Σημειώσεις Μιγαδικής Ανάλυσης

Τμημα Μαθηματικων
Πανεπιστημιο Κρητης

Ηρακλειο

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγικά

1. Η αλγεβρική δομή του $\mathbb{C}$

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των **μιγαδικών αριθμών** (ή **μιγαδικό επίπεδο**) είναι το σύνολο $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με μια πράξη πρόσθεσης $(+)$ και μια πράξη πολλαπλασιασμού $(\cdot)$ οι οποίες ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
&\forall z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C},\ z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C},\\
&z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\\
&z_1 \cdot z_2 = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)
\end{aligned}$$

Κατά παράδοση, θέτουμε $i = (0, 1)$ και ονομάζουμε το i **φανταστική μονάδα**. Από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού, έχουμε $i^2 = (-1, 0)$.

Με τις πράξεις αυτές, το $\mathbb{C}$ είναι σώμα. Το ουδέτερο ως προς την πρόσθεση είναι το $(0, 0)$ και το αντίθετο του (x, y) είναι το $(-x, -y)$. Το ουδέτερο ως προς τον πολλαπλασιασμό είναι το $(1, 0)$ και το αντίστροφο του $(x, y) \neq (0, 0)$ είναι το

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Εύκολα μπορεί να δείξει κανείς ότι το $\mathbb{C}$ δεν είναι διατεταγμένο σώμα.

Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση $I : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με $I(x) = (x, 0)$. Τότε η I είναι 1-1 και διατηρεί τη δομή σώματος, δηλαδή $I(x + y) = I(x) + I(y)$ και $I(xy) = I(x)I(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Επομένως, ταυτίζοντας το $\mathbb{R}$ με την εικόνα του μέσω της I, δηλαδή με το σύνολο $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, μπορούμε να θεωρούμε το $\mathbb{R}$ σαν υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και να γράφουμε, καταχρηστικά, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Μέσω αυτής της ταύτισης, και χρησιμοποιώντας την ισότητα

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = (x, 0) + i(y, 0) = I(x) + iI(y),$$

μπορούμε να γράφουμε, επίσης καταχρηστικά, $(x, y) = x + iy$. Με το συμβολισμό αυτό έχουμε $i^2 = -1$, και επομένως το i είναι μια «λύση» της εξίσωσης $x^2 + 1 = 0$.

Υπενθυμίζουμε τώρα κάποιες βασικές έννοιες οι οποίες πρέπει να είναι ήδη γνωστές από κάποιο άλλο μάθημα.

$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ θέτουμε:

- $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$ (**πραγματικό** και **φανταστικό μέρος** του z).
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (**απόλυτη τιμή** ή **μέτρο** του z).
- $\overline{z} = x - iy$ (**συζυγής** του z).
- Από την αναπαράσταση κάθε σημείου στο επίπεδο σε πολικές συντεταγμένες παίρνουμε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ υπάρχει ένας μοναδικός αριθμός $\theta \in (-\pi, \pi]$ τέτοιος ώστε $z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται **όρισμα** του z και συμβολίζεται με $\arg z$.

Οι βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής και του συζυγούς είναι οι ακόλουθες:

- $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.
- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$.
- $|zw| = |z||w|$.
- $|z/w| = |z|/|w|$, για $w \neq 0$.
- $|\overline{z}| = |z|$.
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ (τριγωνική ανισότητα).

2. Η τοπολογική δομή του $\mathbb{C}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\rho : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ με $\rho(z, w) = |z - w|$. Τότε η ρ ορίζει μια μετρική στο $\mathbb{C}$. Παρατηρήστε ότι ο χώρος $(\mathbb{C}, \rho)$ ταυτίζεται με τον Ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^2, d)$, όπου d είναι η συνηθισμένη απόσταση

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Για $z \in \mathbb{C}$ και $r > 0$ θέτουμε

$$D(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\} \text{ (ο } \textbf{ανοιχτός δίσκος} \text{ με κέντρο } z \text{ και ακτίνα } r),$$

$$\overline{D}(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| \leq r\} \text{ (ο } \textbf{κλειστός δίσκος} \text{ με κέντρο } z \text{ και ακτίνα } r).$$

Επίσης, για $A \subset \mathbb{C}$ θα χρησιμοποιούμε τους κλασικούς συμβολισμούς

$$\overline{A} = \{z \in \mathbb{C} : \exists z_n \in A \text{ τέτοια ώστε } z_n \to z\} \text{ (η } \textbf{κλειστότητα} \text{ του } A),$$

$$A^\circ = \{z \in A : \exists \epsilon > 0 \text{ τέτοιο ώστε } D(z, \epsilon) \subset A\} \text{ (το } \textbf{εσωτερικό} \text{ του } A),$$

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ \text{ (το } \textbf{σύνορο} \text{ του } A),$$

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{|z - w| : z, w \in A\} \text{ (η } \textbf{διάμετρος} \text{ του } A).$$

Αν $A, B \subset \mathbb{C}$ θέτουμε

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{|z - w| : z \in A,\ w \in B\} \text{ (η } \textbf{απόσταση} \text{ των } A \text{ και } B).$$

Εφόσον $(\mathbb{C}, \rho) = (\mathbb{R}^2, d)$, η ακολουθιακή σύγκλιση στο $\mathbb{C}$ χαρακτηρίζεται ως εξής:

Έστω z_n μια ακολουθία στο $\mathbb{C}$ και $z \in \mathbb{C}$. Τότε

$$z_n \to z \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z \;\&\; \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z.$$

Χρησιμοποιώντας τον χαρακτηρισμό αυτό, αποδεικνύονται τα εξής:

- Αν $z_n \to z$, τότε $\overline{z}_n \to \overline{z}$ και $|z_n| \to |z|$.
- Αν $z_n \to z$ και $w_n \to w$, τότε $z_n + w_n \to z + w$ και $z_n w_n \to zw$.
- Αν $z_n, z \neq 0$ και $z_n \to z$, τότε $z_n^{-1} \to z^{-1}$.

Έστω $A \subset \mathbb{C}$ και $f : A \to \mathbb{C}$. Τότε υπάρχουν μοναδικές συναρτήσεις $u, v : A \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Η u ονομάζεται **πραγματικό μέρος** της f και συμβολίζεται με $\operatorname{Re} f$, και η v ονομάζεται **φανταστικό μέρος** της f και συμβολίζεται με $\operatorname{Im} f$.

