουμε με e^x και την ονομάζουμε εκθετική συνάρτηση. Μία απλή παραλλαγή του θεωρήματος για την αντιστροφή μονότονων συναρτήσεων δείχνει ότι η e^x ορίζεται στο διάστημα $(-\infty,\infty)$. Πραγματικά αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\log x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0+}\log x = -\infty$. Οι δύο αυτές σχέσεις είναι στην πραγματικότητα ισοδύναμες, διότι (ολοκλήρωση με αντικατάσταση)

$$\log\frac{1}{x} = \int_1^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{t} = \int_1^{x}\frac{d\left(\frac{1}{y}\right)}{\left(\frac{1}{y}\right)} = \int_1^{x}\frac{-\frac{1}{y^2}\,dy}{\frac{1}{y}} =$$

$$= -\int_1^{x}\frac{dy}{y}.$$

Για να δείξουμε ότι $\log x \to +\infty$, $x\to+\infty$ θεωρούμε ένα αριθμό $M>0$. Πρέπει να βρούμε x_0 τέτοιο ώστε: $x>x_0 \Rightarrow \log x > M$. Γράφουμε $N=[M]+1$ και παίρνουμε $x_0 = 2^{2N+1}$ θα έχουμε, αν $x>x_0$,

$$\log x > \log x_0 = \int_1^{2^{2N+1}}\frac{dt}{t} = \int_1^{2}\frac{dt}{t} + \dots + \int_{2^{2N}}^{2^{2N+1}}\frac{dt}{t}$$

Για οποιοδήποτε όμως $\kappa = 1,2,\dots$, η αντικατάσταση $2^{\kappa}y = t$ δείχνει ότι

$$\int_{2^{\kappa}}^{2^{\kappa+1}}\frac{dt}{t} = \int_1^{2}\frac{2^{\kappa}dy}{2^{\kappa}y} > \int_1^{2}\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}$$

και επομένως

$$\log x > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot N = N > M,$$

που αποδεικνύει ότι πραγματικά

$$\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty .$$

Έχοντας ορίσει το e^x μπορούμε τώρα για τυχαίο $a>0$, να ορίσουμε $a^x = e^{x\log a}$.

Φυσικά οι παραπάνω "ταχυδακτυλουργίες" μόνες τους δεν είναι ικανοποιητικές. Θα πρέπει να δείξουμε, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία που αναπτύξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ότι οι συναρτήσεις που ορίσαμε έχουν τις ιδιότητες που περιμένουμε. Σαν παράδειγμα ας δείξουμε ότι η συνάρτηση a^x, όπως την ορίσαμε τώρα για $x=2$ δίνει τό γνωστό μας τύπο a^2.

Πρέπει λοιπόν να δείξουμε ότι $e^{2\log a} = a^2$, δηλ. (από τον ορισμό της e^x σαν αντίστροφης του $\log x$) $2\log a = \log(a^2)$, ή ακόμα $2\int_1^a \frac{dt}{t} = \int_1^{a^2} \frac{dt}{t}$.

Πραγματικά έχουμε (ολοκλήρωση με αντικατάσταση $ay=t$)

$$\int_1^{a^2} \frac{dt}{t} = \int_1^a \frac{dt}{t} + \int_a^{a^2} \frac{dt}{t} = \int_1^a \frac{dt}{t} + \int_1^a \frac{a\,dy}{ay} = 2\int_1^a \frac{dt}{t} .$$

<u>Παρατήρηση</u>. Χρησιμοποιήσαμε την τελείως τετριμμένη (γιατί;) ιδιότητα $\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\beta f(y)dy$. Για το λόγο αυτό μάλιστα όταν γράφουμε το ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f$ με τη μορφή $\int_a^\beta f(x)\,dx$, ονομάζουμε το x βουβή μεταβλητή.

Τελείως ανάλογα μπορούμε με τη βοήθεια του ολοκληρώματος να ορίσουμε και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Π.χ. η $\sin x$ σε μια "μικρή" περιοχή του 0 μπορεί να οριστεί σαν η αντίστροφη της συνάρτησης που δίνεται από το ολοκλήρωμα $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ που φυσικά δεν είναι τίποτε άλλο παρά η συνάρτηση $\operatorname{Arcsin}x$. (Βρείτε μια τέτοια "μικρή" περιοχή. Εργαστείτε έντιμα· δεν έχουμε ακόμη ιδέα για τις ιδιότητες του $\sin x$, π.χ. δεν ξέρουμε ότι η $\sin x$ είναι αύξουσα στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$).

Δεν θα ασχοληθούμε περισσότερο με αυτόν τον τρόπο ορισμού των τριγωνομετριμών συναρτήσεων. Σημειώνουμε μόνο, ότι αυτή η μέθοδος μας απαλλάσσει από τους γεωμετρικούς ορισμούς που δώσαμε στο 2ο κεφάλαιο.

5.6 Α σ κ ή σ ε ι ς

1) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο $[a,\beta]$ με φραγμένη παράγωγο στο (a,β) : $|f'(x)| \leq M$, $a<x<\beta$. Θέτουμε:

$$a_n = \frac{\beta-a}{n}\left\{f(a)+f\left(a+\frac{\beta-a}{n}\right)+f\left(a+2\frac{\beta-a}{n}\right)+\cdots+ + f\left(a+(n-1)\frac{\beta-a}{n}\right)\right\}$$

α) Ποιά είναι η γεωμετρική σημασία του a_n ; (υποθέστε ότι $f \geqslant 0$)

β) Δείξτε ότι $\lim a_n = \int_a^\beta f$.

γ) Ισχύει το β αν υποθέσουμε μόνο τη συνέχεια της f στο $[a,\beta]$;

δ) Δείξτε ότι

$$\left|a_n - \int_a^\beta f\right| \leq \frac{M(\beta-a)^2}{2}\cdot\frac{1}{n}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Το δ δείχνει ότι όχι μόνο $a_n \to \int_a^\beta f$ αλλά ακόμη ότι η σύ-

γκλιση είναι αρκετά "γρήγορη". Προσέξτε τον παράγοντα M στο β' μέλος που δείχνει ότι αν η παράγωγος παίρνει πολύ μεγάλες τιμές είναι πιθανόν να χρειαστούμε "πολύ μεγάλο" n για να προσεγγίσουμε καλά το $\int_a^\beta f$ με το a_n. Πειραματιστείτε με τη συνάρτηση $f(x)=\sin^2 kx$, $k\in\mathbb{N}$, $a=0$, $\beta=\pi$, παίρνοντας $n=k$ για να πειστείτε. Περισσότερα για προσσεγγιστικές μεθόδους υπολογισμού ολοκληρωμάτων θα μάθετε σε άλλα μαθήματα.

2) a) Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $(-\infty,\infty)$ και αν υπάρχει το (γενικευμένο) ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ τότε υπάρχουν και τα (γενικευμένα) ολοκληρώματα $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(xy)dx$ και $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin(xy)\,dx$ για οποιοδήποτε $y\in\mathbb{R}$. Τα ολοκληρώματα αυτά λέγονται μετασχηματισμός Fourier συνημιτόνου και ημιτόνου της f αντίστοιχα και έχουν πολλές εφαρμογές.

β) Υποθέστε επί πλέον ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ακόμη ότι για κάποιο $a>0$, $f(x)=0$ για $|x| \geqslant a$. Δείξτε ότι οι μετασχηματισμοί Fourier συνημιτόνου και ημιτόνου της f, σαν συναρτήσεις του y, τείνουν στο 0 για $y \to +\infty$ καθώς και για $y \to -\infty$.

3) Γράφουμε $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$, $n \in \mathbb{N}$

α) Δείξτε ότι $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ (υπόδειξη: ολοκλήρωση κατά μέρη).

β) Χρησιμοποιείστε το α για να δείξετε ότι:

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2n\ (2n-2)\cdots 2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n\ (2n-2)\cdots 2}{(2n+1)\ (2n-1)\cdots 3}$$

και επομένως

$$\pi = 2\frac{\{2n(2n-2)\cdots 2\}^2}{(2n+1)\{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\}^2} \cdot \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

γ) Ξεκινώντας από τη σχέση:

$\sin^{2n+1} x \leqq \sin^{2n} x \leqq \sin^{2n-1} x$ και το α δείξτε ότι: $\quad 1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq 1 + \frac{1}{2n}$

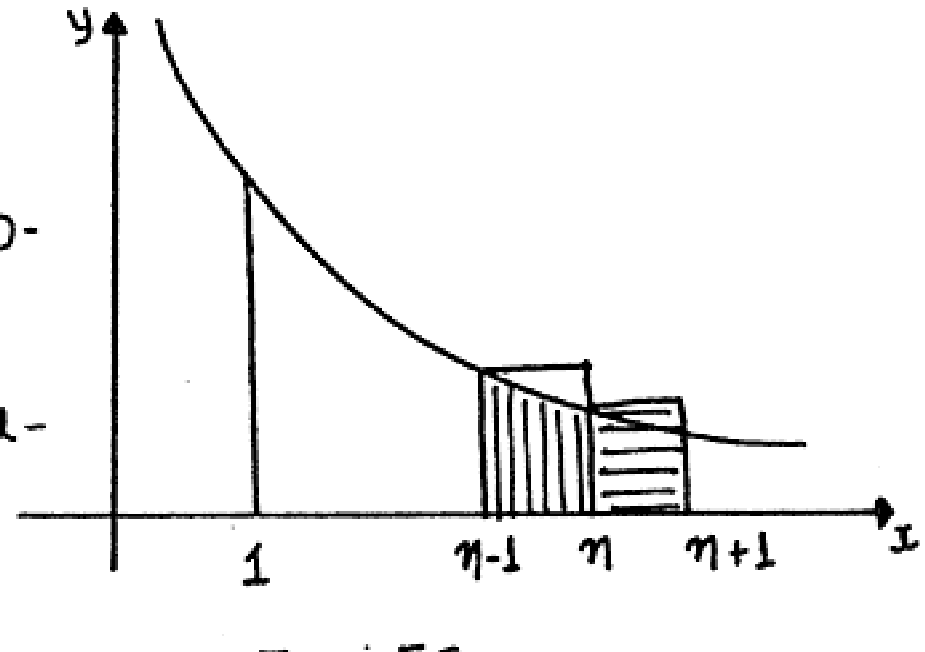
και επομένως $\quad \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \to 1 \ , \ n \to \infty$

δ) Συμπεράνετε τον επόμενο τύπο του Wallis (Σκωτσέζος μαθηματικός του $18^{ου}$ αιώνα)

$$\pi = \lim_{\eta \to \infty} \left\{ 4\eta \left(\frac{(2n-2)(2n-4)\cdots 2}{(2\eta-1)(2n-3)\cdots 3} \right)^2 \right\} \ . \ .$$

4) α) Εξετάζοντας το $\int_1^n \frac{dt}{t}$ δείξτε ότι

$\left| 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right| < 1$. Δείξτε ακόμη ότι η $\quad a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$ είναι φθίνουσα. (υπόδειξη: το οριζόντια διαγραμμισμένο εμβαδό στο σχ. 56 είναι μικρότερο από το κάθετα διαγραμμισμένο). Υπάρχει επομένως το $\lim a_n$ το οποίο συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα γ



Σx: 56

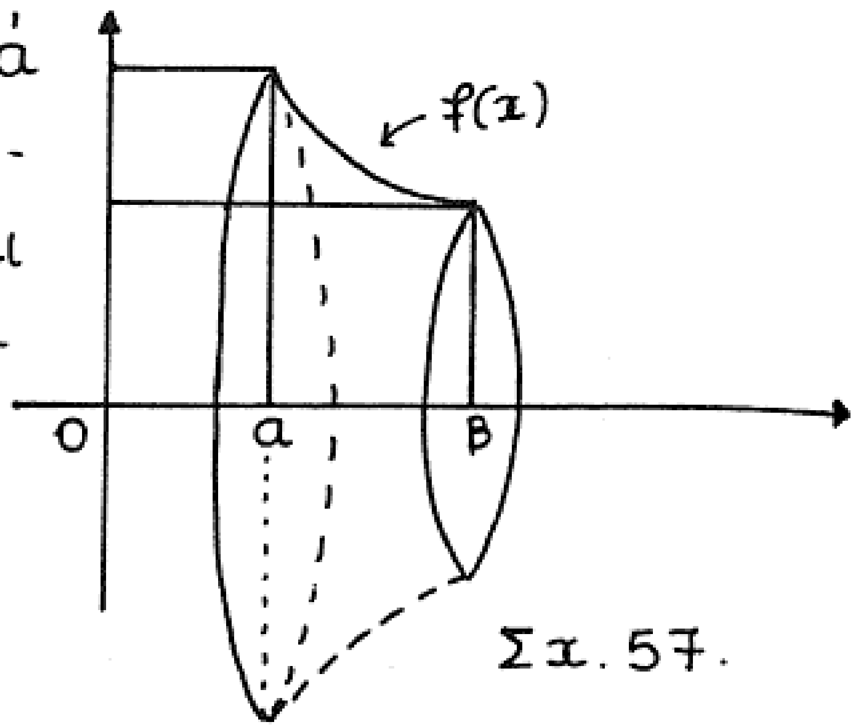
(~0,5772156649...) και λέγεται σταθερά του Euler. <u>Ερώτηση</u>: Είναι το γ ρητός ή άρρητος; Δοκιμάστε αν θέλετε να απαντήσετε σ' αυτή την ερώτηση αλλά μην επιμείνετε πολύ· κανείς, μέχρι σήμερα, δεν μπόρεσε να βρεί την απάντηση (και δοκίμασαν πολλοί και καλοί μαθηματικοί, ο Euler π.χ.).

β) Συγκρίνοντας το $\log(n!)$ με το $\int_1^{n+\frac{1}{2}} \log x\, dx$ δείξτε ότι αν $a_n = \dfrac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}$ τότε υπάρχουν δύο θετικές σταθερές A, B τέτοιες ώστε $A < a_n < B$. (Υπόδειξη: $\int_1^{n+\frac{1}{2}} = \int_1^{\frac{3}{2}} + \int_{3/2}^{5/2} + \cdots + \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$)

γ) Ισχύει κάτι παραπάνω: $\lim a_n = \sqrt{2\pi}$ (τύπος του Stirling). Για την απόδειξη αρκεί να δείξετε ότι η a_n είναι μονότονη και μετά να χρησιμοποιήσετε τον τύπο του Wallis για να δείξετε ότι

$$\frac{a_n^2}{a_{2n}} \rightarrow \sqrt{2\pi}.$$

5) α) Θεωρείστε μιά θετική συνεχή συνάρτηση $f(x)$, $a \leq x \leq \beta$, και το στερεό που παράγεται με περιστροφή του γραφήματός της γύρω από τον άξονα Ox κατά γωνία 2π.



Σχ. 57.

Δώστε επιχειρήματα που να καθιστούν ευλογοφανή τον τύπο: $V = \int_a^\beta \pi\,(f(x))^2\,dx$

για τον όγκο V αυτού του στερεού. (Δεν ζητάμε αυστηρή απόδειξη γιατί δεν έχουμε δώσει ακριβή ορισμό του όγκου ενός στερεού).

β) Εφαρμόστε τον τύπο αυτό για να βρείτε τους γνωστούς τύπους της στερεομετρίας για τους όγκους σφαιρικού τμήματος, κυλίνδρου, κώνου, κόλουρου κώνου. —

6) Βρῆτε τό ἐμβαδόν τοῦ χωρίου πού περιλαμβάνεται μεταξύ τοῦ ἄξονα τῶν x, τοῦ γραφήματος τῆς $f(x) = x^4$ καί τῆς ἐφαπτομένης τοῦ γραφήματος στό σημεῖο $(2,16)$.

7) Μια ράβδος μέ ἄκρα 0 καί 1 ἔχει γραμμική πυκνότητα ($\equiv \lim \frac{m(x,h)}{h}$, $h \to 0$, ὅπου $m(x,h)$ ἡ μάζα τοῦ τμήματος $[x, x+h]$) $\lambda(x)$, $0 \leq x \leq 1$. Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ λ εἶναι R-ὁλοκληρώσιμη. Ἡ συνολική μάζα M_0 ἡ ροπή $M_{1,a}$ ὡς πρός τό σημεῖο a καί ἡ ροπή ἀδρανείας $M_{2,a}$ ὡς πρός τό a δίνονται ἀπό τούς τύπους: $M = \int_0^1 \lambda(x)\,dx$,

$M_{1,\alpha} = \int_0^1 (x-a)\lambda(x)dx$, $M_{2,\alpha} = \int_0^1 (x-\alpha)^2\lambda(x)dx$.

α) (Δυσκολούτσικο) Δεῖξτε ὅτι οἱ P_α, A_α εἶναι καλά ὡρισμένες, δηλ. ὅτι οἱ $(x-a)\lambda(x)$ καί $(x-a)^2\lambda(x)$ εἶναι R-ὁλοκληρώσιμες (Ὑπόδειξη: Δεῖξτε γενικώτερα ὅτι "f, g R-ὁλοκληρώσιμες $\Rightarrow$ fg R ὁλοκληρώσιμη" Γιά τήν ἀπόδειξη παρατηρεῖστε ὅτι $fg = \frac{1}{4}\{(f+g)^2-(f-g)^2\}$ καί δεῖξτε ὅτι "f R-ὁλοκληρώσιμη συνεπάγεται f^2 R-ὁλοκληρώσιμη". Ἄν $f\geq 0$ ἡ τελευταία πρόταση εἶναι εὔκολη, ἄν ὄχι, τότε ὑπάρχει M τ.ω. $f+M\geq 0$ καί $f^2=(f+M)^2-M^2-2Mf$. <u>Τήν ἀπόδειξη αὐτή τήν ἔμαθα ἀπό ἕνα παλιότερο συμμαθητή σας</u>)

β) Ἄν $\lambda(x)\geq 0$ καί $M\neq 0$ τό σημεῖο $B=\frac{M_{1,0}}{M}$ λέγεται κέντρο βάρους τῆς ράβδου. Δεῖξτε ὅτι $M_{2,B} = M_{2,0} - B^2 M$.

γ) Ἐφαρμόστε τά παραπάνω γιά $\lambda(x)=|x-\frac{1}{2}|$ καί $\lambda(x)=\sin\pi x$.

8) Ἔστω f μία συνεχής συνάρτηση στό $\mathbb{R}$. Δεῖξτε ὅτι: $\int_{-a}^{a} f(x^2)dx = 2\int_0^a f(x^2)dx$, $\int_{-a}^{a} x f(x^4)dx = 0$, $\int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(\cos x)dx$ καί $\int_0^{\kappa\pi} f(\cos^2 x)dx = \kappa\int_0^{\pi} f(\cos^2 x)dx$, $\kappa\in\mathbb{Z}$, $a\in\mathbb{R}$.

Βιβλ.

9) α) Γιά ποιά τιμή τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ α ἰσχύει:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{t+a}}dt = 1 ;$$

β) Βρεῖτε τό ὅριο $\lim_{x\to+\infty}\{x^{-1}e^{-2x}\int_0^x e^{2t}\sqrt{1+t^2}dt\}$.

10) Βρεῖτε τό ὁλοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx$ μέ βάση τόν ὁρισμό ἤ τήν ἄσκηση 1 (Ὑπόδειξη: $\sin x+\dots+\sin\kappa x = \frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(\kappa+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$, $x\neq 2\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$).

11) Δεῖξτε ὅτι $0\leq\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{t}dt\leq\frac{\pi}{4}+\frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2}$; Μποροῦν νά ἀντικατασταθοῦν οἱ παραπάνω ἀνισότητες μέ γνήσιες; <u>Παρατήρηση</u>: Τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα $\int\frac{\sin t}{t}$ δέν ὑπολογίζεται μέ στοιχειώδεις συναρτήσεις· μήν προσπαθήσετε ἑπομένως νά τό βρεῖτε.

12) Ἄν ἡ συνάρτηση f ἔχει φραγμένη παράγωγο στό $[\alpha,\beta]$, τότε $\lim\{\int_\alpha^\beta f(x)\cos\kappa x\,dx\}=0, \kappa\to\infty$.

13) Χρησιμοποιώντας τίς μεθόδους πού ἀναπτύχθηκαν σ' αὐτό τό κεφάλαιο βρεῖτε τά ὁλοκληρώματα:

i) $\int(\alpha x+\beta)^3dx$, ii) $\int\frac{dx}{(\alpha x+\beta)^\kappa}$ $(\kappa\in\mathbb{Z})$, iii) $\int\sqrt{x}\,dx$, iv) $\int\frac{dx}{\sqrt{ax+\beta}}$,

v) $\int\frac{dx}{1+a^2x}$, vi) $\int\frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}$, vi) $\int\tan^2x\,dx$, vii) $\int\frac{dx}{\sin x}$,

viii) $\int x^2\cos x\,dx$, ix) $\int \mathrm{Arctan}\,x\,dx$, x) $\int\log(3x)dx$, xi) $\int x^3e^{-x}dx$,

xii) $\int\frac{dx}{(\sqrt{1+x^2})^3}$, xiii) $\int\frac{e^x-1}{e^x+1}dx$, xiv) $\int x\sqrt{a^2+x^2}\,dx$, xv) $\int\frac{dx}{\sin^3x}$,

xvi) $\int\frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$, xvii) $\int 3^xe^xdx$, xviii) $\int e^x\sqrt{a-be^x}\,dx$, xix) $\int\frac{x\,dx}{\cos^2x^2}$,

xx) $\int 3^{\tanh x}\frac{dx}{\cosh^2x}$, xxi) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$, xxii) $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2x}}$, xxiii) $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$

xxiv) $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ (θέστε $x=\sin^2t$), xxv) $\int\frac{\ln x}{x^3}dx$, xxvi) $\int x^2e^{3x}dx$,

xxv) $\int\frac{x\,dx}{\sin^2x}$, xxvi) $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, xxvii) $\int\frac{dx}{x(x+1)^2}$, xxviii) $\int\frac{dx}{x^4+1}$,

xxix) $\int\frac{3x+5}{x^2+2x+2}dx$, xxx) $\int\frac{x^4}{x^4-1}dx$, xxxi) $\int\frac{x^2+1}{(x^2-4x+5)^2}$, xxxii) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x-1}}$

xxxiii) $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$, xxxiv) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4+9x^2}}$, xxxv) $\int\sqrt[4]{x^2(1-x^2)}\,dx$, xxxvi) $\int\frac{\sin 3x\,dx}{\cos x}$

xxxvii) $\int x\sin^2x\cos^4x\,dx$, xxxviii) $\int\frac{\log\cos x}{\sin^2x}dx$, xxxix) $\int xe^x\cos x\,dx$, xxxx) $\int\frac{dx}{(x+2)^2(x+3)^2}$

xxxxi) $\int\frac{dx}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x})^2}$, xxxxii) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x^2-x^4}}$, xxxxiii) $\int\frac{5x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$, xxxxix) $\int\frac{dx}{2+3\cos^2x}$

xxxxx) $\int\cos^4x\,dx$, xxxxxi) $\int\cos(\log x)dx$, xxxxxii) $\int\mathrm{Arcsin}\sqrt{x}\,dx$, xxxxxiii) $\int|x|dx$

xxxxxix) $\int\frac{x\,dx}{\sinh^2x}$, xxxxxx) $\int\frac{dx}{\sin x\sin 2x}$, xxxxxxi) $\int\frac{\cos ax\,dx}{\sqrt{a^2+\sin^2ax}}$, xxxxxxii) $\int\frac{x\,dx}{\cos^23x}$

xxxxxx(iii) $\int\sinh x\cosh x\,dx$, xxxxxxix) $\int\frac{2^x}{1-4^x}dx$, xxxxxxx) $\int\sqrt{e^x+1}\,dx$

Στά παραπάνω ὁλοκληρώματα καθορίστε τά διαστήματα στά ὁποῖα ἰσχύουν οἱ τύποι σας καθώς καί τίς προϋποθέσεις γιά τίς παραμέτρους που ἐμφανίζονται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ον. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ.

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε μερικές χρήσιμες εφαρμογές των όσων είδαμε μέχρι τώρα. Τα θέματα που θα εξετάσουμε είναι ουσιαστικά ανεξάρτητα μεταξύ τους και μπορούν να διαβαστούν με οποιαδήποτε σειρά.

6.1 Απροσδιόριστες μορφές· κανόνες του de l' Hospital.

Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στα διαστήματα (β, a), (a, γ), ότι οι $g(x)$ και $g'(x)$ είναι $\neq 0$ για $x \in (\beta, a) \cup (a, \gamma)$ και ακόμη ότι $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$, $x \to a$. Στην περίπτωση αυτή το $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $x \to a$, μπορεί να υπάρχει, αλλά φυσικά δεν μπορεί να υπολογιστεί με τον κανόνα

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{0}{0} .$$

Ισχύει όμως το παρακάτω θεώρημα, γνωστό σαν ένας από τους κανόνες του de l' Hospital (Γάλλος μαθηματικός του $17^{ου}$ αιώνα).

<u>Θεώρημα</u>. Με τις προϋποθέσεις που αναφέραμε παραπάνω, αν υπάρχει το $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, $x \to a$, τότε υπάρχει και το $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $x \to a$, και τα δύο όρια είναι ίσα. Το αποτέλεσμα ισχύει και στην περίπτωση που τα όρια είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

<u>Απόδειξη</u>: Η ιδέα της απόδειξης είναι πολύ απλή:

$$\text{"}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} \approx$$

$$\approx \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{για } x \text{ αρκετά κοντά στο } a\text{".}$$

Φυσικά κάθε άλλο παρά απόδειξη δώσαμε, αλλά δεν είναι δύσκολο να διορθώσουμε τα πράγματα.

Πρώτα απ' όλα ορίζουμε $f(a)=g(a)=0$

και έτσι οι (νέες) συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς (γιατί;) στο (β,γ) και παραγωγίσιμες στο $(\beta,a)\cup(a,\gamma)$. Θα δείξουμε ότι:

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Παρόμοια δείχνουμε και την ισότητα των ορίων από αριστερά, επομένως και το θεώρημα. Με την επέκταση του πεδίου ορισμού των f και g που κάναμε, μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

και να εφαρμόσουμε το θεώρημα της μέσης τιμής στη μορφή του Cauchy. (Ελέγξτε τις υποθέσεις του θεωρήματος). Θα έχουμε:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\text{ , για κάποιο } \xi \text{ , } a<\xi<x,$$

απ' όπου είναι φανερό ότι αν υπάρχει το

$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, $x\to a+$, θα υπάρχει και το

$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $x\to a+$ και τα δύο όρια θα είναι ίσα (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες).

Αν προσέξουμε την απόδειξη (και κάνουμε τις προφανείς αλλαγές στις προϋποθέσεις) βλέπουμε ότι έχουμε επίσης δείξει: "Η ύπαρξη του ορίου της $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ από δεξιά (αριστερά) συνεπάγεται την ύπαρξη του ορίου της $\frac{f(x)}{g(x)}$ από δεξιά (αριστερά) και την ισότητα των δύο ορίων".

Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν και όταν $a=+\infty$ ή $a=-\infty$. Π.χ. "αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο (β, ∞), αν $g(x)\neq 0$ και $g'(x)\neq 0$ στο (β, ∞), αν $\lim f(x)=\lim g(x)=0$, $x\to+\infty$, και αν το όριο $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$, $x\to\infty$, υπάρχει, τότε υπάρχει και το $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ και τα δύο όρια είναι ίσα".

<u>Απόδειξη</u>: Χωρίς βλάβη της γενι-

κότητας μπορούμε να υποθέσουμε $\beta>0$. Γράφοντας τώρα $f_1(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$, $g_1(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)$, $0<x<\frac{1}{\beta}$, αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση ορίου από δεξιά με $\alpha=0$.

<u>Παραδείγματα</u>

1) $\lim \dfrac{\sin x}{x}$, $x\to 0$.

Έχουμε $\dfrac{(\sin x)'}{x'}=\dfrac{\cos x}{1}\to 1$, $x\to 0$,

άρα και $\dfrac{\sin x}{x}\to 1$, $x\to 0$.

2) $\dfrac{\log x}{x-1}$, $x\to 1$

Έχουμε $\dfrac{(\log x)'}{(x-1)'}=\dfrac{\frac{1}{x}}{1}\to 1$, $x\to 1$, άρα

και $\dfrac{\log x}{x-1}\to 1$, $x\to 1$

3) $\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$, $x\to 0$

Έχουμε $\dfrac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}+x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$

$=2x\sin\frac{1}{x}\,\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{\cos x}\cos\frac{1}{x}$.

Ο όρος $2x \sin\frac{1}{x} \frac{1}{\cos x}$ τείνει στο 0 για $x \to 0$, ενώ ο όρος $\frac{1}{\cos x} \cos\frac{1}{x}$ δεν συγκλίνει (γιατί;), άρα δεν υπάρχει το $\lim \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$, $x \to 0$. Από την άλλη μεριά, το αρχικό όριο $\lim \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$, $x \to 0$, σίγουρα υπάρχει, διότι $\frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = x\left(\frac{x}{\sin x}\right) \sin\frac{1}{x} \to 0$, $x \to 0$.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι δεν ισχύει το "αντίστροφο" του κανόνα, δηλ. η ύπαρξη του $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ δεν συνεπάγεται την ύπαρξη του $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

4) 'Ενα συνηθισμένο λάθος "αρχαρίων" είναι να εφαρμόζουν τον κανόνα και όταν δεν ισχύει η προϋπόθεση: $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$. Φυσικά το αποτέλεσμά τους δεν είναι, εν γένει, σωστό.

Π.χ. $\frac{x+5}{x+1} \to 5$, $x \to 0$, ενώ $\frac{(x+5)'}{(x+1)'} = \frac{1}{1} \to 1$, $x \to 0$

5) Πολλές φορές ο κανόνας του de l' Hospital οδηγεί πάλι σε "απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$", αλλά είναι δυνατόν να τον ξαναεφαρμόσουμε, δηλ. να εξετάσουμε το όριο των πηλίκων $\frac{f''(x)}{g''(x)}$, $\frac{f'''(x)}{g'''(x)}$ κ.ο.κ. Ιδού ένα παράδειγμα:

$$\frac{1-\cos x}{x^2}, \quad x \to 0.$$

Έχουμε $\frac{(1-\cos x)'}{x^2} = \frac{\sin x}{2x}$,

$$\frac{(1-\cos x)''}{(x^2)''} = \frac{\cos x}{2} \to \frac{1}{2}, \quad x \to 0,$$ και επομένως:

$$\lim \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim \frac{\sin x}{2x} = \lim \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}, \quad x \to 0.$$

Ανάλογος κανόνας ισχύει και όταν $\lim f(x) = \lim g(x) = \pm\infty$, $x \to x_0$. Ισχύουν επίσης οι παραλλαγές που διατυπώσαμε στις παρατηρήσεις. Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε την τυπική περίπτωση.

<u>Θεώρημα</u>: Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες και $g'(x) \neq 0$ στο

διάστημα (α,β), αν $\lim f(x)=\lim g(x)=$ $=+\infty$, $x\to a+$, και το $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$, $x\to a+$, υπάρχει, τότε υπάρχει και το $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$, $x\to a+$, και τα δύο όρια είναι ίσα. (Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν για όρια από αριστερά, για αμφίπλευρα όρια, για $a=+\infty$ ή $a=-\infty$, καθώς και όταν το $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$).

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\varepsilon>0$ και ας γράψουμε $A=\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Υπάρχει γ, $a<\gamma<\beta$, τέτοιο ώστε αν $a<x\leq\gamma$ τότε $f(x)>0$, $g(x)>0$ και $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. Το θεώρημα της μέσης τιμής του Cauchy μας δίνει: $\frac{f(x)-f(\gamma)}{g(x)-g(\gamma)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, για κάποιο ξ με $x<\xi<\gamma$, και όλα τα x με $a<x<\gamma_1$ $(<\gamma)$, όπου το γ_1 έχει επιλεγεί έτσι ώστε η $a<x<\gamma_1$ να συνεπάγεται

$f(x) > f(\gamma)$ και $g(x) > g(\gamma)$ (αυτό είναι σίγουρα δυνατό, διότι $f(x) \to +\infty$ και $g(x) \to \infty$, $x \to a+$).

Η ιδέα της απόδειξης είναι τώρα η εξής: "Επειδή $f(x) \to \infty$ και $g(x) \to \infty$, $x \to a+$, το πηλίκο $\frac{f(x)}{g(x)}$ θα είναι κοντά στο $\frac{f(x)-f(\gamma)}{g(x)-g(\gamma)}$, δηλ. στο $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ το οποίο είναι κοντά στο A, αν το x είναι αρκετά κοντά στο a." Ας μετασχηματίσουμε τώρα την ιδέα αυτή σε απόδειξη.

Για $a < x < \gamma_1$ έχουμε

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)-f(\gamma)}{g(x)-g(\gamma)} = \frac{f(x)}{g(x)}\,\frac{1-\frac{f(\gamma)}{f(x)}}{1-\frac{g(\gamma)}{g(x)}}, \quad \text{ή}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,\frac{1-\frac{g(\gamma)}{g(x)}}{1-\frac{f(\gamma)}{f(x)}} = A\frac{1-\frac{g(\gamma)}{g(x)}}{1-\frac{f(\gamma)}{f(x)}} + \left(\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-A\right)\frac{1-\frac{g(\gamma)}{g(x)}}{1-\frac{f(\gamma)}{f(x)}}$$

$$= A - A\,\frac{\frac{g(\gamma)}{g(x)}-\frac{f(\gamma)}{f(x)}}{1-\frac{f(\gamma)}{f(x)}} + \left(\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-A\right)\frac{1-\frac{g(\gamma)}{g(x)}}{1-\frac{f(\gamma)}{f(x)}},$$

οπότε, για $a<x<\gamma_1$ έχουμε

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right| \leq A\left|\frac{\frac{g(\gamma)}{g(x)}-\frac{f(\gamma)}{f(x)}}{1-\frac{f(\gamma)}{f(x)}}\right| + \frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{1-\frac{g(\gamma)}{g(x)}}{1-\frac{f(\gamma)}{f(x)}}\right|$$

Το δεξιά μέλος αυτής της ανισότητας συγκλίνει στο $\frac{\varepsilon}{2}$ για $x \to a+$, άρα υπάρχει γ_2, $a<\gamma_2<\gamma_1$, τέτοιο ώστε για $a<x<\gamma_2$ να έχουμε

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right| < \varepsilon\,, \quad (\text{γιατί;})$$

που συμπληρώνει την απόδειξη.

Οι δύο "απροσδιόριστες μορφές" που εξετάσαμε, $\frac{0}{0}$ και $\frac{\infty}{\infty}$, μας επιτρέπουν να βρούμε όρια και σε άλλες περιπτώσεις με απλούς μετασχηματισμούς. Οι πιο συνηθισμένες είναι οι περιπτώσεις των μορφών: $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞. Με τις συνηθισμένες υποθέσεις για πεδία ορισμού οι μετασχηματισμοί αυτοί περιγράφονται συνοπτικά ως εξής:

$0\cdot\infty$. Αν $f(x)\to 0$, $g(x)\to\infty$ τότε

$f(x)\,g(x) = \dfrac{f(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)}$, που είναι της μορφής $\frac{0}{0}$

$\infty - \infty$. Αν $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$, τότε $f(x)-g(x) = \left(f(x)\cdot g(x)\right)\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right)$, που είναι της μορφής $0\cdot\infty$.

0^0. Αν $f(x) \to 0$ και $f(x) > 0$, $g(x) \to 0$, τότε $(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)(\log f(x))}$ και η $g(x)\cdot(\log f(x))$ είναι της μορφής $0\cdot\infty$.

1^∞. Αν $f(x) \to 1$ και $g(x) \to \infty$, τότε $(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}$ και η $g(x)\log f(x)$ είναι της μορφής $\infty\cdot 0$.

<u>Παραδείγματα.</u>

1) $x^a e^{-x}$, $x \to \infty$, $a > 0$. Εδώ έχουμε τη μορφή $\infty\cdot 0$ ή αν γράψουμε $x^a e^{-x} = \frac{x^a}{e^x}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Έχουμε $\frac{(x^a)'}{(e^x)'} = \frac{a x^{a-1}}{e^x}$. Αν $a \leq 1$, τότε

$$\frac{a x^{a-1}}{e^x} = \frac{a}{x^{1-a} e^x} \to 0, \quad x \to \infty \quad \text{άρα} \quad \frac{x^a}{e^x} \to 0,\ x \to \infty.$$

Αν $a > 1$ συνεχίζουμε στις δεύτερες παραγώγους κ.ο.κ. Παίρνοντας $[a]+1$ παραγώγους αν $a \notin \mathbb{N}$ και a παραγώγους αν $a \in \mathbb{N}$, βρίσκουμε

$$\lim \frac{x^a}{e^x} = \lim \left\{ a(a-1) \cdots (a-[a]) \frac{x^{a-[a]-1}}{e^x} \right\} =$$

$= 0,\ x \to \infty$, αν $a \notin \mathbb{N}$ και

$$\lim \frac{x^a}{e^x} = \lim \left\{ a(a-1) \cdots 1 \frac{1}{e^x} \right\} = 0,\ x \to \infty,$$

αν $a \in \mathbb{N}$.