Η f είναι συνεχής στο σημείο $x+iy$ αν και μόνο αν οι $\operatorname{Re} f$ και $\operatorname{Im} f$ είναι συνεχείς στο σημείο (x, y).

Μια συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ λέγεται Riemann ολοκληρώσιμη αν οι $\operatorname{Re} f$ και $\operatorname{Im} f$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες. Στην περίπτωση αυτή θέτουμε

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re} f(t)dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t)dt.$$

Εντελώς ανάλογα, η $f : I \to \mathbb{C}$, όπου I κάποιο διάστημα, λέγεται διαφορίσιμη αν οι $\operatorname{Re} f$ και $\operatorname{Im} f$ είναι διαφορίσιμες. Τότε θέτουμε

$$f'(t) = (\operatorname{Re} f)'(t) + i(\operatorname{Im} f)'(t).$$

Ορισμος 1.1. *Μια συνεχής απεικόνιση $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ονομάζεται* ***καμπύλη με αρχή το σημείο*** *$\gamma(a)$* ***και τέλος το σημείο*** *$\gamma(b)$. Αν $\gamma(a) = \gamma(b)$, τότε η γ λέγεται* ***κλειστή καμπύλη****. Αν η γ είναι μια καμπύλη, τότε η εικόνα $\gamma([a, b])$ θα συμβολίζεται με γ^*. Αν $\gamma^* \subset U$, τότε θα λέμε ότι η γ είναι μια* ***καμπύλη στο*** *U. Μια κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη ονομάζεται* ***μονοπάτι****.*

3. Το εκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο

Έστω ∞ ένα αντικείμενο με $\infty \notin \mathbb{C}$. Θέτουμε $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ και ορίζουμε την απεικόνιση

$$\widehat{\rho} : \widehat{\mathbb{C}} \times \widehat{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}_+,$$

με

$$\widehat{\rho}(z, w) = \frac{|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}},\ z, w \in \mathbb{C}$$

$$\widehat{\rho}(z, \infty) = \widehat{\rho}(\infty, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}},\ z \in \mathbb{C}$$

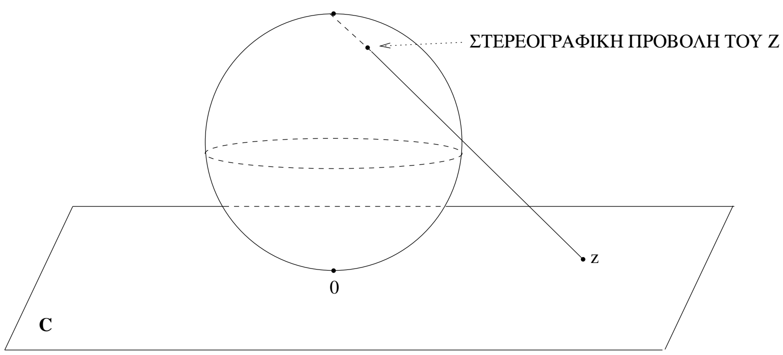
$$\widehat{\rho}(\infty, \infty) = 0.$$

Αποδεικνύεται ότι για $z, w \in \mathbb{C}$

$$\widehat{\rho}(z, w) = d((\pi_1(z), \pi_2(z), \pi_3(z)), (\pi_1(w), \pi_2(w), \pi_3(w))),$$

$$\widehat{\rho}(z, \infty) = d((\pi_1(z), \pi_2(z), \pi_3(z)), (0, 0, 1)),$$

όπου d είναι η συνηθισμένη Ευκλείδεια απόσταση στον $\mathbb{R}^3$ και για $z = x + iy$, $\pi_1(z), \pi_2(z), \pi_3(z)$ είναι οι συντεταγμένες της στερεογραφικής προβολής του σημείου $(x, y, 0)$ στην επιφάνεια της σφαίρας με κέντρο το σημείο $(0, 0, \frac{1}{2})$ και ακτίνα $\frac{1}{2}$ (Υπενθυμίζουμε ότι η στερεογραφική προβολή του $(x, y, 0)$ είναι η τομή της επιφάνειας της σφαίρας με την ευθεία που συνδέει το $(x, y, 0)$ με τον «βόρειο πόλο» $(0, 0, 1)$).



Εύκολα μπορεί κανείς να δείξει ότι:

$$\pi_1(z) = \frac{x}{1 + |z|^2},\ \pi_2(z) = \frac{y}{1 + |z|^2},\ \pi_3(z) = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}.$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις αποδεικνύεται ότι:

- Η $\widehat{\rho}$ ορίζει μια μετρική στο $\widehat{\mathbb{C}}$. Ο χώρος $(\widehat{\mathbb{C}}, \widehat{\rho})$ ονομάζεται **εκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο**.
- Αν $z_n, z \in \mathbb{C}$ τότε
$$z_n \xrightarrow{\rho} z \Leftrightarrow z_n \xrightarrow{\widehat{\rho}} z.$$
- Αν $z_n \in \mathbb{C}$ τότε
$$z_n \xrightarrow{\widehat{\rho}} \infty \Leftrightarrow |z_n| \to +\infty.$$
- Ο $(\widehat{\mathbb{C}}, \widehat{\rho})$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.

Παρατηρήστε ότι η $\widehat{\rho}$ και η ρ ορίζουν την ίδια τοπολογία στο $\mathbb{C}$. Αν $z_n \xrightarrow{\widehat{\rho}} \infty$, θα γράφουμε απλά $z_n \to \infty$.

4. Συνεκτικότητα

Ορισμος 1.2. *Ένας μετρικός χώρος (X, ρ) λέγεται* ***συνεκτικός*** *αν τα μοναδικά υποσύνολα του X τα οποία είναι ανοικτά και κλειστά είναι το $\emptyset$ και το X. Αν $A \subset X$, τότε το A λέγεται* ***συνεκτικό υποσύνολο του*** *X αν ο μετρικός χώρος (A, ρ) είναι συνεκτικός.*

Μια ισοδύναμη διατύπωση είναι η εξής:

Ο X δεν είναι συνεκτικός αν υπάρχουν μη κενά, ανοικτά και ξένα $A, B \subset X$ τέτοια ώστε $X = A \cup B$.