Σε όλες δηλ. τις περιπτώσεις $\frac{x^a}{e^x} \to 0$, $x \to +\infty$. (Φυσικά η σχέση αυτή ισχύει και για $a < 0$, χωρίς να χρειάζεται ο κανόνας του de l'Hospital για την απόδειξή της).

Η σημαντική οριακή σχέση αυτού του παραδείγματος εκφράζεται συνήθως ως εξής: "Το e^x τείνει στο ∞ γρηγορότερα από κάθε δύναμη του x".

Αν γράψουμε $e^x = y$ δηλ. $x = \log y$, βλέπουμε ότι η παραπάνω οριακή σχέση είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{(\log y)^a}{y} \to 0\ ,\quad y \to \infty$$

που εκφράζεται συνήθως ως εξής:

"Οποιαδήποτε δύναμη του $\log x$ τείνει στο ∞ πιο αργά από το x".

γ) $x^{\beta}\log x$, $x\to 0$, $\beta>0$. Εδώ έχουμε τη μορφή $0\cdot(-\infty)$. Γράφοντας $x^{\beta}\log x=\dfrac{\log x}{x^{-\beta}}$, έχουμε $\dfrac{(\log x)'}{(x^{-\beta})'}=\dfrac{\frac{1}{x}}{-\beta x^{-\beta-1}}=-\dfrac{1}{\beta}x^{\beta}\to 0, x\to 0$.

6.2 Ακρότατα συναρτήσεων.

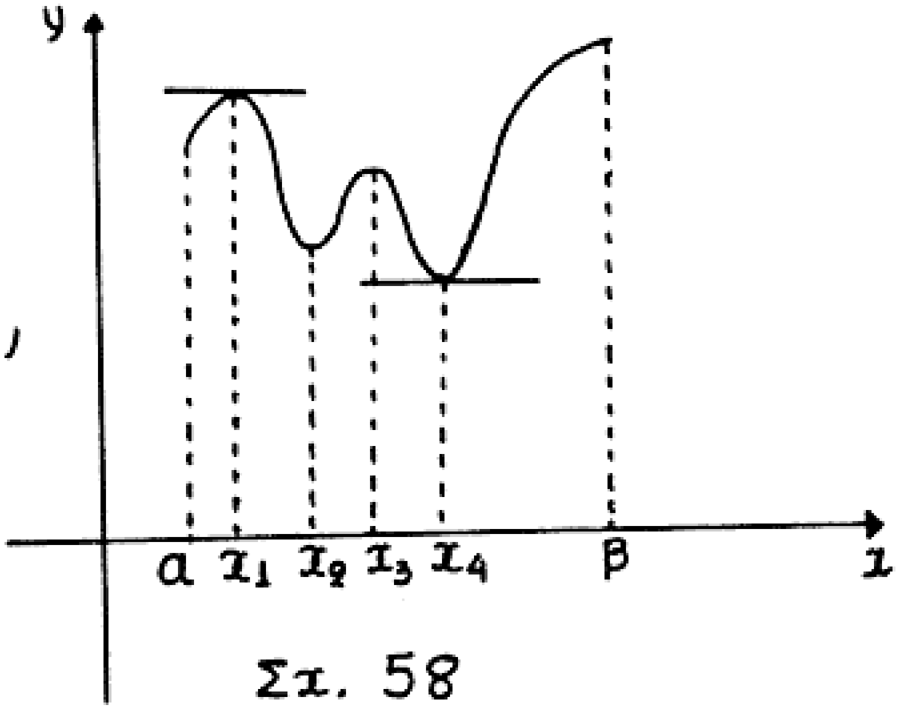
Ορισμός: Αν μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού ένα σύνολο $A\subset\mathbb{R}$ και υπάρχει $x_0\in A$ με την ιδιότητα $f(x)\leq f(x_0)$ ($f(x)\geq f(x_0)$) για όλα τα $x\in A$ δηλ. αν $f(x_0)=\sup\{f(x): x\in A\}$ ($f(x_0)=\inf\{f(x): x\in A\}$), τότε η τιμή $f(x_0)$ λέγεται μέγιστο (ελάχιστο) της f στο A και συμβολίζεται με $\max f$ ($\min f$).

Ας σημειώσουμε ότι το μέγιστο ή ελάχιστο μιας συνάρτησης μπορεί να είναι τιμή της f για περισσότερα από ένα σημεία του πεδίου ορισμού της. Π.χ. αν $f(x)=\cos x$, $x\in\mathbb{R}$, τότε $\max f=1=\cos 2\kappa\pi$ και $\min f=-1=\cos(2\kappa+1)\pi$, $\kappa=0,\pm1,\pm2,\dots$

Μία συνάρτηση, ακόμα κι αν είναι φραγμένη, μπορεί να μην έχει μέγιστο ή ελάχιστο. Π.χ. η $f(x)=x$, $0 \leq x < 1$, δεν έχει μέγιστο διότι $\sup\{f(x) : 0<x<1\} = 1 \neq f(x)$ για κάθε x με $0 \leq x < 1$. Αυτό μπορεί να συμβεί ακόμη και αν το πεδίο ορισμού είναι κλειστό διάστημα. Π.χ. η $f(x)=\begin{cases} |x| & 0<|x|\leq 1 \\ 1 & x=0 \end{cases}$ δεν έχει ελάχιστο στο κλειστό διάστημα $[-1,1]$ διότι $\inf\{f(x) : 0 \leq x \leq 1\} = 0 \neq f(x)$ για κάθε $x \in [-1,1]$. Από την άλλη μεριά έχουμε δει ότι αν το πεδίο ορισμού είναι κλειστό διάστημα και η f συνεχής τότε η f έχει και μέγιστο και ελάχιστο.

Τα ακρότατα (δηλ. μέγιστα ή ελάχιστα) για τα οποία μιλήσαμε ονομάζονται ακριβέστερα ολικά πρ. διάκριση από τα τοπικά τα οποία ορίζονται ως εξής: Η τιμή $f(x_0)$ μιας συνάρτησης $f(x)$ λέγεται τοπικό μέγιστο της f, αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε η περιοχή $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ να περιέχεται στο πεδίο ορισμού της f και η τιμή $f(x_0)$ να είναι ολικό μέγιστο της f περιορισμένης στο $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ δηλ. $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x με $x_0-\varepsilon < x < x_0+\varepsilon$. Ανάλογα ορίζεται το τοπικό ελάχιστο.

Π.χ. για τη συνάρτηση f του σχήματος οι τιμές $f(x_1)$, $f(x_3)$ είναι τοπικά μέγιστα, οι τιμές $f(x_2)$, $f(x_4)$ τοπικά ελάχιστα, η τιμή $f(x_4)$ ολικό (και τοπικό) ελάχιστο και η τιμή $f(\beta)$ ολικό (αλλά όχι τοπικό) μέγιστο.



Σχ. 58

Για συναρτήσεις που έχουν παράγωγο σ' ένα σημείο x_0, είναι πολύ εύκολο να βρούμε μια αναγκαία συνθήκη για να είναι η τιμή $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο (ελάχιστο). Πραγματικά, το x_0 είναι αναγκαστικά εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f (γιατί;) και για αρκετά μικρά $h>0$, θα έχουμε

$\frac{1}{h}\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right)\leqq 0$ και

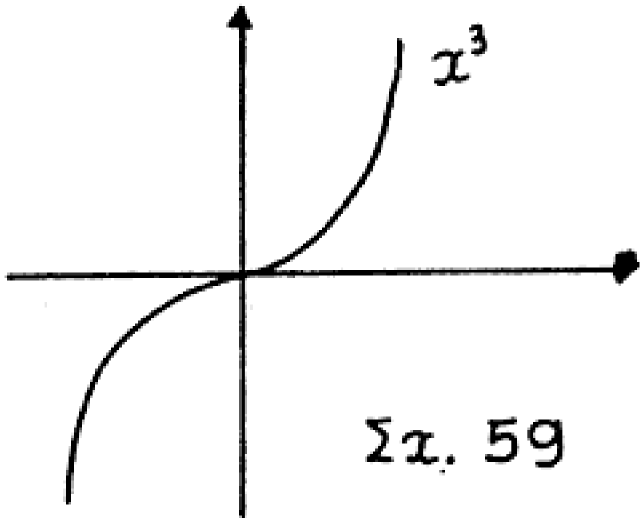
$\frac{1}{h}\left(f(x_0-h)-f(x_0)\right)\geqq 0$, επομένως

$D^+f(x_0)\leqq 0$ και $D^-f(x_0)\geqslant 0$. Αν τώρα υπάρχει η $f'(x_0)$, τότε $f'(x_0)=D^+f(x_0)=$ $=D^-f(x_0)=0$. Στο ίδιο συμπέρασμα φτάνουμε και αν υποθέσουμε ότι το x_0 είναι θέση τοπικού ελαχίστου. Για παραγωγίσιμες λοιπόν συναρτήσεις f ο μηδενισμός της $f'(x_0)$ είναι αναγκαία συνθήκη για να είναι το x_0 θέση τοπικού ακροτάτου. Π.χ. η παράγωγος της συνάρτησης $\cos x$ που θεωρήσαμε προηγούμενα είναι η $\sin x$, η οποία πραγματικά μηδενίζεται στις θέσεις των ακροτάτων (που είναι αναγκαστικά και τοπικά):

$$\sin 2\kappa\pi=\sin(2\kappa+1)\pi=0\ ,\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

Από την άλλη μεριά η συνθήκη αυτή δεν είναι με κανένα τρόπο ικανή. Πραγματικά, η συνάρτηση $f(x)=x^3$, $x\in\mathbb{R}$, έχει παράγωγο $3x^2$ η οποία μηδενίζεται για $x=0$. Η τιμή $f(0)=0$ όμως δεν είναι τοπικό ακρότατο διότι για οποιαδήποτε περιοχή $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon>0$, έχουμε $f(x)>f(0)=0$ για $0<x<\varepsilon$ και $f(x)< < f(0)=0$ για $-\varepsilon<x<0$.

Η γεωμετρική σημασία της αναγκαίας συνθήκης που βρήκαμε σημαίνει ότι αν το x_0 είναι σημείο ακροτάτου και υπάρχει η εφαπτομένη του γραφήματος στο x_0, τότε αυτή η εφαπτομένη θα είναι οριζόντια. Αυτό φυσικά αναμενόταν και διαισθητικά.



Σχ. 59

Στην περίπτωση που υπάρχει η β' παράγωγος $f''(x_0)$ τότε είναι εύκολο να βρούμε και ικανές συνθήκες για να είναι το x_0 θέση τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου. Πιο συγκεκριμένα "Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x_0, αν $f'(x_0)=0$ και αν $f''(x_0)>0$ ($f''(x_0)<0$) τότε το x_0 είναι θέση τοπικού ελαχίστου (μεγίστου)!"

Η απόδειξη είναι πολύ εύκολη. Ας υποθέσουμε π.χ. ότι $f''(x_0) > 0$. Αυτό σημαίνει ότι $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$ και επομένως υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad (\text{γιατί;})$$

δηλ. $0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$ και

$$0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0$$

Το θεώρημα της μέσης τιμής τώρα μας δίνει:

$0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(\xi_1) \quad x_0 < \xi_1 < x$,
$0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f(x) - f(x_0) = (x_0 - x) f'(\xi_2)$, $x < \xi_2 < x_0$,

και επομένως $f(x_0) \leq f(x)$ για $|x - x_0| < \delta$, δηλ. το x_0 είναι θέση τοπικού ελαχίστου.

Τελείως παρόμοια δείχνουμε ότι η συνθήκη $f''(x_0) < 0$ είναι ικανή συνθήκη για να είναι το x_0 θέση τοπικού μεγίστου.

<u>Παραδείγματα</u>: α) Ας θεωρήσουμε πάλι την $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Η $f'(x) = -\sin x$ μηδενίζεται στα σημεία $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ και $f''(x_k) = -\cos x_k =$

$= -\cos\kappa\pi = \begin{cases} -1 & \text{αν} \quad \kappa \text{ άρτιος} \\ 1 & \text{αν} \quad \kappa \text{ περιττός} \end{cases}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι θέσεις $2\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$ είναι θέσεις τοπικών μεγίστων και οι θέσεις $(2\kappa+1)\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$, θέσεις τοπικών ελαχίστων. Φυσικά το αποτέλεσμα αυτό μπορούσαμε να βρούμε και απ' ευθείας παρατηρώντας ότι $-1\leq\cos x\leq 1$ για όλα τα x.

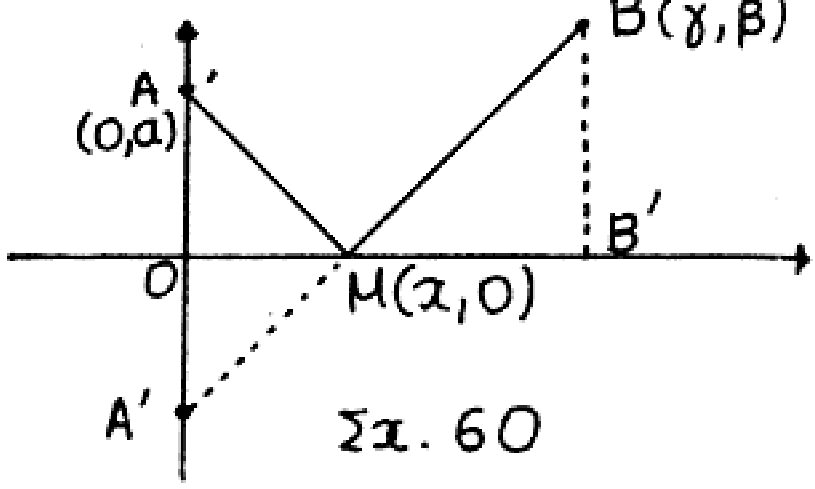
β) $f(x)=x^3$. Η $f'(x)=3x^2$ μηδενίζεται μόνο για $x=0$, όπου όμως και η $f''(x)=6x$ μηδενίζεται. Η ικανή συνθήκη που δώσαμε δεν δίνει λοιπόν κανένα συμπέρασμα. Από την άλλη μεριά όμως $f(x)<0$, για $x<0$, και $f(x)>0$, για $x>0$, και επομένως η θέση $x=0$ δεν είναι θέση ούτε ελαχίστου, ούτε μεγίστου.

γ) $f(x)=x^4$. Και πάλι $f'(0)=f''(0)=0$, ενώ τώρα η θέση $x=0$ είναι προφανώς θέση τοπικού ελαχίστου.

δ) $f(x)=-x^4$. Και τώρα $f'(0)=f''(0)=0$, ενώ η θέση $x=0$ είναι θέση τοπικού μεγίστου.

ε) "Θεωρούμε τα σημεία $A(0,\alpha)$,

$B(\gamma, \beta)$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και ζητάμε ένα σημείο $M(x, 0)$ με $0 \leq x \leq \gamma$ τέτοιο ώστε το μήκος AMB να είναι ελάχιστο (σχ. 60)"



Σχ. 60

Η λύση του προβλήματος αυτού μας δίνει το σημείο προσπτώσεως μιας φωτεινής ακτίνας που ξεκινάει από το A ανακλάται στον άξονα των x και περνάει από το B σύμφωνα με μια αρχή της Οπτικής που είναι γνωστή με το όνομα του Fermat.

Μια απλή γεωμετρική κατασκευή δίνει αμέσως τη λύση: Το M είναι η τομή του άξονα των x και της ευθείας $A'B$, όπου $A'(0, -\alpha)$ το συμμετρικό του A ως προς τον άξονα των x (γιατί;). Από τα όμοια τρίγωνα $A'OM$ και MBB' θα έχουμε τώρα $\dfrac{OM}{OA'} = \dfrac{MB'}{BB'}$, δηλ. $\dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{\gamma - x}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\alpha + \beta}$ ή

$$x = \frac{\alpha\gamma}{\alpha + \beta} .$$

Ας λύσουμε τώρα το πρόβλημα και με τις τεχνικές που μάθαμε. Το μήκος

ΑΜΒ είναι φυσικά, μια συνάρτηση του x, $0<x<\gamma$, ας την ονομάσουμε $f(x)$. Θα έχουμε: $f(x)=\sqrt{\alpha^2+x^2}+\sqrt{\beta^2+(\gamma-x)^2}$, $0<x<\gamma$,

οπότε $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}-\dfrac{\gamma-x}{\sqrt{\beta^2+(\gamma-x)^2}}$

Λύνοντας τώρα την εξίσωση $f'(x)=0$ δηλ. την $\dfrac{x}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}=\dfrac{\gamma-x}{\sqrt{\beta^2+(\gamma-x)^2}}$, έχουμε

$x^2\beta^2=\alpha^2(\gamma-x)^2$, δηλ. $\beta x=\alpha(\gamma-x)$, οπότε $x=\dfrac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta}$ (γιατί πήραμε το πρόσημο + μόνο;)

Φυσικά δεν τελειώσαμε. Πρέπει να δείξουμε ότι η θέση αυτή είναι θέση ελαχίστου στο (α,γ). Προφανώς

$$0<\frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\gamma<\gamma.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η συνεχής συνάρτηση $f(x)$ παίρνει σε κάποια θέση x_0, $0\leq x_0\leq\gamma$ την ελάχιστη τιμή της. Αν η θέση αυτή βρίσκεται στο $(0,\gamma)$ τότε θα είναι και θέση τοπικού ελαχίστου, άρα θα πρέπει $f'(x_0)=0$. Είδαμε όμως ότι μόνο στη θέση $x=\frac{a\gamma}{a+\beta}$ του $(0,\gamma)$ μηδενίζεται η f'. Αναγκαστικά λοιπόν θα έχουμε στην περίπτωση αυτή ότι η θέση $\frac{a\gamma}{a+\beta}$ είναι η θέση ολικού ελαχίστου. Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι ούτε η τιμή $f(0)$, ούτε η $f(\gamma)$ είναι το ελάχιστο της f στο $[0,\gamma]$.

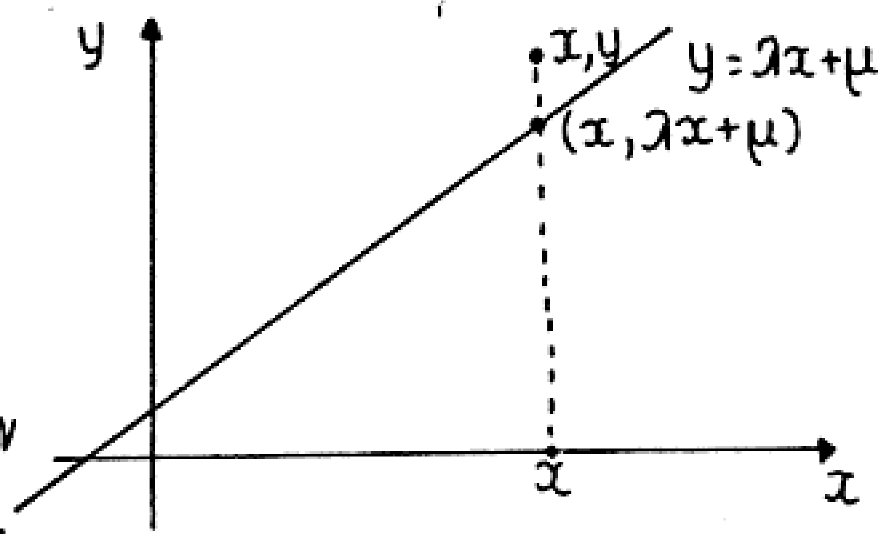
Ένας τρόπος να πετύχουμε αυτό το στόχο, θα ήταν να δείξουμε ότι $f(0)>f\left(\frac{a\gamma}{a+\beta}\right)$ και $f(\gamma)>f\left(\frac{a\gamma}{a+\beta}\right)$ (κάντε το). Θα ακολουθήσουμε μια άλλη μέθοδο.

Η συνεχής συνάρτηση $f'(x)$ μηδενίζεται μόνο στο $\frac{a\gamma}{a+\beta}$ στο διάστημα $[0,\gamma]$ και επίσης $f'(0)=-\frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}<0$, $f'(\gamma)=\frac{\gamma}{\sqrt{a^2+\gamma^2}}>0$, άρα η $f'(x)$ είναι αρνητική για $0<x<\frac{a\gamma}{a+\beta}$ και θετική για

$\frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta} < x < \gamma$ (γιατί;). Η συνάρτηση λοιπόν f φθίνει στο διάστημα $[0, \frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta}]$ και αυξάνει στο $[\frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta}, \gamma]$ οπότε προφανώς η θέση $\frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta}$ είναι θέση ολικού ελαχίστου στο διάστημα $(0, \gamma)$.

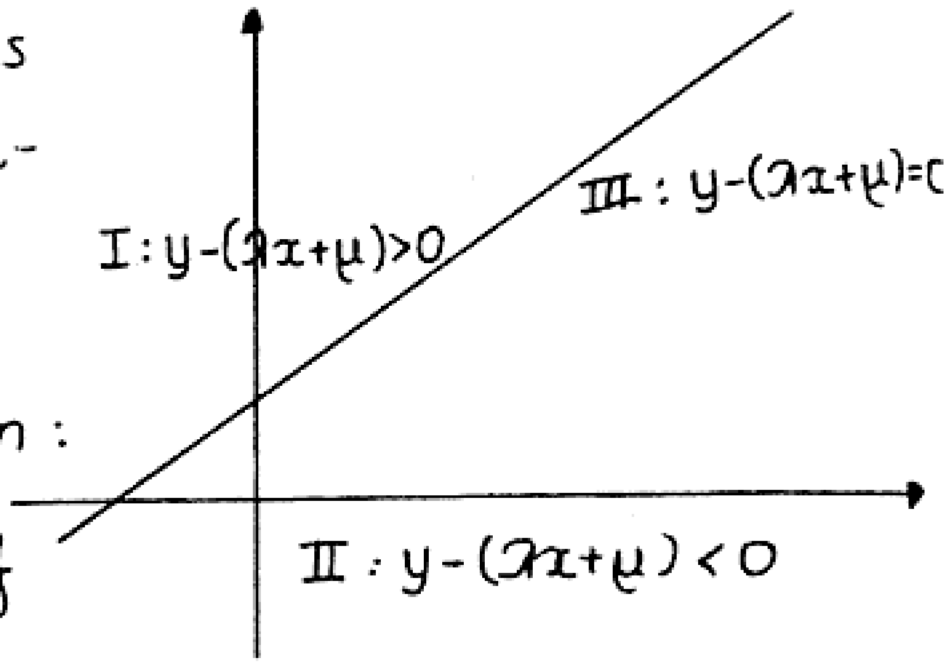
6.3 Η γεωμετρική σημασία της β' παραγώγου.

Ας θεωρήσουμε μια ευθεία που δεν είναι παράλληλη με τον άξονα των y. Θα δίνεται από μια εξίσωση της μορφής $y = \lambda x + \mu$, $-\infty < x < \infty$. Τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται "πάνω" από την ευθεία αυτή ορίζονται φυσιολογικά σαν τα σημεία (x, y) για τα οποία $y > \lambda x + \mu$, δηλ. τα σημεία (x,y) για τα οποία η τεταγμένη y είναι μεγαλύτερη από την τεταγμένη του ση-



μείου της ευθείας με την ίδια τετμημένη.

Χωρίζεται έτσι το επίπεδο σε τρία μέρη:



Σχ. 61

$\mathrm{I} = \{(x,y) : y > \lambda x + \mu\}$

$\mathrm{II} = \{(x,y) : y < \lambda x + \mu\}$

$\mathrm{III} = \{(x,y) : y = \lambda x + \mu\}$

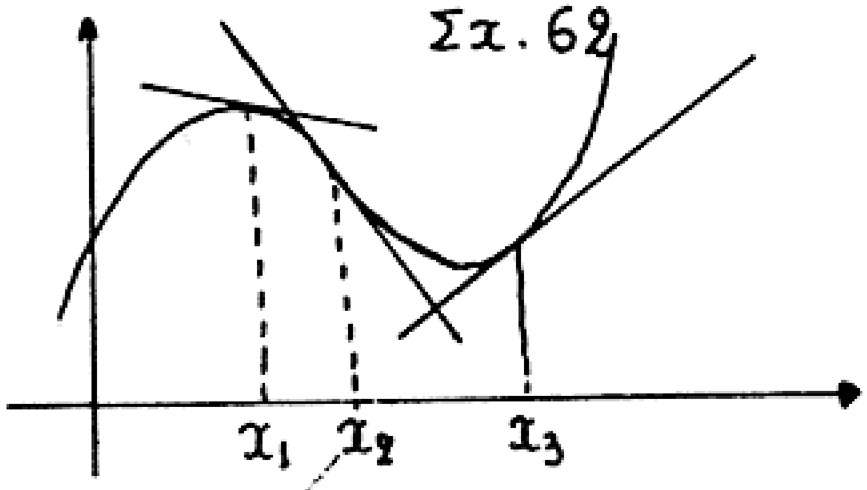
Αν $(x,y) \in \mathrm{I}$ ή $(x,y) \in \mathrm{II}$ θα λέμε αντίστοιχα ότι το (x,y) βρίσκεται πάνω ή κάτω από την ευθεία $y = \lambda x + \mu$.

Ας θεωρήσουμε τώρα το γράφημα μιας συνάρτησης f ορισμένης σ'ένα διάστημα (α,β) και ας υποθέσουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ότι $x_0 \in (\alpha,\beta)$. Σ'αυτήν την παράγραφο θα εξετάσουμε τη θέση του γραφήματος της f ως προς την εφαπτομένη στο σημείο (x_0, y_0).

Αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε το τμήμα του γραφήματος $\{(x, f(x)) : |x - x_0| < \delta\}$ να βρίσκεται πάνω (κάτω) από την εφαπτομένη στο x_0, $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, τότε θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω (κάτω) στο σημείο x_0. Αν το τμήμα του γραφήματος $\{(x, f(x)) : 0 < x - x_0 < \delta\}$ βρίσκεται πάνω (κάτω) και το $\{(x, f(x)) : 0 < x_0 - x < \delta\}$ κάτω (πάνω) από την εφαπτομένη, τότε το x_0 λέγεται σημείο καμπής της f. (βλ. σχ. 62)

x_1 : κοίλα προς τα κάτω
x_2 : σημείο καμπής
x_3 : κοίλα προς τα πάνω

Σχ. 62



Παραδείγματα α) $f(x) = x^2$, $x_0 = 0$. Η καμπύλη στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω (τετριμμένο).

β) $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$. Το x_0 είναι σημείο καμπής (τετριμμένο).

γ) $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη παντού με

$$f'(x)=\begin{cases} -x^2\cos\frac{1}{x}+4x^3\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

Το $x_0=0$ δεν είναι σημείο καμπής και η f δεν στρέφει τα κοίλα ούτε προς τα πάνω, ούτε προς τα κάτω.

Πραγματικά $f'(0)=0$ άρα η εφαπτομένη στο $(0,0)$ είναι ο άξονας των x. Επίσης για οποιοδήποτε $\delta>0$ η f παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές στο διάστημα $(0,\delta)$, δηλ. το γράφημά της έχει σημεία και πάνω και κάτω από την εφαπτομένη (δώστε την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού).

Ας γυρίσουμε για λίγο στη γενική περίπτωση. Αν στο x_0 η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω τότε υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε

$$f(x)\geqslant f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \text{ για } |x-x_0|<\delta$$

δηλαδή:

$$g(x)=f(x)-f'(x_0)(x-x_0)-f(x_0)\geqslant 0=g(x_0)$$

για $|x-x_0|<\delta$.

Το να στρέφει λοιπόν τα κοίλα προς τα πάνω η f στο x_0 ισοδυναμεί με

το να είναι το x_0 θέση τοπικού ελαχίστου για την $g(x)$, γεγονός που είναι και γεωμετρικά φανερό (γιατί;).
Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει η β' παράγωγος $f''(x_0)$. Με βάση αυτά που είπαμε στην προηγούμενη παράγραφο και παρατηρώντας ότι $g'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$ και $g''(x_0) = f''(x_0)$ συνάγουμε: Ικανή συνθήκη για να στρέφει η f τα κοίλα προς τα πάνω είναι η $f''(x_0) > 0$ και (παρόμοια) ικανή συνθήκη για να στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω είναι η $f''(x_0) < 0$

Αν το x_0 είναι σημείο καμπής τότε το x_0 δεν είναι θέση τοπικού ελαχίστου, ούτε τοπικού μεγίστου της g. Επειδή τώρα $g'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$ θα πρέπει αναγκαστικά να έχουμε $g''(x_0) = f''(x_0) = 0$ (γιατί;), δηλ. Αναγκαία συνθήκη για να είναι το x_0 σημείο καμπής είναι να ισχύει $f''(x_0) = 0$.

Η συνθήκη αυτή δεν είναι με

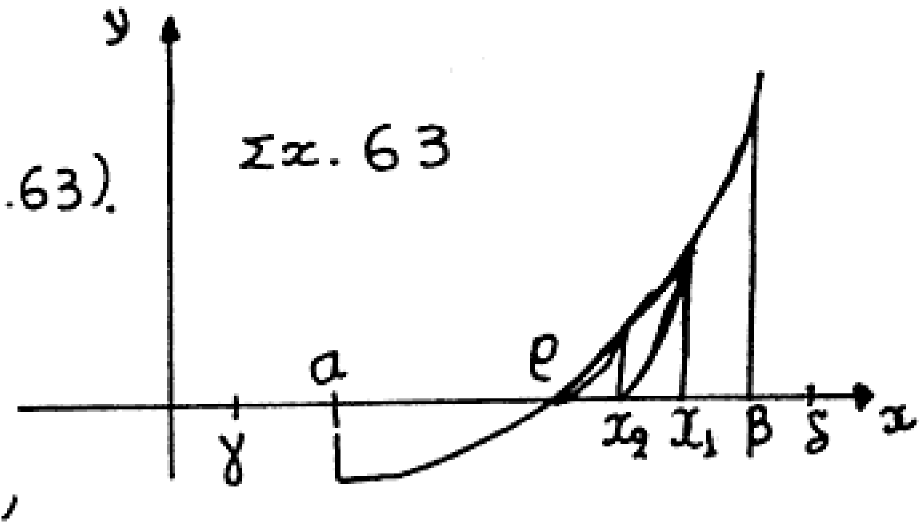
κανένα τρόπο ικανή. Π.χ. η $f(x)=x^4$ δεν έχει σημείο καμπής το $x=0$ (στρέφει προφανώς τα κοίλα προς τα πάνω), ενώ $f''(0)=0$. Ένα πιο "άγριο" παράδειγμα είναι το παράδειγμα γ στην αρχή της παραγράφου.

<u>Παρατήρηση</u>. Λεπτομερέστερη εξέταση συνθηκών για τοπικά ακρότατα και σημεία καμπής απαιτεί τον λεγόμενο τύπο του Taylor τον οποίο θα εξετάσουμε αργότερα.

6.4 <u>Η μέθοδος του Newton για τη λύση εξισώσεων.</u>

Η εύρεση των ριζών μιας εξίσωσης $f(x)=0$ δεν είναι, εν γένει, εύκολη ακόμη και άν η f είναι απλή συνάρτηση π.χ. πολυώνυμο. Υπάρχουν πολλές προσεγγιστικές μέθοδοι για το σκοπό αυτό από τις οποίες θα περιγράψουμε μια γνωστή με το όνομα του Newton.

Έστω f μια συνάρτηση με συνεχείς παραγώγους α' και β' τάξης



σ' ένα διάστημα $(\gamma,\delta) \supset [\alpha,\beta]$ (βλ. σχ.63). Ας υποθέσουμε ακόμα ότι $f'(x)>0$, $\alpha \leq x \leq \beta$ και $f(\alpha)<0$, $f(\beta)>0$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ακριβώς μια ρίζα ρ της f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ (γιατί;) και σκοπός μας είναι να την προσεγγίσουμε.

Η ιδέα της μεθόδου είναι απλή. Ξεκινάμε από ένα σημείο x_1 "αρκετά κοντά" στη ρίζα ρ και ονομάζουμε x_2 την τετμημένη της τομής της εφαπτομένης στο $(x_1, f(x_1))$ με τον άξονα των x. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε μια ακολουθία $x_1, x_2, x_3, \ldots$ η οποία τουλάχιστον διαισθητικά περιμένουμε να συγκλίνει στη ζητούμενη ρίζα ρ. Ας αποδείξουμε αυτόν τον ισχυρισμό.

Ας ξεκαθαρίσουμε πρώτα τον όρο "αρκετά κοντά" που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω. Έστω M το μέγιστο της $|f''(x)|$ και m το ελάχιστο της $f'(x)$ στο $[\alpha,\beta]$. Θα έχουμε $m>0$ (γιατί;) και θα υποθέσουμε ότι $|x_1-\rho|<\frac{1}{2}\frac{m}{M}$. Θα δούμε ότι με αυτή την προϋπόθεση η ακολουθία x_k συγκλίνει και μάλιστα "αρκετά γρήγορα" στη ρίζα ρ.

Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (\text{γιατί;})$$

και επομένως θα υπάρχουν $\xi_k\in(\rho,x_k)$, $\xi_k'\in(x_k,\xi_k)$ τέτοια ώστε:

$$x_{k+1}-\rho = x_k-\rho-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} =$$

$$=x_k-\rho-\frac{f(x_k)-f(\rho)}{f'(x_k)} =$$

$$=(x_k-\rho)\left(1-\frac{f'(\xi_k)}{f'(x_k)}\right) =$$

$$=(x_k-\rho)\left(\frac{f'(x_k)-f'(\xi_k)}{f'(x_k)}\right) =$$

$$=(x_k-\rho)\left[(x_k-\xi_k)\frac{f''(\xi_k')}{f'(x_k)}\right], \text{ οπότε}$$

$$|x_{k+1}-\rho|\leq|x_k-\rho|\left(|x_k-\rho|\frac{M}{m}\right).$$

Η υπόθεση $|x_1-\varrho| < \frac{1}{2}\ \frac{m}{M}$ μας δίνει άμεσα $|x_2-\varrho| < \frac{1}{2}\,|x_1-\varrho|$.

$|x_3-\varrho| < |x_2-\varrho| \left(|x_2-\varrho|\, \frac{M}{m} \right) < \left(\frac{1}{2} \right)^2 |x_1-\varrho|$

και γενικά (εύκολη επαγωγή)

$$|x_k-\varrho| < \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} |x_1-\varrho| .$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι πραγματικά $x_k \to \varrho$ και μάλιστα το "λάθος" $x_k-\varrho$ τείνει στο 0 πιο γρήγορα από τη φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο $\left(\frac{1}{2}\right)^k |x_1-\varrho|$. Στην πραγματικότητα η σύγκλιση είναι ακόμα ταχύτερη αλλά δεν θα επιμείνουμε στο σημείο αυτό.

<u>Παράδειγμα</u> Ακόμα και σε περιπτώσεις που έχουμε άλλες μεθόδους για την επίλυση μιας εξίσωσης, η μέθοδος του Newton μπορεί να αποδειχτεί καλύτερη. Ας λύσουμε π.χ. την $f(x) = x^2-2=0$ στο διάστημα $[1,2]$ δηλ. ας προσεγγίσουμε τη $\sqrt{2}$. Αρ-

χίζουμε με $x_1 = 2$ και έχουμε

$x_1 = 2$

$$x_2 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{2}{4} = 1,5$$

$$x_3 = 1,5 - \frac{f(1,5)}{f'(1,5)} = 1,5 - \frac{2,25-2}{2 \cdot 1,5} =$$

$$= 1,5 - \frac{0,25}{3} = \frac{4,25}{3} = 1,4166\ldots$$

Δεδομένου ότι $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$ βλέπουμε ότι με δύο μόνο βήματα πετύχαμε προσέγγιση πολύ καλύτερη του 10^{-2}.

6.5 <u>Μια απλή διαφορική εξίσωση</u>.

Η κατάστρωση και η λύση "διαφορικών εξισώσεων" αποτελεί μια από τις σημαντικότερες εφαρμογές του Απειροστικού Λογισμού. Μια τέτοια εξίσωση μελετήσαμε με αρκετή λεπτομέρεια στο πρόβλημα του αρμονικού ταλαντωτή. Η συστηματική μελέτη αυτών των εξισώσεων θα γίνει σε άλλα μαθήματα. Στην παράγραφο αυτή θα περιοριστούμε σε μια απλή εξίσωση που εμφανίζεται πολύ συχνά. Η εξίσωση που θα εξετάσουμε είναι η $y'=ky$ όπου k ένας σταθερός πραγματικός αριθμός. Εδώ φυσικά ψάχνουμε για μια συνάρτηση $y=f(x)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση $y'=ky$. Αυτόματα λοιπόν, περιορίζουμε το ψάξιμο μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε, σύμφωνα με την ανάπτυξη της θεωρίας που παρουσιάσαμε το πεδίο ορισμού τους θα είναι ανοικτό διάστημα.