Παραδείγματα μη συνεκτικών χώρων είναι το $\mathbb{Z}$ και το $\mathbb{Q}$ (θεωρούμενα σαν υπόχωροι του $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική).

Προταση 1.1. *Έστω $(X, \rho), (Y, d)$ μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής. Αν το $A \subset X$ είναι συνεκτικό τότε το $f(A)$ είναι συνεκτικό.*

Αποδειξη. Έστω ότι το $f(A)$ δεν είναι συνεκτικό. Τότε υπάρχουν $U, V \subset Y$ ανοιχτά με $U \cap f(A) \neq \emptyset$, $V \cap f(A) \neq \emptyset$ και $U \cap V \cap f(A) = \emptyset$ τέτοια ώστε
$$f(A) = (f(A) \cap U) \cup (f(A) \cap V).$$
Επομένως
$$A = (A \cap f^{-1}(U)) \cup (A \cap f^{-1}(V)),$$
όπου $A \cap f^{-1}(U)$ και $A \cap f^{-1}(V)$ μη κενά, ξένα και ανοιχτά στο A. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι το A είναι συνεκτικό. □

Προταση 1.2. *Ένα υποσύνολο $A \subset \mathbb{R}$ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν είναι διάστημα.*

Αποδειξη. Θα αποδείξουμε το αντίστροφο στην ειδική περίπτωση $A = \mathbb{R}$. Η απόδειξη όταν το A είναι κάποιο άλλο διάστημα είναι ανάλογη. Προσπαθήστε να δείξετε το ευθύ σαν άσκηση. Ας υποθέσουμε ότι το $\mathbb{R}$ δεν είναι συνεκτικό. Τότε υπάρχει $G \subset \mathbb{R}$, $G \neq \mathbb{R}$ το οποίο είναι μη κενό, ανοιχτό και κλειστό. Εφόσον το G είναι ανοιχτό,
$$G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n,$$
όπου τα I_n είναι μη κενά, ξένα ανά δύο ανοιχτά διαστήματα. Έστω $I_1 = (a_1, b_1)$. Τότε $b_1 \in \mathbb{R} \setminus G$ διότι τα I_n είναι ξένα. Αλλά το $\mathbb{R} \setminus G$ είναι επίσης ανοιχτό, άρα υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $(b_1 - \epsilon, b_1 + \epsilon) \subset \mathbb{R} \setminus G$. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι $I_1 \cap (b_1 - \epsilon, b_1 + \epsilon) \neq \emptyset$. □

Πρόταση 1.3. *Ένα ανοιχτό υποσύνολο $G \subset \mathbb{C}$ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν για κάθε $z, w \in G$ υπάρχει μια καμπύλη γ στο G η οποία συνδέει τα σημεία z και w.*

Απόδειξη. Έστω ότι το G δεν είναι συνεκτικό. Τότε υπάρχουν μη κενά, ξένα και ανοιχτά $U, V \subset \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $G = U \cup V$. Επιλέγουμε $z \in U$, $w \in V$. Από υπόθεση, υπάρχει μια καμπύλη γ, με $\gamma^* \subset G$ η οποία συνδέει τα z και w. Επομένως

$$\gamma^* = (\gamma^* \cap U) \cup (\gamma^* \cap V),$$

όπου $\gamma^* \cap U$, $\gamma^* \cap V$ μη κενά, ξένα, και ανοιχτά στο γ^*. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι το γ^* είναι συνεκτικό σαν συνεχής εικόνα συνεκτικού συνόλου.

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι το G είναι συνεκτικό, επιλέγουμε τυχόν $z_0 \in G$, και θέτουμε

$$A = \{z \in G : \text{υπάρχει καμπύλη στο } G \text{ η οποία συνδέει τα σημεία } z_0 \text{ και } z\}.$$

Το A είναι προφανώς μη κενό. Θα δείξουμε ότι είναι ανοιχτό και κλειστό στο G και επομένως $G = A$ λόγω συνεκτικότητας. Έστω $z \in A$. Εφόσον $z \in G$ υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(z, \epsilon) \subset G$. Εφόσον $z \in A$ υπάρχει μια καμπύλη γ στο G η οποία συνδέει τα z_0 και z. Τώρα για κάθε $w \in D(z, \epsilon)$, το σύνολο $\gamma^* \cup [z, w]$, όπου $[z, w]$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία z και w, είναι η εικόνα μιας καμπύλης στο G που συνδέει τα z_0 και w. Επομένως $w \in A$ και άρα $D(z, \epsilon) \subset A$. Συνεπώς το A είναι ανοιχτό.

Έστω τώρα $z \in \overline{A} \cap G$. Εφόσον $z \in G$ υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(z, \epsilon) \subset G$. Αλλά $z \in \overline{A}$ σημαίνει ότι υπάρχει $w \in D(z, \epsilon) \cap A$. Από υπόθεση, υπάρχει καμπύλη γ στο G η οποία συνδέει τα z_0 και w. Και έτσι το σύνολο $\gamma^* \cup [w, z]$ είναι η εικόνα μιας καμπύλης στο G η οποία συνδέει τα z_0 και z. Άρα $z \in A$ και επομένως το A είναι κλειστό.

Το z_0 είναι τυχόν και έτσι το συμπέρασμα έπεται. □

Ορισμός 1.3. *Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου X λέγεται* ***συνεκτική συνιστώσα*** *του X αν είναι ένα μεγιστικό συνεκτικό υποσύνολο του X. Δηλαδή το A είναι συνεκτικό και κανένα συνεκτικό υποσύνολο του X δεν περιέχει γνήσια το A.*

Πρόταση 1.4. *Έστω X μετρικός χώρος, $x_0 \in X$, και $\{A_i : i \in I\}$ μια οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων του X τέτοια ώστε $x_0 \in A_i$ για κάθε $i \in I$. Τότε η ένωση*

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i$$

είναι συνεκτικό σύνολο.

Απόδειξη. Έστω G ένα μη κενό υποσύνολο του A το οποίο είναι ανοιχτό και κλειστό στο A. Τότε το $G \cap A_i$ είναι ανοιχτό και κλειστό στο A_i για κάθε $i \in I$. Επομένως, είτε $G \cap A_i = \emptyset$ είτε $G \cap A_i = A_i$. Εφόσον τώρα $G \neq \emptyset$, υπάρχει $i_0 \in I$ τέτοιο ώστε $G \cap A_{i_0} \neq \emptyset$. Άρα $G \cap A_{i_0} = A_{i_0}$. Ιδιαίτερα, $x_0 \in G$ και έτσι $x_0 \in G \cap A_i$ για κάθε $i \in I$. Συνεπώς $G \cap A_i = A_i$ για κάθε i και άρα $G = A$. □

Πρόταση 1.5. *Έστω X μετρικός χώρος. Τότε:*

(1) *Κάθε $x_0 \in X$ περιέχεται σε μια συνεκτική συνιστώσα του X.*
(2) *Διακεκριμένες συνεκτικές συνιστώσες του X είναι ανά δύο ξένες.*

Απόδειξη. (1) Θέτουμε

$$\mathcal{A} = \{A \subset X : x_0 \in A, \ A \text{ συνεκτικό}\}.$$

Η οικογένεια $\mathcal{A}$ είναι μη κενή (εφόσον $\{x_0\} \in \mathcal{A}$), και από την προηγούμενη πρόταση το σύνολο

$$C = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

είναι συνεκτικό. Από τον ορισμό του, το C είναι επίσης μεγιστικό, και άρα είναι μια συνεκτική συνιστώσα του X.

(2) Αν C_1, C_2 ήταν δύο διακεκριμένες συνεκτικές συνιστώσες με $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, τότε, από την προηγούμενη πρόταση, το σύνολο $C_1 \cup C_2$ θα ήταν συνεκτικό και θα περιείχε γνήσια τα C_1 και C_2, άτοπο.

□

Πρόταση 1.6. *Έστω $G \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό. Τότε οι συνεκτικές συνιστώσες του G είναι ανοιχτά σύνολα και αριθμήσιμες το πλήθος.*

Απόδειξη. Έστω $A \subset G$ μια συνεκτική συνιστώσα του G και $z \in A$. Εφόσον το G είναι ανοιχτό υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(z,\epsilon) \subset G$. Αλλά το σύνολο $D(z,\epsilon) \cup A$ είναι συνεκτικό. Επομένως από τη μεγιστικότητα του A, πρέπει να έχουμε $D(z,\epsilon) \cup A = A$, και άρα $D(z,\epsilon) \subset A$, δηλαδή το A είναι ανοιχτό.

Το ότι οι συνεκτικές συνιστώσες του G είναι αριθμήσιμες το πλήθος έπεται από το ότι σ'ένα διαχωρίσιμο μετρικό χώρο, κάθε οικογένεια μη κενών, ξένων ανά δύο ανοιχτών συνόλων είναι αριθμήσιμη. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Στοιχειώδης Θεωρία

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζουμε τις αναλυτικές συναρτήσεις, το ολοκλήρωμα μιας μιγαδικής συνάρτησης πάνω σ'ένα μονοπάτι του μιγαδικού επιπέδου και αναπτύσσουμε τα εργαλεία που χρειάζονται για την απόδειξη μιας στοιχειώδους έκδοσης του θεωρήματος του Cauchy. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε κάποιες εφαρμογές, καθώς επίσης και τις βασικές ιδιότητες των δυναμοσειρών.

1. Αναλυτικές συναρτήσεις

Τα βασικά αντικείμενα που θα μελετήσουμε στη μιγαδική ανάλυση είναι οι αναλυτικές συναρτήσεις:

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1. *Έστω U ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Μια συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$ λέγεται* ***αναλυτική*** *(ή* ***ολόμορφη****) στο U αν για κάθε $z \in U$ το όριο*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

υπάρχει. Η τιμή του συμβολίζεται με $f'(z)$ και ονομάζεται ***παράγωγος*** *της f στο z. Η φράση «η f είναι αναλυτική στο σημείο z_0» σημαίνει ότι υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο U τέτοιο ώστε $z_0 \in U$ και η f είναι αναλυτική στο U. Γενικότερα αν S είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{C}$, λέμε ότι η f είναι αναλυτική στο S αν υπάρχει ένα ανοιχτό $U \subset \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $S \subset \mathbb{C}$ και η f είναι αναλυτική στο U.*

Σκεφτείτε τις ομοιότητες και τις διαφορές ανάμεσα στις παραπάνω έννοιες και στην οικεία από την Πραγματική Ανάλυση έννοια της διαφορισιμότητας.

Η απόδειξη του ακόλουθου αποτελέσματος είναι εντελώς ανάλογη με την απόδειξη του αντίστοιχου αποτελέσματος από τον Απειροστικό Λογισμό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1. *Έστω $S \subset \mathbb{C}$.*

(1) *Αν η $f : S \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική, τότε η f είναι συνεχής.*
(2) *Αν οι $f, g : S \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτικές, τότε οι $f+g$, fg είναι αναλυτικές και $(f+g)' = f'+g'$, $(fg)' = f'g+fg'$.*
(3) *Αν η $f : S \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική και δεν μηδενίζεται σε κάποια περιοχή του S, τότε η $1/f$ είναι αναλυτική και $(1/f)' = -f'/f^2$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αποδεικνύουμε μόνο το (1) για να φανεί η απόλυτη αναλογία με τον Απειροστικό Λογισμό.

Έστω z_0 στην περιοχή του S στην οποία η f είναι αναλυτική. Τότε

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)-f(z_0)| = \lim_{z\to z_0} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|} \lim_{z\to z_0} |z-z_0| = f'(z_0)\cdot 0 = 0.$$

□

Θεωρημα 2.2 (Ο Κανόνας της Αλυσίδας). *Έστω $U, V \subset \mathbb{C}$ ανοιχτά και $f : U \to \mathbb{C}$, $g : V \to \mathbb{C}$ αναλυτικές. Υποθέτουμε ότι $f(U) \subset V$. Τότε η $g \circ f$ είναι αναλυτική στο U και $(g \circ f)'(z) = f'(z)g'(f(z))$ για όλα τα $z \in U$.*

Θεωρημα 2.3 (Το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης). *Έστω $U, V \subset \mathbb{C}$ ανοιχτά, $f : U \to \mathbb{C}$ συνεχής, $g : V \to \mathbb{C}$ αναλυτική. Υποθέτουμε ότι $f(U) \subset V$ και ότι $g(f(z)) = z$ για όλα τα $z \in U$. Τότε η f είναι αναλυτική στο U και*

$$f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))}, \ z \in U.$$

Σ'αυτό το σημείο, τα μοναδικά παραδείγματα αναλυτικών συναρτήσεων που μπορούμε να σκεφτούμε είναι οι ρητές συναρτήσεις, δηλαδή πηλίκα μιγαδικών πολυωνύμων. Για να ορίσουμε περισσότερες, θα χρειαστούμε το ακόλουθο αποτέλεσμα, το οποίο χαρακτηρίζει τις αναλυτικές συναρτήσεις μέσω του πραγματικού και φανταστικού τους μέρους.