Είναι φανερό ότι αν η $y=f(x)$ είναι λύση της εξίσωσής μας και η $cf(x)$, c σταθερά, είναι επίσης λύση. Τα όσα είπαμε για την εκθετική συνάρτηση μας οδηγούν αμέσως στη λύση $y=e^{kx}$ (πραγματικά $(e^{kx})'=ke^{kx}$) και επομένως οι συναρτήσεις ce^{kx}, $c\in\mathbb{R}$, είναι λύσεις της εξίσωσής μας. Ισχυριζόμαστε ότι είναι και οι μόνες. Πιο συγκεκριμένα "αν μια συνάρτηση $y=f(x)$ ικανοποιεί την $y'=ky$ σε κάποιο διάστημα (α,β) τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $y = ce^{kx}$ για $x \in (a, \beta)$. (Ειδικότερα το συμπέρασμα αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε λύση σ' ένα διάστημα (a, β) μπορεί να "επεκταθεί" σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ · (γιατί;).

As δούμε κατ' αρχήν πώς θα φτάναμε τελείως φορμαλιστικά σ' αυτό το συμπέρασμα.

Αν $f'(x) = kf(x)$ τότε $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = k$ δηλ. $(\log|f(x)|)' = k$, $x \in (a, \beta)$. Συνάγουμε ότι $\log|f(x)| = kx + c_1$, c_1 σταθερά, δηλ. $|f(x)| = e^{c_1} e^{kx}$ και επομένως $f(x) = ce^{kx}$ όπου τώρα το c μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή (ενώ το e^{c_1} παίρνει μόνο θετικές τιμές).

Το κύριο εμπόδιο για να μετασχηματίσουμε τον παραπάνω συλλογισμό σε απόδειξη είναι ότι δεν ξέρουμε ά priori ότι $f(x) \neq 0$ και έτσι δεν μπορούμε να γράψουμε

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \kappa$. Αντί να εξετάσουμε ξεχωριστά περιπτώσεις ($f(x)=0$, $f(x)\neq 0$) εκμεταλλευόμαστε το αναμενόμενο τώρα συμπέρασμα και δείχνουμε ότι "Αν $f'(x) = \kappa f(x)$ $\alpha < x < \beta$, τότε η $f(x)\, e^{-\kappa x}$ είναι σταθερή στο (α, β) δηλ. $f(x) = c e^{-\kappa x}$, c σταθερά".

Η απόδειξη είναι σχεδόν τετριμμένη. Έχουμε $(f(x)\, e^{-\kappa x})' =$
$= f'(x)\, e^{-\kappa x} - \kappa e^{-\kappa x} f(x) =$
$= \kappa e^{-\kappa x} f(x) - \kappa e^{-\kappa x} f(x) = 0$, $\alpha < x < \beta$
οπότε πράγματι η $f(x) e^{-\kappa x}$ είναι σταθερά στο (α, β).

<u>Ένα μοντέλο πληθυσμιακής εξέλιξης.</u>

Ας γράψουμε $f(t)$ για τον πληθυσμό ενός συνόλου οργανισμών όπου η μεταβλητή t παριστάνει χρόνο. Παρ' όλο που η συνάρτηση f πρέπει να παίρνει μόνο ακέραιες τιμές στο θεωρητικό μοντέλο που θα δώσουμε, θα τη θεωρήσουμε μια πραγματική συνάρτηση για την οποία μάλιστα θα υποθέσουμε ότι έχει παράγωγο για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Θα υποθέσουμε ακόμα ότι τη χρονική στιγμή 0 ο πληθυσμός είναι γνωστός, έστω a, δηλ. $f(0) = a$. Η εξέλιξη του πληθυσμού εξαρτάται φυσικά από τον αριθμό των γεννήσεων και τον αριθμό των θανάτων που συμβαίνουν στον πληθυσμό. Μία, από βιολογική άποψη εύλογη, παραδοχή είναι ότι η διαφορά του αριθμού των γεννήσεων από τον αριθμό των θανάτων είναι για κάθε t ανάλογη με τον πληθυσμό $f(t)$. Η παραδοχή αυτή μεταφρασμένη σε μαθηματικούς όρους μας οδηγεί στην εξίσωση: $f'(t) = \kappa f(t)$, όπου κ μία σταθερά που εξαρτάται από τα βιολογικά χαρακτηριστικά του πληθυσμού και του περιβάλλοντος στο οποίο αναπτύσσεται. Η συνάρτηση λοιπόν f θα είναι λύση του προβλήματος:

$$\left.\begin{aligned} f'(t) &= \kappa f(t) \\ f(0) &= a \end{aligned}\right\}$$

Η $f'(t)=\kappa f(t)$ δίνει $f(t)=ce^{\kappa t}$ και η $f(0)=a$ μας λέγει ότι: $c=a$, δηλ. $f(t)=ae^{\kappa t}$.

6.6 Ασκήσεις

1) Συμπληρώστε την απόδειξη του δεύτερου θεωρήματος (περίπτωση $\lim f(x)=\lim g(x)=\pm\infty$) της § 6.1.

2) Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο (a,β) και αν $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\lim\limits_{x\to\beta-} f(x)=+\infty$ δείξτε ότι η $f(x)$ έχει ελάχιστο στο (a,β).

3) Βρείτε έναν αριθμό a, αν υπάρχει, τέτοιο ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x^3}+\frac{a}{x^2}\right)$.

4) Αν υπάρχει η $f''(x)$ στο (a,β) και είναι θετική τότε η συνάρτηση είναι κυρτή δηλ.

$$f(\gamma x+\delta y)<\gamma f(x)+\delta f(y)$$

για όλα τα $x,y\in(a,\beta)$ και $\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ με $\gamma>0$, $\delta>0$ και $\gamma+\delta=1$.

τι σημαίνει γεωμετρικά η παραπάνω ανισότητα; (συγκρίνετε το γράφημα της f στο $[x,y]$ με την αντίστοιχη χορδή του γραφήματος).

5) Μια ραδιενεργός ουσία έχει μάζα $m(t)$, t χρόνος. Η υπόθεση ότι η ουσία είναι ραδιενεργός σημαίνει ότι "χάνει μάζα με ρυθμό ανάλογο προς τη μάζα", δηλ. $m'(t)=-k^2m(t)$ για κάποια σταθερά k. Δείξτε ότι "ο χρόνος ημιζωής" της ουσίας, δηλ. ο χρόνος που χρειάζεται για να μείνει η μισή μάζα, είναι ανεξάρτητος της αρχικής μάζας m_0.—

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ον. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΑ

Πολλά και σημαντικά θέματα της θεωρίας παραλήφθηκαν στην ανάπτυξη που παρουσιάσαμε μέχρι τώρα. Στο κεφάλαιο αυτό κάνουμε μια σύντομη εισαγωγή σε μερικά από αυτά τα θέματα. Όπως και στο κεφάλαιο 6 τα θέματα είναι γενικά ανεξάρτητα μεταξύ τους και μπορούν να διαβαστούν με οποιαδήποτε σειρά.

7.1 Τα αξιώματα του διατεταγμένου σώματος.

Για λόγους πληρότητας δίνουμε τον κατάλογο των αξιωμάτων ενός διατεταγμένου σώματος. Το θέμα αυτό αναπτύσσεται διεξοδικά στο μάθημα της Άλγεβρας.

<u>Ορισμός:</u> "Ένα μη κενό σύνολο Σ λέγεται διατεταγμένο σώμα αν ισχύουν τα εξής:

I) Για κάθε ζευγάρι $x, y \in \Sigma$ υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο του, που συμβολίζεται $x+y$ και λέγεται άθροισμα των x, y, τέτοιο ώστε για όλα τα $x, y, z \in \Sigma$ να έχουμε:

α) $(x+y)+z = x+(y+z)$

β) Υπάρχει ένα στοιχείο του Σ, που συμβολίζεται 0, τέτοιο ώστε $x+0 = 0+x = x$.

γ) Υπάρχει ένα στοιχείο, που συμβολίζεται $-x$, τέτοιο ώστε $x+(-x) = (-x)+x = 0$

δ) $x+y = y+x$

II) Για κάθε $x, y \in \Sigma$ υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο του, που συμβολίζεται xy και λέγεται γινόμενο των x, y, τέτοιο ώστε για όλα τα $x, y, z \in \Sigma$ να έχουμε:

α) $(xy)z = x(yz)$

β) Υπάρχει ένα στοιχείο του Σ διαφορετικό από το 0, που συμβολίζεται 1, τέτοιο ώστε $1x = x1 = x$.

γ) Για κάθε $x \in \Sigma$ με $x \neq 0$ υπάρχει ένα στοιχείο του Σ, που συμβολίζεται x^{-1}, τέτοιο ώστε $x x^{-1} = x^{-1} x = 1$.

δ) $xy = yx$

ε) $x(y+z) = xy + xz$

III) Υπάρχει ένα υποσύνολο P

του Σ, που λέγεται σύνολο των θετικών στοιχείων του Σ, τέτοιο ώστε:

α) Για κάθε $x \in \Sigma$ ισχύει ακριβώς μία από τις 3 σχέσεις: $x \in P$, $-x \in P$, $x = 0$.

β) $x, y \in P \Rightarrow x+y \in P$ και $xy \in P$.

Όποιος είναι λίγο εξοικειωμένος με τη σύγχρονη Άλγεβρα θα αναγνώρισε ότι τα αξιώματα $I_\alpha, I_\beta, I_\gamma$ χαρακτηρίζουν το Σ σαν ομάδα ως προς την πρόσθεση και τα $I_\alpha, I_\beta, I_\gamma, I_\delta$ σαν Αβελιανή ομάδα. Τα αξιώματα I και II χαρακτηρίζουν το Σ σαν σώμα. Η ομάδα III των αξιωμάτων καθορίζει τα θετικά στοιχεία και επομένως τη διάταξη, αν ορίσουμε $x < y \Leftrightarrow y - x \in P$.

Όλες οι γνωστές ιδιότητες των πράξεων και της διάταξης προκύπτουν από τα παραπάνω αξιώματα. Π.χ. "το 0 είναι μοναδικό". Πραγματικά, αν υπήρχε στοιχείο $0'$ τέτοιο ώστε $0'+x = x+0' = x$ για όλα τα $x \in \Sigma$, τότε παίρνοντας $x = 0$ θα είχαμε:

$0'+0=0$ και $0'+0=0'$ (αξίωμα Iβ), οπότε και $0=0'$. Μια άλλη τετριμμένη ιδιότητα είναι η $1>0$, δηλ. $1-0=1\in P$. Πραγματικά, επειδή $1\neq 0$ μένουν οι δύο περιπτώσεις $1\in P$ ή $-1\in P$. Αν $(-1)\in P$ τότε $1=(-1)(-1)\in P$ που είναι άτοπο (αξίωμα III). Συνάγουμε λοιπόν ότι $1\in P$.

<u>Άσκηση.</u> α) Δείξτε όσες και όποιες ιδιότητες θέλετε των διατεταγμένων σωμάτων.

β) Υπάρχει σώμα με 1 στοιχείο; με 2 στοιχεία; με 3 στοιχεία;
Ίδια ερώτηση για διατεταγμένα σώματα.

Όταν μελετάμε ένα αξιωματικό σύστημα μας ενδιαφέρει να δούμε αν τα αξιώματα είναι σ υ μ β ι β α σ τ ά, δηλ. ότι δεν προκύπτει καμία αντίφαση από αυτά. Μας ενδιαφέρει επίσης να δούμε αν τα αξιώματα είναι α ν ε ξ ά ρ τ η τ α, δηλ. ότι κανένα από αυτά δεν είναι απόρροια των υπολοίπων. Είναι προφανές ότι αν υπάρχει ένα γνωστό σύνολο στο οποίο ικανοποιούνται όλα τα αξιώματα εκτός από ένα, τότε το αξίωμα αυτό είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα.

Ας ελέγξουμε ότι το επίμαχο αξίωμα της συνεχείας είναι πραγματικά ανεξάρτητο από τα αξιώματα του διατεταγμένου σώματος. Πρέπει λοιπόν να βρούμε ένα διατεταγμένο σώμα στο οποίο δεν ικανοποιείται το αξίωμα της συνεχείας. Θεωρούμε το σύνολο $Q(x)$ των ρητών συναρτήσεων. Είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι με τις συνηθισμένες πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού το $Q(x)$ είναι πραγματικά σώμα. Ορίζουμε σαν θετικά στοιχεία του $Q(x)$ εκείνες τις ρητές συναρτήσεις $\dfrac{P(x)}{q(x)} = \dfrac{a_0 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + \cdots + b_m x^m}$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, για τις οποίες οι συντελεστές a_n και b_m είναι ομόσημοι.

<u>Άσκηση</u>. α) Δείξτε ότι με τον παραπάνω ορισμό το $Q(x)$ γίνεται διατεταγμένο σώμα (πρέπει πρώτα να δείξετε ότι ο ορισμός των θετικών στοιχείων είναι "καλός").

β) Δείξτε ότι στο $Q(x)$ δεν ισχύει η Αρχιμήδεια ιδιότητα (άρα δεν ισχύει και το αξίωμα της συνεχείας).

7.2 Οι τομές του Dedekind

Όπως αναφέραμε στο 1º κεφάλαιο ήδη από την αρχαιότητα είχαν ανακαλυφτεί οι άρρητοι αριθμοί. Είχε γίνει κατανοητό ότι οι ρητοί (τους οποίους θεωρούμε ότι καταλαβαίνουμε καλά) αφήνουν "κάποια κενά" (π.χ. το $\sqrt{2}$) των οποίων η συμπλήρωση δημιουργεί το σύνολο των πραγματικών αριθμών, το "συνεχές" όπως έλεγαν παλιότερα. Μέχρι το τέλος του 19ου αιώνα, από πλευράς ακριβείας, η καλύτερη πληροφορία που είχαμε ήταν ο ορισμός της ισότητας δύο πραγματικών όπως δίνεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη και αποδίδεται στον Εύδοξο (ο ορισμός του Εύδοξου ουσιαστικά έλεγε : $x=y$ αν και μόνο αν κάθε ρητός μικρότερος του x είναι και μικρότερος του y και κάθε ρητός μεγαλύτερος τοῦ x εἶναι καὶ μεγαλύτερος τοῦ y).

Μια σωστή τοποθέτηση των πραγμάτων έγινε για πρώτη φορά το 1872 από το Γερμανό Μαθηματικό R. Dedekind σε ένα βιβλιαράκι του με τον τίτλο "Συνέχεια και άρρητοι αριθμοί". Η έννοια του πραγματικού αριθμού ή το "συνεχές" των πραγματικών υπήρχε φυσικά στο μυαλό των ανθρώπων και η διατύπωση ακριβούς ορισμού ίσως πρέπει να συγκριθεί με την ανακάλυψη και διατύπωση ενός βασικού νόμου της Φυσικής (φανταστείτε την ανακάλυψη του Θαλή για τον ηλεκτρισμό ή του Newton για την βαρύτητα). Ίσως κάτι τέτοιο να είχε ο Dedekind στο μυαλό του όταν, στο παραπάνω βιβλιαράκι, έγραφε:

"... Οι πιο πολλοί άνθρωποι θα θεωρήσουν αυτή την ανακάλυψη κοινοτυπία. Η ανακάλυψη αυτή συνίσταται στο εξής: Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι κάθε σημείο p της ευθείας παράγει ένα διαχωρισμό της ευθείας σε δύο μέρη ..."

Η κεντρική ιδέα του Dedekind ήταν να ταυτίσει τους πραγματικούς αριθμούς με "τομές" των ρητών (τις λεγόμενες τομές του Dedekind).

<u>Ορισμός</u>. Ένα υποσύνολο A του Q λέγεται τομή αν

i) $\phi \neq A \subsetneq Q$

ii) $x \in A$ και $y < x \Rightarrow y \in A$

iii) Το A δεν έχει μέγιστο στοιχείο (δηλ. δεν υπάρχει $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε $x_0 \geqslant x$ για όλα τα $x \in A$).

<u>Άσκηση</u>. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των πραγματικών που δώσαμε στο 1º κεφάλαιο δείξτε ότι: "αν σε κάθε πραγματικό x αντιστοιχίσουμε το σύνολο $A_x = \{y \in \mathbf{Q}, y < x\}$ τότε η αντιστοιχία $x \to A_x$ είναι 1-1 και επί από τους πραγματικούς στο σύνολο όλων των τομών των ρητών". Ποια είναι η αντίστροφη της "συνάρτησης" $\Phi : x \mapsto A_x$;

Το επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε πράξεις και σχέση διατάξεως στο σύνολο των τομών και να δείξουμε ότι ικανοποιούνται όλα τα αξιώματα των πραγματικών. Ορίζουμε π.χ. "η τομή A είναι μικρότερη ή ίση της B αν $A \subset B$", "Το 'άθροισμα' $A+B$ ορίζεται σαν $\{\alpha+\beta : \alpha \in A \text{ και } \beta \in B\}$ κ.τ.λ.

Αν θέλετε μπορείτε να συνεχίσετε μόνοι σας τη θεωρία (δεν υπάρχει πουθενά ουσιαστική δυσκολία) ή να ανατρέξετε στη βιβλιογραφία.

7.3 Ακολουθίες Cauchy.

Για να ελέγξουμε αν μία ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει, σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε, πρέπει να γνωρίζουμε το "υποψήφιο" όριό της a (για να εξετάσουμε τις απόλυτες τιμές των διαφορών $a_n - a$). Σε πολλές όμως περιπτώσεις είτε δεν γνωρίζουμε κανένα τέτοιο a είτε, ίσως, δεν ενδιαφερόμαστε για την τιμή του ορίου, αλλά το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι αν η ακολουθία είναι συγκλίνουσα ή όχι. Το παρακάτω σημαντικό θεώρημα μας δίνει ένα κριτήριο γι' αυτές τις περιπτώσεις.

<u>Θεώρημα</u>. Μία ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει αν και μόνο αν είναι "βασική" (ή "Cauchy"), δηλ. για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για όλα τα $n, m \in \mathbb{N}$ να ισχύει:

$$n, m > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Όπως βλέπουμε στον ορισμό της βασικής ακολουθίας δεν υπεισέρχεται καθόλου το όριο a της $\{a_n\}$.

<u>Απόδειξη</u>. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι η a_n συγκλίνει και ότι $a_n \to a$. Τότε, για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει n_0 με την ιδιότητα: $n>n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Αν λοιπόν $n, m > n_0$ τότε:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a - (a_m - a)| \leqq$$

$$\leqq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

δηλ. η $\{a_n\}$ είναι βασική.