Θεωρημα 2.4 (Οι συνθήκες **Cauchy-Riemann**). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f : U \to \mathbb{C}$. Θέτουμε $u = \operatorname{Re} f$ και $v = \operatorname{Im} f$. Αν η f είναι αναλυτική, τότε οι μερικές παράγωγοι*

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

υπάρχουν και ισχύει

$$f(x_0 + iy_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y},$$

για κάθε $x_0 + iy_0 \in U$. Κατά συνέπεια

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\} \text{(συνθήκες Cauchy-Riemann).}$$

Αντίστροφα, αν οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$$

υπάρχουν, είναι συνεχείς και ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann, τότε η f είναι αναλυτική.

Αποδειξη. Έστω $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$. Τότε

$$\begin{aligned} f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \lim_{\substack{h \in \mathbb{R} \\ h \to 0}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) + iv(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \lim_{h \to 0} \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} \\ &= \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Ανάλογα,

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{\substack{h\in\mathbb{R}\\ h\to 0}}\frac{f(z_0+ih)-f(z_0)}{ih}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u(x_0,y_0+h)+iv(x_0,y_0+h)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{ih}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{v(x_0,y_0+h)-v(x_0,y_0)}{h} - i\lim_{h\to 0}\frac{u(x_0,y_0+h)-u(x_0,y_0)}{h}\\
&= \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Για το αντίστροφο, έστω $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(z_0,\epsilon) \subset U$. Για κάθε $h = s+it \in D(0,\epsilon)$, θεωρούμε την ποσότητα

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}\\
&\qquad = \frac{(u(x_0+s,y_0+t)-u(x_0,y_0))+i(v(x_0+s,y_0+t)-v(x_0,y_0))}{s+it}.
\end{aligned}$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχουν s_1, t_1 με $|s_1| < |s|, |t_1| < |t|$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}
&u(x_0+s,y_0+t)-u(x_0,y_0)\\
&= [u_x(x_0+s_1,y_0+t)-u_x(x_0,y_0)]s + [u_y(x_0,y_0+t_1)-u_y(x_0,y_0)]t\\
&+ u_x(x_0,y_0)s + u_y(x_0,y_0)t\\
&= \phi(s,t) + u_x(x_0,y_0)s + u_y(x_0,y_0)t,
\end{aligned}$$

όπου

$$\lim_{s+it\to 0}\frac{\phi(s,t)}{s+it} = 0,$$

διότι u_x, u_y συνεχείς.

Ομοίως

$$v(x_0+s,y_0+t)-v(x_0,y_0) = \psi(s,t) + v_x(x_0,y_0) + v_y(x_0,y_0),$$

όπου

$$\lim_{s+it\to 0}\frac{\psi(s,t)}{s+it} = 0.$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τις συνθήκες Cauchy-Riemann, παίρνουμε

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) + \frac{\phi(s,t)+i\psi(s,t)}{s+it}.$$

Παίρνοντας το όριο καθώς $s+it \to 0$ βλέπουμε ότι η f είναι αναλυτική. $\square$

Πρόταση 2.1. *Έστω $G \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και συνεκτικό, και έστω $f : G \to \mathbb{C}$ αναλυτική, τέτοια ώστε $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in G$. Τότε η f είναι σταθερή.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $z_0 \in G$ και θέτουμε

$$A = \{z \in G : f(z) = f(z_0)\}.$$

Το A είναι προφανώς μη κενό. Θα δείξουμε ότι είναι ανοιχτό και κλειστό στο G και επομένως $A = G$.

Έστω $z = x+iy \in A$. Εφόσον $z \in G$, υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(z,\epsilon) \subset G$. Επιλέγουμε τυχόν $w \in D(z,\epsilon)$. Τότε $w = z+h$ για $h = s+it \in D(0,\epsilon)$. Από το

Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχουν s_1, s_2, t_1, t_2 με $|s_1|, |s_2| < |s|, |t_1|, |t_2| < |t|$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} &f(w) - f(z) \\ &= u_x(x+s_1, y+t)s + u_y(x, y+t_1)t + i[v_x(x+s_2, y+t)s + v_y(x, y+t_2)t] = 0, \end{aligned}$$

διότι υποθέσαμε ότι $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in G$. Επομένως $f(w) = f(z) = f(z_0)$. Άρα $w \in A$ και εφόσον το w ήταν τυχόν, $D(z, \epsilon) \subset A$. Συνεπώς το A είναι ανοιχτό.

Τέλος, το A είναι κλειστό στο G διότι η f είναι συνεχής. □

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.4, μπορούμε να κατασκευάσουμε μη τετριμμένες αναλυτικές συναρτήσεις.