Το αντίστροφο είναι πιο ενδιαφέρον. Δείχνουμε πρώτα ότι: "Κάθε βασι-

κή ακολουθία είναι φραγμένη". Πραγματικά, από τον ορισμό της βασικής ακολουθίας, με $\varepsilon = 1$, βρίσκουμε ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:
$n > n_0 \Rightarrow |a_n| \leq |a_{n_0+1}| + |a_n - a_{n_0+1}| <$
$< |a_{n_0+1}| + 1$.

Συνάγουμε λοιπόν ότι για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, θα έχουμε:
$|a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n_0+1}| + 1 = M$,
δηλ. η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη.

Γνωρίζουμε τώρα ότι θα υπάρχει μία υπακολουθία $\{a_{k_n}\}$ της $\{a_n\}$ η οποία θα συγκλίνει, έστω ότι $a_{k_n} \to a$. Ισχυρίζομαι ότι και "ολόκληρη η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο a". Η απόδειξη του ισχυρισμού είναι εύκολη. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ για όλα τα $n, m \in \mathbb{N}$ με $n, m > n_0$. Υπάρχει επίσης $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n > n_1 \Rightarrow |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Αν τώρα $n > \max(n_0, n_1)$, τότε $k_n \geq n \geq n_0$ και επομένως:

$|a_n - a| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$,
όπως ακριβώς έπρεπε να δείξουμε.

<u>Θεώρημα</u> (κριτήριο Cauchy για ύπαρξη ορίου συνάρτησης). Έστω f μία συνάρτηση και x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της. Δείξτε ότι μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για να υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ είναι η εξής: Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα x, y του πεδίου ορισμού της f που είναι $\neq x_0$ να ισχύει:
$|x - x_0|, |y - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

<u>Απόδειξη</u>: Άσκηση.

Η ιδιότητα των πραγματικών ακολουθιών που δείξαμε στο πρώτο θεώρημα αυτής της παραγράφου, δηλ. ότι κάθε βασική ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει, ονομάζεται συνήθως πληρότητα του R. Λέμε ακόμα ότι ο $\mathbb{R}$ είναι "πλήρης χώρος". Είναι ενδιαφέρον να συγκρίνουμε, από τη σκοπιά αυτή, το $\mathbb{Q}$ με το $\mathbb{R}$. "Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι π λ ή ρ η ς χ ώ ρ ο ς". Με αυτό φυσικά εννοούμε ότι υπάρχουν βασικές ακολουθίες $\{a_n\}$ με $a_n \in \mathbb{Q}$, $n=1,2,\ldots$, οι οποίες δεν συγκλίνουν (στο $\mathbb{Q}$).

<u>Προσέξτε</u>: Μία τέτοια ακολουθία $\{a_n\}$ μπορεί φυσικά να θεωρηθεί και σαν ακολουθία στο $\mathbb{R}$, αφού $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$, επομένως συγκλίνει (στο $\mathbb{R}$), αλλά καλλιστα μπορεί να συμβεί το όριό της να μην ανήκει στο $\mathbb{Q}$.

<u>Άσκηση</u>. (i) Δώστε ένα παράδειγμα μιας βασικής ακολουθίας $\{a_n\}$, με $a_n \in \mathbb{Q}$, $n=1,2,\ldots$, που δεν συγκλίνει στο $\mathbb{Q}$.

(ii) Εξετάστε ποια από τα υποσύνολα $[0,1]$, $(0,1)$, $[0,\infty)$, $(0,\infty)$ του $\mathbb{R}$ είναι πλήρη και ποια όχι, αφού πρώτα διατυπώσετε με ακρίβεια τι σημαίνει ότι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι πλήρες.

(iii) Αν $A\subset\mathbb{R}$ και το A είναι πλήρες, τότε κάθε σημείο συσσώρευσης του A

ανήκει στο A

7.4 Η δεκαδική παράσταση των πραγματικών αριθμών.

Η δικαιολόγηση της συνηθισμένης δεκαδικής παράστασης των πραγματικών βασίζεται κατά ουσιαστικό τρόπο στο αξίωμα της συνέχειας. Ο τρόπος αυτός παράστασης των πραγματικών έχει επικρατήσει γιατί παρουσιάζει σημαντικά πλεονεκτήματα στην εκτέλεση πράξεων.

Έστω x ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Γράφουμε $x_0=[x]$ και $y_0=x-x_0$, οπότε θα έχουμε $x=x_0+y_0$ με $0\leq y_0<1$.

Αν γράψουμε $x_1=[10y_0]$, $y_1=y_0-10^{-1}[10y_0]$, θα έχουμε:

$x=x_0+\frac{x_1}{10}+y_1$, με x_1 ακέραιο, $0\leq x_1<10$ και $0\leq y_1<10^{-1}$. Ένας απλός επαγωγικός συλλογισμός δείχνει ότι μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία ακεραίων $x_1, x_2, \dots$

τέτοια ώστε $0 \leq x_k < 10$, $k = 1, 2, \ldots$ και

$x = x_0 + \frac{x_1}{10} + \cdots + \frac{x_k}{10^k} + y_k$ με $0 \leq y_k < 10^{-k}$,

για όλα τα $k \in \mathbb{N}$.

<u>Άσκηση.</u> "Συμπληρώστε την παραπάνω απόδειξη και δείξτε επί πλέον ότι

$$x_k = [10^k x] - 10\,[10^{k-1} x]"$$

Συνήθως γράφουμε $x_0, x_1 \ldots . x_k$ αντί $x_0 + \frac{x_1}{10} + \cdots + \frac{x_k}{10^k}$ και καλούμε αυτό τον αριθμό "δεκαδική προσέγγιση τάξης 10^{-k} του x". Είναι φανερό ότι "η ακολουθία $\Delta_0 = x_0$, $\Delta_1 = x_0 + \frac{x_1}{10}, \ldots \Delta_k = x_0 + \frac{x_1}{10} + \cdots + \frac{x_k}{10^k} \ldots$ συγκλίνει στον αριθμό x".

Αντίστροφα, αν μας δοθεί μια ακολουθία $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots$ όπου $\beta_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $\beta_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $j = 1, 2, \ldots$ τότε η ακολουθία $a_k = \beta_0 + \frac{\beta_1}{10} + \cdots + \frac{\beta_k}{10^k}$ συγκλίνει σε ένα μη αρνητικό αριθμό x. Προφανώς $a_k \geq 0$ και η $\{a_k\}$ είναι αύξουσα. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η $\{a_k\}$ είναι φραγμένη προς τα πάνω. Για τυχαίο όμως $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$a_k = \beta_0 + \frac{\beta_1}{10} + \dots + \frac{\beta_k}{10^k} \leq \beta_0 + \frac{9}{10} + \dots + \frac{9}{10^k} =$$

$$= \beta_0 + \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{10^{k-1}}\right) =$$

$$= \beta_0 + \frac{9}{10}\,\frac{1 - \frac{1}{10^k}}{1 - \frac{1}{10}} < \beta_0 + \frac{9}{10}\,\frac{1}{\frac{9}{10}} = \beta_0 + 1,$$

και έτσι το $\beta_0 + 1$ είναι ένα φράγμα της $\{a_k\}$.

Είναι ενδιαφέρον, και χρήσιμο σε πολλές περιπτώσεις, να παρατηρήσουμε ότι η παράσταση αυτή δεν είναι μοναδική. Υπάρχουν δηλ. πραγματικοί x με δύο διαφορετικές δεκαδικές παραστάσεις. Έτσι π.χ έχουμε

$$1,000\ldots = 0,999\ldots$$

Πραγματικά

$$\frac{9}{10} + \dots + \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10}\,\frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Περιπτώσεις σαν κι αυτή είναι ουσιαστικά οι μόνες, δηλ. αν $a_0, a_1 a_2 \ldots = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \ldots$

τότε ή α) $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, ... ή β) για κάποιο $\kappa \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $\alpha_0 = \beta_0$, ..., $\alpha_{\kappa-1} = \beta_{\kappa-1}$, $\alpha_\kappa = \beta_\kappa + 1$, $\alpha_{\kappa+1} = \alpha_{\kappa+2} = \dots = 0$, $\beta_{\kappa+1} = \beta_{\kappa+2} = \dots = 9$ ή γ) για κάποιο $\kappa \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $\alpha_0 = \beta_0$, ..., $\alpha_{\kappa-1} = \beta_{\kappa-1}$, $\beta_\kappa = \alpha_\kappa + 1$, $\beta_{\kappa+1} = \beta_{\kappa+2} = \dots = 0$, $\alpha_{\kappa+1} = \alpha_{\kappa+2} = \dots = 9$

Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι δεν συμβαίνει το α. Ονομάζουμε κ τον πιο μικρό από τους αριθμούς $0, 1, 2, \dots$ για τον οποίο ισχύει $\alpha_\kappa \neq \beta_\kappa$. Έστω $\alpha_\kappa > \beta_\kappa$. Θα έχουμε

$$\frac{\alpha_\kappa}{10^\kappa} + \frac{\alpha_{\kappa+1}}{10^{\kappa+1}} + \dots + \frac{\alpha_{\kappa+n}}{10^{\kappa+n}} \geqslant \frac{\alpha_\kappa}{10^\kappa} \geqslant \frac{\beta_\kappa}{10^\kappa} + \frac{1}{10^\kappa},$$

$$\frac{\beta_\kappa}{10^\kappa} + \frac{\beta_{\kappa+1}}{10^{\kappa+1}} + \dots + \frac{\beta_{\kappa+n}}{10^{\kappa+n}} \leqslant \frac{\beta_\kappa}{10^\kappa} + \frac{9}{10^{\kappa+1}} + \dots + \frac{9}{10^{\kappa+n}}$$

$$= \frac{\beta_\kappa}{10^\kappa} + \frac{1}{10^\kappa}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) < \frac{\beta_\kappa}{10^\kappa} + \frac{1}{10^\kappa}$$

και επομένως

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_\kappa}{10^\kappa} + \dots + \frac{\alpha_{\kappa+n}}{10^{\kappa+n}}\right) \geqslant \frac{\beta_\kappa}{10^\kappa} + \frac{1}{10^\kappa} \geqslant$$

$$\geqslant \lim\left(\frac{\beta_\kappa}{10^\kappa} + \dots + \frac{\beta_{\kappa+n}}{10^{\kappa+n}}\right).$$

Αν υπάρχει έστω και ένα $n>0$ τέτοιο ώστε $a_{k+n}>0$ τότε η αριστερά ανισότητα θα είναι γνήσια (γιατί;) και αν υπάρχει έστω και ένα $n>0$ τέτοιο ώστε $\beta_{k+n}<9$ τότε η δεξιά ανισότητα θα είναι γνήσια (γιατί;). Και στις δύο λοιπόν περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο, δηλ. αν δεν ισχύει η α πρέπει να ισχύει ή η β ή η γ.

<u>Άσκηση</u>. α) Αν ένας αριθμός $x>0$ έχει δεκαδική παράσταση της μορφής $x_0, x_1x_2\cdots x_n\cdots$ και $x_n\neq 0$ ενώ $x_{n+1}=$ $=x_{n+2}=\cdots=0$ τότε $x=x_0,x_1\cdots x_n\cdots=$ $=x_0,x_1\cdots(x_n-1)99\ldots$

β) Αν συμφωνήσουμε να γράφουμε όλες τις δεκαδικές παραστάσεις με ψηφία ίσα με 0 από μία θέση και πέρα με τις ίσες τους παραστάσεις που τελειώνουν σε 99... τότε η δεκαδική παράσταση είναι μονοσήμαντη.

γ) Αν $q=x_0,x_1x_2\cdots$ και $q\in\mathbb{Q}, q>0$, τότε υπάρχουν $\kappa, n\in\mathbb{N}$ τέτοια ώστε $x_{\lambda+n}=x_\lambda$ για όλα τα $\lambda\geqslant\kappa$. (Τέτοιες δεκαδικές παραστάσεις λέγονται περιοδικές). Αντίστροφα κάθε τέτοια δεκαδική παράσταση ισούται με ένα ρητό αριθμό.

[Υπόδειξη: Για το αντίστροφο, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ο $10^n q - q = (10^n - 1) q$ είναι ακέραιος. Για το ευθύ γράψτε $q = \frac{A}{B}$, με $A, B \in \mathbb{N}$, και $B = 2^\nu 5^\rho \Gamma$ $\nu, \rho \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, και ο Γ είναι πρώτος προς το 10. Το μικρό θεώρημα του Fermat μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός φυσικού n τέτοιου ώστε ο Γ να διαιρεί το $10^n - 1$. Αυτό το n είναι μια καλή επιλογή για το n που ζητάει η άσκηση].

7.5 Το "πλήθος" των πραγματικών αριθμών.

Χαρακτηρίζουμε σαν πεπερασμένο ένα σύνολο, όταν μπορούμε να μετρήσουμε με ένα φυσικό αριθμό το πλήθος των στοιχείων του. Ακριβέστερα λέμε ότι το Α είναι πεπερασμένο όταν υπάρχει μία 1-1 και επί συνάρτηση Φ με πεδίο ορισμού τους φυσικούς και πεδίο τιμών το A. Ο όρος 1-1 σημαίνει ότι $\Phi(\alpha)=\Phi(\beta) \Rightarrow \alpha=\beta$, δηλ. διαφορετικά στοιχεία έχουν διαφορετικές εικόνες, και ο όρος επί σημαίνει ότι κάθε στοιχείο του A είναι εικόνα ενός στοιχείου του $\mathbb{N}$.

Φυσικά υπάρχουν υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που δεν είναι πεπερασμένα, π.χ. τα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ (δώστε απόδειξη).

Μεταξύ των άπειρων συνόλων φαίνεται, διαισθητικά τουλάχιστον, ότι κάποια είναι "πιο άπειρα" από άλλα. Η ακριβής κατάταξη των υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ (ή και, γενικότερα, οποιωνδήποτε συνόλων) ανάλογα με το "πλήθος" των στοιχείων τους έγινε στο τέλος του 19ου αιώνα από το Γερμανό μαθηματικό G. Cantor. Ο Cantor για το σκοπό αυτό δημιούργησε τη λεγόμενη "υπερπεπερασμένη Αριθμητική" στην οποία λίγο πολύ έκανε πράξεις με "άπειρα". Ας σημειώσουμε εδώ ότι για αρκετό διάστημα πολλοί μαθηματικοί έβλεπαν με δυσπιστία τις έρευνες του Cantor. Ένα σημαντικό αποτέλεσμα σ' αυτή την κατεύθυνση θα συζητήσουμε με συντομία σ' αυτή την παράγραφο.

<u>Θεώρημα</u>. Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών δεν είναι αριθμήσιμο, δηλ. δεν υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση από το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$.

Η διατύπωση του θεωρήματος περιέχει και τον ορισμό του αριθμήσιμου συνόλου (ακριβέστερα "άπειρου αριθμήσιμου").

Γενικά λέμε ότι δύο σύνολα A, B είναι ισοδύναμα ή ότι έχουν τον ίδιο "πληθικό αριθμό" αν υπάρχει μία 1-1 και επί συνάρτηση Φ από το A στο B. Αριθμήσιμα λοιπόν είναι τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που είναι ισοδύναμα με το $\mathbb{N}$.

Ήδη από το σημείο αυτό αρχίζουν τα παράδοξα. Έτσι π.χ. το σύνολο A των ζυγών φυσικών, $A = \{2\kappa, \kappa \in \mathbb{N}\}$, που "έπρεπε" να έχει λιγότερα στοιχεία από το $\mathbb{N}$, είναι ισοδύναμο με το $\mathbb{N}$. Αρκεί πράγματι να πάρουμε $\Phi : \mathbb{N} \to A$ με $\Phi(\kappa) = 2\kappa$. Με λίγο περισσότερη προσοκή μπορούμε να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών είναι αριθμήσιμο, ενώ "έπρεπε" να έχει περισσότερα στοιχεία από το $\mathbb{N}$. Με το $\mathbb{R}$ η κατάσταση είναι διαφορετική. Κατ' αρχήν η συνάρτηση $\Phi(x) = \tan\frac{\pi}{2}x$, $\Phi : (-1,1) \to \mathbb{R}$, δείχνει ότι το $\mathbb{R}$ είναι ισοδύναμο με το διάστημα $(-1,1)$ και η συνάρτηση $\Psi : (-1,1) \to (0,1)$ με $\Psi(x) = \frac{1}{2}(x+1)$ δείχνει ότι το $(-1,1)$, άρα και το $\mathbb{R}$ είναι ισοδύναμο με το $(0,1)$ (γιατί;). Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το $(0,1)$ δεν είναι αριθμήσιμο. Η απόδειξη θα κάνει ουσιαστική χρήση του αξιώματος της συνεχείας (με τη μορφή της δεκαδικής παράστασης των πραγματικών) και θα βασίζεται σε ένα συλλογισμό που λέγεται **διαγώνιος συλλογισμός του Cantor**. Ο συλλογισμός αυτός χρησιμοποιείται πολύ συχνά στα μαθηματικά.

<u>Απόδειξη:</u> Ας υποθέσουμε ότι υπήρχε μία συνάρτηση Φ 1-1 και επί από το

$\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$. Γράφουμε τη δεκαδική παράσταση των στοιχείων $\Phi(1), \Phi(2), \ldots, \Phi(n), \ldots$, και για να μην έχουμε πρόβλημα με το ποια δεκαδική παράσταση παίρνουμε, διαλέγουμε εκείνη που τελειώνει σε 999... στις περιπτώσεις που υπάρχουν δύο τέτοιες παραστάσεις. Έστω λοιπόν:

$$\Phi(1) = 0, x_1^1 x_2^1 x_3^1 \cdots x_n^1 \cdots$$
$$\Phi(2) = 0, x_1^2 x_2^2 x_3^2 \cdots x_n^2 \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Phi(n) = 0, x_1^n x_2^n x_3^n \cdots x_n^n \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

οι δεκαδικές αυτές παραστάσεις.

Για να φτάσουμε σε άτοπο θα βρούμε ένα $x \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $x \neq \Phi(n)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε λοιπόν τον αριθμό x με δεκαδική παράσταση $0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ όπου τα $a_1, a_2, \ldots$ ορίζονται ως εξής: $a_k = 5$ αν $x_k^k \neq 5$ και $a_k = 6$ αν $x_k^k = 5$. Είναι σχεδόν τετριμμένο να δούμε ότι πραγματικά $x \in (0,1)$ και $x \neq \Phi(n)$, για κάθε n (δείξτε το).