- (Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση.) Για κάθε $z = x + iy \in \mathbb{C}$ θέτουμε
$$\exp(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$
Η exp είναι αναλυτική (από το Θεώρημα 2.4), $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, είναι περιοδική με περίοδο $2\pi i$ και ικανοποιεί τις σχέσεις $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$, και $(\exp)' = \exp$.
- (Οι μιγαδικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις.) Ορίζουμε τις συναρτήσεις $\sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με
$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \ \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}).$$
Οι συναρτήσεις αυτές είναι αναλυτικές διότι η exp είναι αναλυτική, και ικανοποιούν τις σχέσεις $\sin' z = \cos z$, $\cos' z = -\sin z$ και $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.
- (Ο κύριος κλάδος του μιγαδικού λογαρίθμου.) Θέτουμε $A = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $\log : A \to \mathbb{C}$ με
$$\log z = \log|z| + i \arg z.$$
Η log είναι συνεχής και $\exp(\log z) = z$. Εφόσον η exp είναι αναλυτική, από το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης έχουμε ότι και η log είναι αναλυτική. Από το ίδιο θεώρημα παίρνουμε ότι
$$\log' z = \frac{1}{z}, \ z \in A.$$
- (Η μιγαδική δύναμη.) Αν A είναι όπως παραπάνω, τότε για $a \in \mathbb{C}$, $z \in A$, θέτουμε $z^a = \exp(a \log z)$. Η z^a είναι αναλυτική στο A σαν σύνθεση αναλυτικών συναρτήσεων. Εύκολα βλέπουμε ότι
$$(z^a)' = az^{a-1}, \ z \in A.$$

2. Ολοκλήρωση σε μονοπάτια

Ορισμος 2.2. *Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ένα μονοπάτι και $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε ορίζουμε το ολοκλήρωμα της f πάνω στο γ ως εξής:*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Απο τώρα και στο εξής, όταν γράφουμε $\int_\gamma f(z)dz$, θα υποθέτουμε ότι το γ είναι ένα μονοπάτι και ότι η f είναι συνεχής στο γ^*.

Η ακόλουθη ανισότητα θα χρησιμοποιείται συχνά:

Πρόταση 2.2.

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le M_f(\gamma)l(\gamma),$$

όπου

$$M_f(\gamma) = \max\{|f(z)| : z \in \gamma^*\}$$

και

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt \text{ (το μήκος του } \gamma\text{).}$$

Απόδειξη. Άσκηση. □

Στην απόδειξη του θεωρήματος του Cauchy για ένα τρίγωνο, θα χρειαστεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_\gamma z^n dz$, όπου το γ παριστάνει το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο σημεία z_1 και z_2. Η απάντηση είναι η αναμενόμενη.

Ορισμός 2.3. *Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και έστω ότι*

$$\int_{[z_1,z_2]} f(z)dz$$

συμβολίζει το ολοκλήρωμα της f πάνω στο μονοπάτι

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C},\ \gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2.$$

Αν Γ είναι ένα πολύγωνο με διαδοχικές κορυφές $z_1, z_2, \ldots, z_n$, τότε θέτουμε

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{[z_k,z_{k+1}]} f(z)dz$$

Πρόταση 2.3. *Για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$ έχουμε*

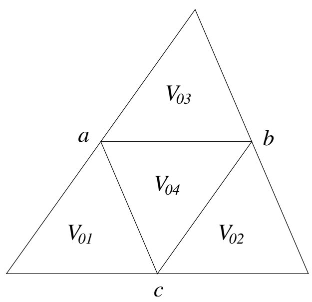
$$\int_{[z_1,z_2]} z^n dz = \frac{1}{n+1}(z_2^{n+1} - z_1^{n+1}).$$

Απόδειξη. Άσκηση. □

Θεώρημα 2.5 (**Το Θεώρημα του Cauchy για τρίγωνα**). *Έστω Γ ένα τρίγωνο τέτοιο ώστε το Γ και το εσωτερικό του περιέχονται σ'ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{C}$. Αν η f είναι αναλυτική στο U, τότε*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Απόδειξη. Χωρίζουμε το εσωτερικό του Γ όπως φαίνεται στο σχήμα (Τα a, b και c είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου).



Έστω Γ_{0j} το σύνορο του V_{0j}, $j = 1, 2, 3, 4$. Τότε

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\Gamma_{0j}} f(z)dz.$$

(Υποθέτουμε ότι έχουμε διατάξει τις κορυφές όλων των τριγώνων με φορά αντίθετη από τη φορά των δεικτών του ρολογιού.) Έστω k τέτοιο ώστε

$$\left| \int_{\Gamma_{0k}} f(z)dz \right| = \max \left\{ \left| \int_{\Gamma_{0j}} f(z)dz \right| : j = 1, 2, 3, 4 \right\}.$$

Θέτουμε $\Gamma_1 = \Gamma_{0k}$ και $V_1 = V_{0k}$. Τότε

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{\Gamma_1} f(z)dz \right|.$$

Ομοίως, χωρίζουμε το εσωτερικό του Γ_1 στα σύνολα $V_{11}, V_{12}, V_{13}, V_{14}$ και παίρνουμε

$$\left| \int_{\Gamma_1} f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{\Gamma_2} f(z)dz \right|,$$

όπου Γ_2 είναι κάποιο από τα «υποτρίγωνα» του Γ_1. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε μια φθίνουσα ακολουθία συνόλων $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \cdots$ (V_n είναι το εσωτερικό του τριγώνου Γ_n), τέτοια ώστε

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\Gamma_n} f(z)dz \right|. \tag{2.1}$$

Έστω $\overline{V}_n$ το κλειστό τριγωνικό σύνολο $V_n \cup \Gamma_n$. Τότε η $\{\overline{V}_n\}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων. Επιπλέον, αφού το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου έχει το μισό μήκος από το μήκος της απέναντι πλευράς, έχουμε

$$\text{μήκος}(\Gamma_n) = \frac{1}{2}\text{μήκος}(\Gamma_{n-1}).$$

Επομένως

$$\operatorname{diam}(\overline{V}_n) \leq \text{μήκος}(\Gamma_n) = 2^{-n}\text{μήκος}(\Gamma) \to 0.$$

Από το Θεώρημα Cantor, η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n$ περιέχει ακριβώς ένα σημείο, έστω z_0.