<u>Παρατήρηση</u>. Ένα ερώτημα, τελείως φυσιολογικό, που απασχόλησε

τον Cantor μετά από αυτή την ανακάλυψη, ήταν το εξής: "Υπάρχουν άπειρα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τα οποία να μην είναι ισοδύναμα ούτε με το $\mathbb{N}$ ούτε με το $\mathbb{R}$;" Η υπόθεση ότι δεν υπάρχουν τέτοια σύνολα είναι γνωστή σαν υπόθεση του συνεχούς. Η απάντηση που έδωσαν οι μαθηματικοί (ο Γερμανός K. Gödel το 1939 και ο Αμερικανός P. Cohen το 1963) θυμίζει λίγο την "Πυθία". Πιο συγκεκριμένα έδειξαν ότι με τις συνηθισμένες παραδοχές που κάνουμε στη θεωρία συνόλων, δεν πρόκειται να βρούμε καμία αντίφαση είτε αποδεχτούμε, είτε απορρίψουμε την υπόθεση του συνεχούς. Με άλλα λόγια, αν τα αξιώματα στα οποία στηριζόμαστε στη θεωρία των συνόλων είναι συμβιβαστά (δηλ. δεν οδηγούν σε αντιφάσεις), τότε θα εξακολουθήσουν να είναι συμβιβαστά, αν προσθέσουμε σαν αξίωμα την υπόθεση του συνεχούς ή την άρνησή της.

7.6 Η συνέχεια Darboux

<u>για την παράγωγο.</u>

Ας θεωρήσουμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα (α,β). Δεν υπάρχει ά πριόρι λόγος να είναι συνεχής η παράγωγος μιας τέτοιας συνάρτησης. Ένα πολύ ενδιαφέρον θεώρημα του Darboux μας λέει όμως ότι οι ασυνέχειες της παραγώγου, αν υπάρχουν, είναι μόνο ουσιώδεις. Ακριβέστερα το θεώρημα είναι το εξής:

<u>Θεώρημα</u>. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και αν $f'(\gamma)\neq f'(\delta)$, $\alpha<\gamma<\delta<\beta$, και αν A είναι ένας αριθμός μεταξύ των $f'(\gamma)$ και $f'(\delta)$, τότε υπάρχει ξ, $\gamma<\xi<\delta$, τέτοιο ώστε $f'(\xi)=A$.

Με άλλα λόγια το θεώρημα λέει ότι η f' ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος της μέσης τιμής (τέτοιες συναρτήσεις αναφέρονται σαν Darboux συνεχείς).

<u>Άσκηση</u>: α) Δείξτε την ιδιότητα για τις ασυνέχειες της f' που αναφέραμε πιο πάνω σαν πόρισμα του θεωρήματος.

β) Δώστε ένα παράδειγμα μιας παραγωγίσιμης f' με ασυνεχή παράγωγο σε ένα διάστημα.

[<u>Υπόδειξη</u>. i) Για κάθε διάστημα $I=(\alpha,\beta)$ δείξτε ότι η συνάρτηση

$$g_I(x)=\begin{cases} 0 \ , & x\notin(\alpha,\beta) \\ \left\{1-\dfrac{4}{(\beta-\alpha)^2}\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right\}^2, & x\in(\alpha,\beta)\end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.

ii) Θεωρείστε τώρα μια συνάρτηση, αφού δείξετε ότι υπάρχει, με παράγωγο

$$f(x)=\begin{cases} g_{I_n}(x), & x\in I_n=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^3}\right) \quad n=2,3,\ldots \\ 0 \ , & x\in(-1,1)-\bigcup\limits^{\infty} I_n\end{cases}$$

iii) Ἢ ἀκολουθήστε τό (ii) μέ $n=1$ τή συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$

<u>Απόδειξη του θεωρήματος</u>: Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε $f'(\gamma)<A<f'(\delta)$.

<u>Ισχυρισμός</u>. Υπάρχει $n>0$ τέτοιο ώστε $n<\delta-\gamma$ και αν

$$g(x)=\frac{f(x+n)-f(x)}{n}, \quad \gamma\leq x\leq\delta-n, \text{ τότε}$$

$g(\gamma)<A<g(\delta-n)$.

Ας πιστέψουμε προς στιγμή τον ισχυρισμό. Η g είναι προφανώς συνεχής, οπότε το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής, εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός αριθμού ξ, $\gamma<\xi<\delta-\eta$, τέτοιου ώστε

$$g(\xi)=A \quad \text{δηλ.} \quad \frac{f(\xi+\eta)-f(\xi)}{\eta}=A.$$

Το θεώρημα τώρα της μέσης τιμής συνεπάγεται την ύπαρξη ενός ξ', $\xi<\xi'<\xi+\eta$, τέτοιου ώστε $f(\xi+\eta)-f(\xi)=f'(\xi')\cdot\eta$, δηλ. $f'(\xi')=A$, όπως ακριβώς έπρεπε να δείξουμε.

Άσκηση. (1) Δείξτε τον ισχυρισμό.

(1) *

7.7. Η ισοδυναμία των ορισμών του Darboux και του Riemann για το ορισμένο ολοκλήρωμα φραγμένων συναρτήσεων.

Θα δείξουμε στην παράγραφο αυτή το αποτέλεσμα που αφήσαμε αναπόδεικτο στην §.5.2, δηλ.

Θεώρημα: Οι ορισμοί του Riemann και του Darboux για το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ισοδύναμοι.

(*) (1) Δείξτε ότι η συνθήκη $g'(x)>0$ του θεωρήματος της σελίδας 269 μπορεί να αντικατασταθεί με την $g'(x)\neq 0$. Εξετάστε την ισοδυναμία των δύο ορισμών.

<u>Απόδειξη</u>:

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει διαμέριση $\Delta=\{\alpha=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=\beta\}$ τέτοια ώστε

$$\left|\Sigma(f,\Delta,\Xi)-\int_\alpha^\beta f\right|<\frac{\varepsilon}{4}$$

για οποιαδήποτε επιλογή Ξ συμβιβαστή με την Δ.

Αν προς στιγμήν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής τότε θα υπάρχουν επιλογές $\Xi'=\{\xi_0',\dots,\xi_{n-1}'\}$ και $\Xi''=\{\xi_0'',\dots,\xi_{n-1}''\}$ τέτοιες ώστε $m_k=f(\xi_k')$, $M_k=f(\xi_k'')$, $k=0,1,\dots,n-1$ (γιατί;), και επομένως $\overline{\Sigma}(f,\Delta)=\Sigma(f,\Delta,\Xi'')$ $\underline{\Sigma}(f,\Delta)=\Sigma(f,\Delta,\Xi')$
Από τις σχέσεις αυτές και την προηγούμενη ανισότητα έχουμε:

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta)-\underline{\Sigma}(f,\Delta)=\Sigma(f,\Delta,\Xi'')-\Sigma(f,\Delta,\Xi')=$$

$$=\Sigma(f,\Delta,\Xi'')-\int_\alpha^\beta f-\left(\Sigma(f,\Delta,\Xi')-\int_\alpha^\beta f\right)\leq$$

$$\leq\left|\Sigma(f,\Delta,\Xi'')-\int_\alpha^\beta f\right|+\left|\Sigma(f,\Delta,\Xi')-\int_\alpha^\beta f\right|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}<\varepsilon,$$

ικανοποιείται δηλ. το κριτήριο για την Darboux ολοκληρωσιμότητα.

Παρατηρούμε ακόμα ότι

$$\underline{\int_a^\beta} f \geqslant \underline{\Sigma}(f,\Delta) = \Sigma(f,\Delta,\Xi') - \int_a^\beta f + \int_a^\beta f \geqslant$$

$$\geqslant \int_a^\beta f - \left|\Sigma(f,\Delta,\Xi') - \int_a^\beta f\right| > \int_a^\beta f - \frac{\varepsilon}{4}$$

και εντελώς παρόμοια $\overline{\int_a^\beta} f < \int_a^\beta f + \frac{\varepsilon}{4}$.

Από τις δύο αυτές ανισότητες έχουμε

$$\int_a^\beta f - \frac{\varepsilon}{4} < \underline{\int_a^\beta} f \leq \overline{\int_a^\beta} f < \int_a^\beta f + \frac{\varepsilon}{4}$$

για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ και επομένως

$$\underline{\int_a^\beta} f = \overline{\int_a^\beta} f = \int_a^\beta f \ .$$

Για τη γενική περίπτωση (όταν η f δεν είναι κατ' ανάγκη συνεχής) παρατηρούμε ότι υπάρχουν επιλογές Ξ', Ξ'' "σχεδόν τόσο καλές" όσο και πριν. Πιο συγκεκριμένα υπάρχουν $\Xi' = \{\xi_0', \dots, \xi_{n-1}'\}$, $\Xi'' = \{\xi_0'', \dots, \xi_{n-1}''\}$ τέτοιες ώστε

$$m_k > f(\xi_k') - \frac{\varepsilon}{4(\beta-a)} \ , \ M_k < f(\xi_k'') + \frac{\varepsilon}{4(\beta-a)}$$

και επομένως

$$\underline{\Sigma}(f,\Delta) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k) >$$

$$> \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k')(x_{k+1}-x_k) - \frac{\varepsilon}{4(\beta-a)} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}-x_k) =$$

$$= \Sigma(f, \Delta, \Xi') - \frac{\varepsilon}{4}$$

και παρόμοια

$$\overline{\Sigma}(f,\Delta) < \Sigma(f, \Delta, \Xi'') + \frac{\varepsilon}{4}$$

Από το σημείο αυτό και μετά η απόδειξη είναι ουσιαστικά η ίδια (συμπληρώστε την).

Η άλλη κατεύθυνση, δηλ. ότι η Darboux ολοκληρωσιμότητα συνεπάγεται Riemann ολοκληρωσιμότητα είναι πιο ενδιαφέρουσα.

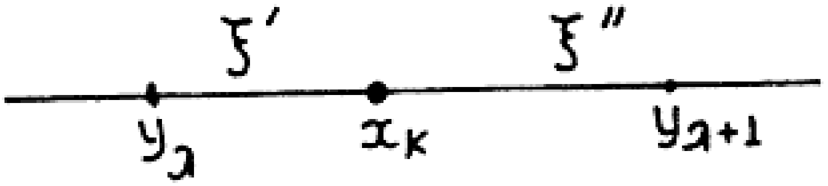
Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει τώρα μία διαμέριση Δ τέτοια ώστε $\overline{\Sigma}(f,\Delta) - \underline{\Sigma}(f,\Delta) < \frac{\varepsilon}{2}$. Πρέπει να βρούμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|\Sigma(f, \Delta', \Xi) - I| < \varepsilon$ για όλες τις διαμερίσεις Δ' με πλάτος $d(\Delta') < \delta$ και όλες τις επιλογές Ξ, όπου φυσικά παίρνουμε $I = \underline{\int_a^\beta} f = \overline{\int_a^\beta} f$.

Αν υποθέσουμε προς στιγμή ότι η Δ' είναι εκλέπτυνση της Δ (που είναι εν γένει λάθος, γιατί όποιο και να είναι το δ υπάρχουν Δ' με $d(\Delta')<\delta$ που δεν είναι εκλεπτύνσεις της Δ) τότε η συνέχεια είναι εύκολη. Πραγματικά σε μια τέτοια περίπτωση θα είχαμε:

$$\underline{\underline{\Sigma}}(f,\Delta) \leq \underline{\underline{\Sigma}}(f,\Delta') \leq \Sigma(f,\Delta',\Xi) \leq \overline{\overline{\Sigma}}(f,\Delta') \leq \overline{\overline{\Sigma}}(f,\Delta)$$

και επίσης $\underline{\underline{\Sigma}}(f,\Delta) \leq I \leq \overline{\overline{\Sigma}}(f,\Delta)$, δηλ. και οι δύο αριθμοί I και $\Sigma(f,\Delta',\Xi)$ βρίσκονται στο διάστημα $[\underline{\underline{\Sigma}}(f,\Delta),\overline{\overline{\Sigma}}(f,\Delta)]$, άρα $|\Sigma(f,\Delta',\Xi)-I| \leq \overline{\overline{\Sigma}}(f,\Delta)-\underline{\underline{\Sigma}}(f,\Delta)<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.

Θα φτάναμε στην εύκολη αυτή περίπτωση, αν π.χ. προσθέταμε στη Δ' όσα σημεία της λείπουν για να γίνει εκλέπτυνση της Δ. Τα σημεία αυτά θα είναι το πολύ n (όσα τα διαιρετικά σημεία της Δ). Ας πούμε ότι η Δ' είναι η $\{a=y_0<y_1<\cdots<y_m=\beta\}$. Κάθε φορά που



Σχ. 64

προσθέτουμε ένα διαιρετικό σημείο, έστω το x_k, $y_\lambda<x_k<y_{\lambda+1}$ (βλ. σχ. 64), το $\Sigma(f,\Delta',\Xi)$ μεταβάλλεται κατά

$$-(y_{\lambda+1}-y_\lambda)f(\xi_\lambda)+(x_k-y_\lambda)f(\xi')+(y_{\lambda+1}-x_k)f(\xi''),$$

όπου ξ', ξ'' δύο σημεία των διαστημάτων

$[y_\lambda, x_\kappa]$, $[x_\kappa, y_{\lambda+1}]$ αντίστοιχα. Η μεταβολή αυτή θα είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότερη ή ίση από

$(|y_{\lambda+1}-y_\lambda|+|x_\kappa-y_\lambda|+|y_{\lambda+1}-x_\kappa|)M \leq 3d(\Delta')M$

όπου M ένα άνω φράγμα της $|f(x)|$ στο $[\alpha,\beta]$ (θυμηθείτε ότι η f υποτίθεται φραγμένη στο $[\alpha,\beta]$, άρα και η $|f|$ είναι φραγμένη) δηλ. $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Η συνολική λοιπόν μεταβολή του $\Sigma(f,\Delta',\Xi)$ θα είναι κατ' απόλυτο τιμή το πολύ $3nMd(\Delta')$. Αν λοιπόν διαλέξουμε $\delta=\frac{\varepsilon}{2\cdot 3nM}$, τότε για κάθε διαμέριση Δ' με $d(\Delta')<\delta$ θα υπάρχει μία εκλέπτυνση Δ'' της Δ', η οποία θα είναι και εκλέπτυνση της Δ τέτοια ώστε:

$$|\Sigma(f,\Delta'',\Xi'')-\Sigma(f,\Delta',\Xi)| \leq 3d(\Delta')nM <$$

$$< 3nM\cdot\frac{\varepsilon}{2\cdot 3nM} = \frac{\varepsilon}{2}$$

όποιες και να είναι οι επιλογές Ξ', Ξ''. Για την $\Sigma(f,\Delta'',\Xi'')$ όμως δείξαμε ότι

$$|\Sigma(f,\Delta'',\Xi'')-I| < \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

Από τις δύο τελευταίες ανισότητες συνάγουμε ότι:

$$|\Sigma(f,\Delta',\Xi')-I| \leq |\Sigma(f,\Delta',\Xi')-\Sigma(f,\Delta'',\Xi'')| +$$

$$+ |\Sigma(f,\Delta'',\Xi'')-I| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

και έτσι η απόδειξη είναι πλήρης.

<u>Άσκηση</u>: Δείξτε όσο πιο πολλές ιδιότητες του ολοκληρώματος μπορείτε, βασιζόμενοι στον ορισμό του Riemann.

7.8 <u>Ομοιόμορφη συνέχεια</u>

Στην § 5.2.2 αναφέραμε χωρίς απόδειξη το εξής:

<u>Θεώρημα</u>: "Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ'ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής σ' αυτό."

Το θεώρημα αυτό ήταν το κλειδί στην απόδειξη της Riemann ολοκληρωσιμότητας των συνεχών συναρτήσεων.

<u>Απόδειξη</u>. Υπενθυμίζουμε κατ' αρχήν ότι η f λέγεται ομοιόμορφα συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρ-

χει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για όλα τα x,y που ανήκουν στο $[\alpha,\beta]$ να ισχύει:

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Ας υποθέσουμε λοιπόν, για να φτάσουμε σε άτοπο, ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Θα υπάρχει τότε $\varepsilon>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta>0$ να υπάρχουν $x,y\in[\alpha,\beta]$ με την ιδιότητα: $|x-y|<\delta$ και $|f(x)-f(y)|\geqslant\varepsilon$. Διαλέγουμε διαδοχικά για δ τους αριθμούς $\frac{1}{\kappa}$, $\kappa=1,2,\ldots$, οπότε βρίσκουμε $x_\kappa, y_\kappa\in[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε:

$$|x_\kappa-y_\kappa|<\frac{1}{\kappa} \text{ και } |f(x_\kappa)-f(y_\kappa)|\geqslant\varepsilon,\ \kappa=1,2,\ldots$$

Η ακολουθία $\{x_\kappa\}$ είναι φραγμένη, άρα υπάρχει υπακολουθία της, έστω η $\{x_{\kappa_n}\}$, η οποία συγκλίνει. Το όριό της x θα είναι αναγκαστικά σημείο του $[\alpha,\beta]$. Τονίζουμε ότι στο σημείο αυτό χρησιμοποιείται ουσιαστικά η υπόθεση ότι το πεδίο ορισμού είναι κλειστό διάστημα (γιατί;). Η ακολουθία $\{y_{\kappa_n}\}$ είναι μια υπακολουθία της $\{y_n\}$ η οποία είναι φραγμένη. Υπάρχει επομένως υπακολουθία της, έστω η $\{y_{k_{n_\rho}}\}$ η οποία συγκλίνει σε ένα σημείο $y\in[\alpha,\beta]$. Η $\{x_{k_{n_\rho}}\}$, σαν υπακολουθία της x_{k_n}, θα συγκλίνει επίσης στο x. Για να αποφύγουμε τους πολλούς δείκτες, γράφουμε $\bar{x}_\rho = x_{k_{n_\rho}}$, $\bar{y}_\rho = y_{k_{n_\rho}}$, $\rho = 1,2,\ldots$ και έχουμε:

$$|\bar{x}_\rho - \bar{y}_\rho| < \frac{1}{k_{n_\rho}} < \frac{1}{\rho} \quad (\text{γιατί;}) \quad \text{και}$$

$$|f(\bar{x}_\rho) - f(\bar{y}_\rho)| \geqslant \varepsilon \;, \quad \rho\in\mathbb{N}.$$

Η πρώτη ανισότητα δείχνει ότι $x = \lim \bar{x}_\rho = \lim \bar{y}_\rho = y$. Η συνέχεια της f στα σημεία x, y συνεπάγεται ότι $f(\bar{x}_\rho)\to f(x)$ και $f(\bar{y}_\rho)\to f(y) = f(x)$. Συνάγουμε λοιπόν ότι $|f(\bar{x}_\rho) - f(\bar{y}_\rho)| \to |f(x) - f(y)| = 0$, που προφανώς αντιφάσκει με τις ανισότητες $|f(\bar{x}_\rho)-f(\bar{y}_\rho)|\geqslant\varepsilon$ και $\varepsilon > 0$.