Εφόσον η f είναι αναλυτική στο z_0, για δοσμένο $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon \quad \text{για} \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Συνεπώς, αν ορίσουμε

$$g(z) = f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0),$$

έχουμε

$$|g(z)| \leq \epsilon |z - z_0| \quad \text{για} \quad 0 \leq |z - z_0| < \delta.$$

Τώρα, για n αρκετά μεγάλο, έχουμε

$$\overline{V}_n \subset \{z : |z - z_0| < \delta\},$$

και έτσι

$$\int_{\Gamma_n} f(z)dz = \int_{\Gamma_n} [f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)]dz + \int_{\Gamma_n} g(z)dz, \tag{2.2}$$

όπου $|g(z)| \leq \epsilon|z - z_0|$ για $z \in \Gamma_n$. Το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξιά μέλος της (2.2) είναι ίσο με μηδέν από την Πρόταση 2.3. Από την Πρόταση 2.2, το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι, σε απόλυτη τιμή, μικρότερο από ή ίσο με

$$\epsilon \max\{|z - z_0| : z \in \Gamma_n\} \text{μήκος}(\Gamma_n) \leq \epsilon[\text{μήκος}(\Gamma_n)]^2 = \epsilon 4^{-n}[\text{μήκος}(\Gamma)]^2.$$

Η (2.1) και (2.2) μας δίνουν

$$\left| \int_\Gamma f(z)dz \right| \leq \epsilon[\text{μήκος}(\Gamma)]^2.$$

Εφόσον το ϵ ήταν αυθαίρετο, έχουμε το συμπέρασμα. □

Χωρίς πολλή επιλέον προσπάθεια μπορούμε να δείξουμε ότι αν U είναι ένα ανοιχτό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και η f είναι αναλυτική στο U, τότε το ολοκλήρωμα της f πάνω σε οποιοδήποτε κλειστό μονοπάτι στο U είναι μηδέν. Πρώτα δείχνουμε ότι για κάθε ανοιχτό σύνολο U η πρόταση «$\int_\gamma f(z)dz = 0$ για κάθε κλειστό μονοπάτι γ στο U» είναι ισοδύναμη με την πρόταση «η f έχει παράγουσα στο U».

Ορισμος 2.4. *Έστω U ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $f : U \to \mathbb{C}$. Μια (αναλυτική) συνάρτηση $F : U \to \mathbb{C}$ λέγεται **παράγουσα** της f αν $F' = f$ στο U.*

Προταση 2.4. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f : U \to \mathbb{C}$ συνεχής. Τότε η f έχει παράγουσα στο U αν και μόνο αν $\int_\gamma f(z)dz = 0$ για κάθε κλειστό μονοπάτι γ στο U.*

Αποδειξη. Αν $F' = f$ στο U, τότε για οποιοδήποτε κλειστό μονοπάτι $\gamma : [a, b] \to U$, το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού μας δίνει

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = [F(\gamma(t))]_a^b = 0.$$

Αντίστροφα, έστω ότι $\int_\gamma f(z)dz = 0$ για κάθε κλειστό μονοπάτι γ στο U. Αρχικά υποθέτουμε ότι το U είναι συνεκτικό. Σταθεροποιούμε ένα σημείο $z_0 \in U$ και ορίζουμε

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)dw, \ z \in U,$$

όπου γ_z οποιοδήποτε μονοπάτι συνδέει το z_0 με το z. Η συνεκτικότητα του U και η υπόθεση μας εξασφαλίζουν ότι η F είναι καλά ορισμένη (το ολοκλήρωμα εξαρτάται μόνο από τα σημεία z_0, z και όχι από το μονοπάτι που τα συνδέει). Τώρα για h αρκετά κοντά στο 0 έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} [f(w) - f(z)]dw \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \max\{|f(w) - f(z)| : w \in [z, z+h]\}|h| \to 0 \end{aligned}$$

καθώς $h \to 0$, διότι η f είναι συνεχής. Αν τώρα το U δεν είναι συνεκτικό, εφαρμόζουμε αυτό που αποδείξαμε σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του U. □

Αν το U είναι κυρτό, τότε αρκεί να πάρουμε τρίγωνα στην υπόθεση για το αντίστροφο της προηγούμενης πρότασης.

Προταση 2.5. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και κυρτό, και $f : U \to \mathbb{C}$ συνεχής. Αν $\int_\Gamma f(z)dz = 0$ για κάθε τρίγωνο Γ στο U, τότε η f έχει παράγουσα στο U, και άρα $\int_\gamma f(z)dz = 0$ για κάθε κλειστό μονοπάτι γ στο U.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $z_0 \in U$ και ορίζουμε

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(w)dw, \ z \in U.$$

(Η παραπάνω έκφραση έχει νόημα διότι $[z_0, z] \subset U$ λόγω κυρτότητας.) Υποθέτοντας ότι $\int_\Gamma f(z)dz = 0$ για κάθε τρίγωνο Γ στο U έχουμε

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f(w)dw,$$

και το επιχείρημα της προηγούμενης πρότασης μας δίνει $F' = f$ στο U. □

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το βασικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας.

Θεώρημα 2.6. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f : U \to \mathbb{C}$ συνεχής στο U και αναλυτική στο $U \setminus \{z_0\}$, όπου z_0 κάποιο σταθεροποιημένο σημείο του U. Αν Γ είναι ένα τρίγωνο τέτοιο ώστε το Γ και το εσωτερικό του περιέχονται στο U, τότε*

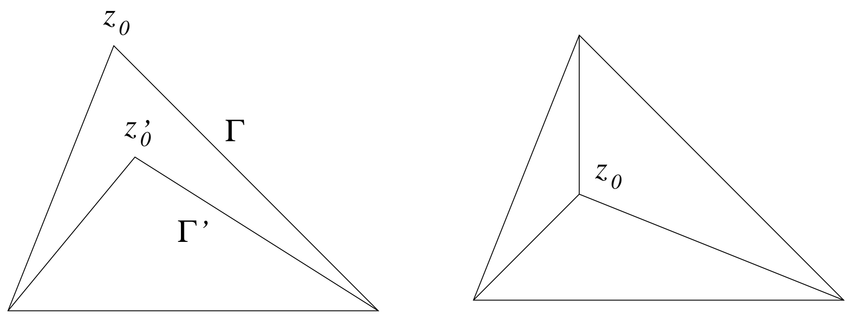
$$\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

*Έτσι, αν το U είναι κυρτό, έπεται από την Πρόταση 2.5 ότι $\int_\gamma f(z)dz = 0$ για κάθε κλειστό μονοπάτι γ στο U. Αυτό είναι το **Θεώρημα του Cauchy για κυρτά σύνολα.***

Απόδειξη. Έστω V το εσωτερικό του Γ. Αν $z_0 \notin V \cup \Gamma$, τότε $\int_\Gamma f(z)dz = 0$ από το Θεώρημα 2.5. Αν z_0 είναι μια κορυφή του Γ, τότε αντικαθιστούμε το z_0 με ένα «γειτονικό» σημείο $z_0' \in V$ όπως στο σχήμα. Έτσι $\int_{\Gamma'} f(z)dz = 0$ πάλι από το Θεώρημα 2.5. Αλλά

$$\int_{\Gamma'} f(z)dz \to \int_\Gamma f(z)dz$$

καθώς $z_0' \to z_0$ διότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $V \cup \Gamma$. Τέλος, αν $z_0 \in V$ ή $z_0 \in \Gamma$ αλλά το z_0 δεν είναι κορυφή του Γ, τότε σπάμε το Γ σε τρία «υποτρίγωνα» έτσι ώστε το καθένα να έχει το z_0 κορυφή και το συμπέρασμα έπεται από την προηγούμενη περίπτωση. □



Θα δείξουμε αργότερα ότι αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο U και αναλυτική στο $U \setminus \{z_0\}$ τότε είναι κατ'ανάγκη αναλυτική στο U.