<u>Σχόλια και ασκήσεις</u>

α) Αν σκεφτούμε λίγο την απόδειξη θα δούμε ότι η υπόθεση ότι το πεδίο ορισμού είναι ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ χρησιμοποιήθηκε με δύο τρόπους:

i) Το $[α,β]$ είναι φραγμένο σύνολο (για να υπάρχουν υπακολουθίες που συγκλίνουν) και ii) Το όριο οποιασδήποτε συγκλίνουσας ακολουθίας σημείων του $[α,β]$ ανήκει στο $[α,β]$. Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι τα σημεία συσσώρευσης του $[α,β]$ ανήκουν στο $[α,β]$ (γιατί;). Υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που ικανοποιούν την ii) υπάρχουν και άλλα εκτός από κλειστά διαστήματα (π.χ. το ίδιο το $\mathbb{R}$, το σύνολο $[0,1] \cup [5,6]$, το σύνολο $[3,\infty)$, ...). Τα σύνολα αυτά λέγονται κ λ ε ι σ τ ά και τα κλειστά σύνολα που είναι επίσης φραγμένα λέγονται σ υ μ π α γ ή. Η τελευταία αυτή έννοια γενικεύεται με πολλούς τρόπους και είναι πολύ χρήσιμη στα Μαθηματικά. Το θεώρημα λοιπόν που δείξαμε μπορεί να γενικευτεί και ως εξής:

Κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής σ' αυτό.

β) Για να βεβαιωθούμε ότι η υπόθεση της "συμπαγείας" δεν μπορεί να παραληφθεί προτείνουμε τα παραδείγματα:

i) $f(x) = \frac{1}{x}$, $0 < x \leqq 1$. Το $(0,1]$ δεν είναι κλειστό, διότι το 0 είναι σημείο συσσώρευσής του αλλά δεν ανήκει σ' αυτό. Έστω $\varepsilon > 0$. Παρατηρώντας ότι $\frac{1}{x} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2x} > \frac{1}{\varepsilon}$ για όλα τα $x \in (0,1]$ με $|x| = |2x - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, δείξτε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

ii) $f(x) = x^2$, $-\infty < x < \infty$. Το $(-\infty, \infty)$ προφανώς δεν είναι φραγμένο.

γ) Αν η f είναι συνεχής στο $A \subset \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$, τότε για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\delta = \delta(x) > 0$ τέτοιο ώστε

$$|y - x| < \delta(x) \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon .$$

Γράψαμε $\delta = \delta(x)$, γιατί εν γένει το δ εξαρτάται από το x. Ο ορισμός της ομοιόμορφης συνέχειας δεν σημαίνει τίποτε άλλο παρά ότι μπορούμε να επιλέξουμε το δ ανεξάρτητο του x, δηλ., για δεδομένο $\varepsilon > 0$, το ίδιο δ για όλα τα $x \in A$. Δείξτε ότι αυτό ισοδυναμεί με τη συνθήκη: "Για κάθε $\varepsilon > 0$ $\inf\{\delta_0(x) : x \in A\} > 0$, όπου $\delta_0(x) = \sup\{\delta > 0 : |y-x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon\}$".

δ) Φυσικά υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις με μη συμπαγή πεδία ορισμού οι οποίες είναι ομοιόμορφα συνεχείς. Δώστε παραδείγματα με πεδία ορισμού: $\mathbb{R}$, $(-1,1)$, $[0,\infty)$.

7.9 Ο τύπος του Taylor.

Υπάρχει μια πολύ απλή σχέση μεταξύ των συντελεστών $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ενός πολυωνύμου $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ και των παραγώγων της f στο 0.

Ας παρατηρήσουμε κατ' αρχήν ότι για οποιοδήποτε $\kappa \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$(x^\kappa)^{(\lambda)} = \begin{cases} \kappa(\kappa-1)\cdots(\kappa-\lambda+1)x^{\kappa-\lambda} & \text{αν } \lambda \leqq \kappa \\ 0 & \text{αν } \lambda > \kappa \end{cases}$$

και επομένως οι παράγωγοι στη θέση 0 της συνάρτησης $f(x) = x^\kappa$ δίδονται από τη σχέση:

$$f^{(\lambda)}(0) = \begin{cases} \kappa! & \text{αν } \lambda = \kappa \\ 0 & \text{αν } \lambda \neq \kappa \end{cases}$$

Για το πολυώνυμο $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_\eta x^\eta$ θα έχουμε επομένως

$$f^{(\kappa)}(0)=\begin{cases}\kappa!\,a_\kappa & 0\leq\kappa\leq\eta\\ 0 & \kappa>\eta\end{cases},$$

όπου για λόγους ομοιομορφίας γράψαμε $0!=1$ και $f^{(0)}(x)=f(x)$, δηλ. θεωρήσαμε την $f(x)$ σαν "παράγωγο τάξης 0" του εαυτού της.

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε για το πολυώνυμο $f(x)$ ότι:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(\eta)}(0)}{\eta!}x^\eta=\sum_{\kappa=0}^{\eta}\frac{f^{(\kappa)}(0)}{\kappa!}x^\kappa.$$

Ο τύπος αυτός λέγεται τύπος του Maclaurin (Σκωτσέζος μαθηματικός του 18ου αιώνα) για την f.

Δεν υπάρχει τίποτα το ιδιαίτερο για την τιμή $x=0$. Αν γράψουμε $g(x)=f(x+x_0)$ $=a_0+a_1(x+x_0)+\cdots+a_\eta(x+x_0)^\eta$ τότε η g είναι επίσης ένα πολυώνυμο ιδίου βαθμού με το f και ο τύπος του Maclaurin για την g γίνεται:

$$g(t)=g(0)+\frac{g'(0)}{1!}t+\cdots+\frac{g^{(\eta)}(0)}{\eta!}t^\eta,\ \text{δηλ.}$$

$$f(t+x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}t + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}t^n$$

ή (γράφοντας $x = t + x_0$)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =$$

$$= \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{f^{\kappa}(x_0)}{\kappa!}(x-x_0)^{\kappa}.$$

Ο τελευταίος τύπος είναι γνωστός σαν τύπος του Taylor (Εγγλέζος μαθηματικός του 18ου αιώνα) για την f. Φυσικά ο τύπος του Maclaurin είναι η ειδική περίπτωση $x_0 = 0$ του τύπου του Taylor.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια συνάρτηση f για την οποία υποθέτουμε ότι είναι ορισμένη σε μια περιοχή (x_0-a, x_0+a), $a>0$, ενός σημείου x_0 και ότι έχει παραγώγους κάθε τάξης στο διάστημα αυτό. Δέν μπορούμε να περιμένουμε ότι θα ισχύει γενικά ο τύπος του Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Πραγματικά το β' μέλος είναι πολυώνυμο ενώ το πρώτο μπορεί να μην είναι. Η συνάρτηση $f(x)=e^x$ π.χ. έχει παραγώγους κάθε τάξης αλλά δεν είναι πολυώνυμο. Όσο οφθαλμοφανής και να φαίνεται αυτός ο ισχυρισμός χρειάζεται απόδειξη. (Αν υποθέσουμε π.χ. ότι η e^x είναι πολυώνυμο βαθμού n, τότε θα πρέπει η $n+1$ τάξης παράγωγός της να είναι ταυτοτικά 0, το οποίο είναι φυσικά άτοπο).

Αντί να εγκαταλείψουμε την προσπάθεια να γενικεύσουμε τον τύπο του Taylor για πολυώνυμα με αυτό τον τρόπο, γινόμαστε λιγότερο απαιτητικοί και εξετάζουμε μήπως το πολυώνυμο

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

"προσεγγίζει", τουλάχιστον για μικρά $|x-x_0|$, την $f(x)$, δηλ. ψάχνουμε για "καλά" άνω φράγματα της παράστασης $|R_n(x)|$, όπου $R_n(x)$ το λεγόμενο υπόλοιπο, δηλαδή η παράσταση :

$$R_n(x) = f(x) - \left\{ f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right\}.$$

Αυτό είναι πραγματικά δυνατό όπως δείχνει το επόμενο θεώρημα.

<u>Θεώρημα</u>: Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε μια περιοχή του x_0 και έχει παράγωγο τάξης n συνεχή στο κλειστό διάστημα $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, $\delta>0$, και υπάρχει η παράγωγος τάξης $n+1$ στο $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, τότε υπάρχει αριθμός ξ, $\gamma=\xi(x)$, $x_0-\delta<\xi<x_0+\delta$, τέτοιος ώστε

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

με

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Με άλλα λόγια, με τις προϋποθέσεις που αναφέραμε, ισχύει ο τύπος του Taylor με υπόλοιπο $R_n(x)$ που έχει τη λεγόμενη μορφή του Lagrange: $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη ας

κάνουμε δύο απλές παρατηρήσεις:

α) Για $\eta=0$ ο τύπος του Taylor παίρνει τη μορφή $f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$, δηλ. ανάγεται στο γνωστό μας θεώρημα της μέσης τιμής.

β) Αν υποθέσουμε επί πλέον ότι η $f^{(n+1)}(x)$ είναι φραγμένη στο $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $|f^{n+1}(x)| \leqq M$, τότε θα έχουμε

$$|R_\eta(x)| \leqq \frac{M}{(n+1)!}\,|x-x_0|^{\eta+1} \quad \text{ή}$$

$$R_\eta(x) = O\left((x-x_0)^{\eta+1}\right), \quad x \to x_0 .$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι για μεγάλα η η προσέγγιση της $f(x)$ με το πολυώνυμο

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

είναι πολύ καλή για x "κοντά στο x_0".

γ) Το υπόλοιπο $R_\eta(x)$ μπορεί να εκφραστεί και με άλλους τρόπους, π.χ. να πάρει τη λεγόμενη ολοκληρωτική μορφή

$$R_\eta(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^\eta}{\eta!}\, f^{(n+1)}(t)\,dt$$

<u>Άσκηση</u>: Δείξτε τον τελευταίο τύπο. (<u>υπόδειξη</u>: ολοκληρώστε κατά μέρη η φο-

ρές).

Απόδειξη θεωρήματος.

Το υπόλοιπο $R_n(x)$ δίνεται εξ' ορισμού από τον τύπο:

$$R_n(x) = f(x) - \left\{ f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right\}$$

Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $x_0 < x$. Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση

$$q(t) = f(t) - \left\{ f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(t-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(t-x_0)^n + \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}(t-x_0)^{n+1} \right.$$

$$= R_n(t) - \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}(t-x_0)^{n+1}, \quad x_0 \leq t < x.$$

Από τον ορισμό του R_n βλέπουμε εύκολα ότι $R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$ (με άλλα λόγια: το πολυώνυμο $f(x) - R_n(x)$ και οι n πρώτες παράγωγοί του συμπίπτουν στο x_0 με την f και τις n πρώτες παραγώγους της αντίστοιχα). Θα έχουμε λοιπόν μετά από μερικές απλές πράξεις:

$$q(x) = q(x_0) = q'(x_0) = \cdots = q^{(n)}(x_0) = 0 \quad \text{και}$$

$$q^{(n+1)}(t) = R_n^{(n+1)}(t) - (n+1)!\,\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} =$$

$$= f^{(n+1)}(t) - (n+1)!\,\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$$

(πώς προκύπτει η τελευταία ισότητα;)

Το πρόβλημά μας τώρα είναι να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x_0, x)$ τέτοιο ώστε $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ δηλ. $q^{(n+1)}(\xi)=0$.

Αυτό προκύπτει εύκολα με διαδοχικές εφαρμογές του θεωρήματος του Rolle (ελέγξτε ότι ισχύουν οι απαιτούμενες προϋποθέσεις):

Από την $q(x) = q(x_0) = 0$ έπεται ότι υπάρχει $\xi_1 \in (x_0, x)$ τέτοιο ώστε $q'(\xi_1) = 0$, από την $q'(x_0) = q'(\xi_1) = 0$ έπεται ότι υπάρχει $\xi_2 \in (x_0, \xi_1) \subset (x_0, x)$ τέτοιο ώστε $q''(\xi_2) = 0$ κ.ο.κ. Τελικά λοιπόν βρίσκουμε ένα $\xi = \xi_{n+1} \in (x_0, x)$ τέτοιο ώστε $q^{(n+1)}(\xi) = 0$, που είναι ακριβώς αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

<u>Παραδείγματα</u>: α) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

Προφανώς $f^{(\kappa)}(0) = e^0 = 1$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$, άρα

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \quad x \in \mathbb{R}, \text{ όπου}$$

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1} \text{ για κάποιο } \xi \text{ μεταξύ } 0 \text{ και } x.$$

Ας ευτιμήσουμε το υπόλοιπο $R_\eta(x)$.

Έχουμε: $|R_\eta(x)| \leq e^{|x|} \dfrac{|x|^{\eta+1}}{(\eta+1)!}$.

Αν για παράδειγμα $x=1, \eta=5$ τότε

$|R_\eta(1)| \leq \dfrac{e}{(\eta+1)!} < \dfrac{3}{6!} = \dfrac{3}{720} = \dfrac{1}{240}$, δηλ. το ά-

θροισμα $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120} = \frac{326}{120} = 2{,}716$

προσεγγίζει το e με σφάλμα μικρότερο από 0,01.

Δέν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, $R_\eta(x) \to 0$, $\eta \to \infty$, δηλαδή $\lim\limits_{\eta\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{1!}+\cdots+\dfrac{x^\eta}{\eta!}\right) = e^x$. Πραγματικά, ας γράψουμε $\eta_0 = 2[|x|]+2$ και ας υποθέσουμε $\eta > \eta_0$. Θα έχουμε:

$$\frac{|x|^{\eta+1}}{(\eta+1)!} \leq \frac{|x|^{\eta_0}}{\eta_0!}\left(\frac{|x|}{2|x|}\right)^{\eta-\eta_0} = \left(\frac{2^{\eta_0}}{\eta_0!}|x|^{\eta_0}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^\eta$$

και το δεξιά μέλος τείνει στο 0 για $\eta\to\infty$.

Φτάσαμε λοιπόν στο σημαντικό τύπο

$$e^x = \lim_{\eta\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^\eta}{\eta!}\right)$$

τον οποίο γράφουμε συνήθως με τη μορφή

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^\eta}{\eta!}+\cdots \quad \left(\text{ή } e^x = \sum_{\eta=0}^{\infty}\frac{x^\eta}{\eta!}\right)$$

και ονομάζουμε το δεξιά μέλος "σειρά Maclaurin" της συνάρτησης e^x.

β) "Ζητείται ο υπολογισμός με προσέγγιση $\frac{1}{100}$ του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 \frac{e^x-1}{x}\,dx".$$

Είναι μάταιο να προσπαθήσουμε να βρούμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $\frac{e^x-1}{x}$ με τη βοήθεια στοιχειωδών συναρτήσεων (αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει τέτοιος τύπος). Χρησιμοποιώντας όμως τον τύπο του Taylor έχουμε:

$$\frac{e^x-1}{x} = \frac{1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)-1}{x} =$$

$$= 1+\frac{x}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\frac{R_n(x)}{x} \quad , \quad \text{οπότε}$$

$$\int_0^1 \frac{e^x-1}{x} = \int_0^1 1\,dx+\frac{1}{2!}\int_0^1 x\,dx+\cdots+\frac{1}{n!}\int_0^1 x^{n-1}dx+\int_0^1\frac{R_n(x)}{x}dx$$

$$= 1+\frac{1}{2!\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n!\cdot n}+\int_0^1\frac{R_n(x)}{x}\,dx .$$

Αρκεί λοιπόν να διαλέξουμε το n έτσι

ώστε το $\int_0^1 \frac{R_\eta(x)}{x}dx$ να είναι μικρότερο του $\frac{1}{100}$. Έχουμε δείξει ότι $|R_\eta(x)| \leq \frac{e^{|x|}|x|^{\eta+1}}{(\eta+1)!} \leq \frac{e}{(\eta+1)!}x^{\eta+1}$, άρα $\int_0^1 \frac{R_\eta(x)}{x} \leq$

$$\leq \frac{e}{(\eta+1)!}\int_0^1 x^\eta dx = \frac{e}{(\eta+1)!(\eta+1)} \leq \frac{3}{(\eta+1)!(\eta+1)}.$$

Αρκεί λοιπόν να πάρουμε $\eta = 4 \left(\frac{3}{5!5} = \frac{3}{5\cdot 120} < \frac{1}{100}\right)$, οπότε με προσέγγιση καλύτερη από $\frac{1}{100}$ θα έχουμε $\int_0^1 \frac{e^x-1}{x}dx \simeq 1 + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{6\cdot 3} + \frac{1}{24\cdot 4}$.

<u>Άσκηση</u>: α) Βρείτε τον τύπο του Taylor για τις συναρτήσεις $\sin x$ και $\cos x$, $x\in\mathbb{R}$, και δείξτε ότι το υπόλοιπο τείνει στο 0 για όλα τα x. β) Υπολογείστε με προσέγγιση $\frac{1}{100}$ το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}dt$.

<u>Παρατήρηση</u>: Ο όρος σειρά που χρησιμοποιήσαμε στο α′ παράδειγμα ορίζεται ως εξής: Αν a_η είναι μια ακολουθία, τότε η ακολουθία β_η με $\beta_\eta = a_1 + \cdots + a_\eta$ λέγεται σειρά και συμβολίζεται με

$a_1+a_2+\cdots+a_\eta+\cdots$ ή $\sum_{\eta=1}^{\infty} a_\eta$. Τα β_η λέγονται μερικά αθροίσματα της σειράς. Αν η β_η συγκλίνει στον αριθμό β τότε λέμε ότι η σειρά συγκλίνει, ή έχει άθροισμα τον αριθμό β. Η θεωρία των σειρών είναι ένα από τα σημαντικότερα κεφάλαια του Απειροστικού Λογισμού, και θα μελετηθεί με λεπτομέρεια σε επόμενα μαθήματα.—

Σ.Κ. ΠΗΧΩΡΙΔΗΣ
ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
(Πρόχειρες σημειώσεις)
Φωτογράφιση - Μοντάζ: Π. Νικολούδης - Ε. Καλλέργης
Εκτύπωση: Μ. Χονδρορρίζου & Σία Ο.Ε.
Εκτύπωση εξωφύλλου: Β. Π. Αβραμοπούλου Ο.Ε.
Βιβλιοδεσία: Ι. Δελή
Φλεβάρης 1996
ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΕΠΟΧΗ ΕΚΔΟΤΙΚΗ ΑΕΒΕ