3. Δυναμοσειρές

Το βασικό αποτέλεσμα που θα δείξουμε στην ενότητα αυτή είναι ότι μια συνάρτηση είναι αναλυτική σ'ένα σημείο z_0 αν και μόνο αν μπορεί να αναπαρασταθεί σαν συγκλίνουσα δυναμοσειρά σε μια περιοχή του z_0.

Ορισμος 2.5. *Μια **δυναμοσειρά** είναι ένα (τυπικό) άθροισμα της μορφής*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

*όπου a_n μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών και z_0 κάποιο σταθεροποιημένο σημείο. Το z το θεωρούμε σα μεταβλητή. Η δυναμοσειρά λέγεται **συγκλίνουσα** στο σημείο z αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\sum_{k=0}^{n} a_k(z-z_0)^k$ συγκλίνει σε κάποιον μιγαδικό αριθμό καθώς $n \to \infty$.*

*Η δυναμοσειρά λέγεται **απολύτως συγκλίνουσα** στο z αν και μόνο αν*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z-z_0)^n| < \infty.$$

*Η δυναμοσειρά λέγεται **ομοιόμορφα συγκλίνουσα** σ'ένα σύνολο S αν και μόνο αν υπάρχει μια συνάρτηση $f : S \to \mathbb{C}$ με την ιδιότητα:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0 \,\&\, \forall z \in S) \text{ ισχύει } \left| \sum_{k=0}^{n} a_k(z-z_0)^k - f(z) \right| < \epsilon.$$

(Αν δηλαδή η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $f_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k(z-z_0)^k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση f στο σύνολο S.)

Το ακόλουθο αποτέλεσμα μας λέει ότι το σύνολο των σημείων στα οποία μια δυναμοσειρά συγκλίνει είναι ένας δίσκος μαζί, ενδεχομένως, με ένα κομμάτι του συνόρου του.

Προταση 2.6. *Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει για κάποιο $z \neq z_0$. Θέτουμε $r = |z-z_0|$. Τότε η σειρά συγκλίνει απόλυτα στον ανοιχτό δίσκο $D(z_0, r)$ και ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $D(z_0, r)$.*

Αποδειξη. Εφόσον η σειρά συγκλίνει, η ακολουθία $(a_n(z-z_0)^n)$ είναι μηδενική άρα φραγμένη, δηλαδή $|a_n(z-z_0)^n| \leq M$ για κάποιο $M > 0$. Αν τώρα $w \in D(z_0, r)$ τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(w-z_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z-z_0)^n| \left| \frac{w-z_0}{z-z_0} \right|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|w-z_0|}{r} \right)^n < \infty,$$

διότι $|w-z_0| < r$. Έστω τώρα $K \subset D(z_0, r)$ συμπαγές. Τότε υπάρχει r_1 με $0 < r_1 < r$ τέτοιο ώστε $K \subset D(z_0, r_1)$. Επομένως για κάθε $w \in K$ έχουμε

$$|a_n(w-z_0)^n| = |a_n(z-z_0)^n| \left| \frac{w-z_0}{z-z_0} \right|^n \leq M \left(\frac{r_1}{r} \right)^n.$$

Εφόσον $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{r_1}{r})^n < \infty$, το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο του Weierstraß. □

Θα συσχετίσουμε τώρα τη σύγκλιση μιας δυναμοσειράς με τη συμπεριφορά των συντελεστών της.

Προταση 2.7. *Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ μια δυναμοσειρά. Θέτουμε*

$$r = (\limsup |a_n|^{1/n})^{-1}.$$

*Ο αριθμός αυτός ονομάζεται **ακτίνα σύγκλισης** της σειράς (κάνουμε τις συνηθισμένες συμβάσεις $\frac{1}{0} = \infty$ και $\frac{1}{\infty} = 0$). Τότε η σειρά συγκλίνει απόλυτα στον ανοιχτό δίσκο $D(z_0, r)$ και ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $D(z_0, r)$. Η σειρά αποκλίνει για $|z-z_0| > r$.*

Απόδειξη. Αν $|z - z_0| < r$, τότε

$$\limsup |a_n(z - z_0)^n|^{1/n} = \frac{|z - z_0|}{r} < 1.$$

Από το κριτήριο ρίζας η σειρά συγκλίνει απόλυτα στον $D(z_0, r)$. Η ομοιόμορφη σύγκλιση στα συμπαγή υποσύνολα του $D(z_0, r)$ έπεται από την Πρόταση 2.6. Αν τώρα η σειρά συνέκλινε σε κάποιο σημείο z με $|z - z_0| > r$, τότε θα είχαμε από την Πρόταση 2.6 ότι θα συνέκλινε απόλυτα σε όλα τα σημεία z' με $r < |z' - z_0| < |z - z_0|$. Αλλά

$$\limsup |a_n(z' - z_0)^n|^{1/n} = \frac{|z' - z_0|}{r} > 1$$

το οποίο είναι άτοπο από το κριτήριο ρίζας. □

Για να μπορέσουμε να συσχετίσουμε αναλυτικές συναρτήσεις και δυναμοσειρές, πρέπει να δείξουμε ένα πολύ σημαντικό ενδιάμεσο αποτέλεσμα: Αν η f είναι αναλυτική σ'ένα κλειστό δίσκο, τότε η τιμή της f σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο του δίσκου καθορίζεται πλήρως από τις τιμές της f πάνω στο σύνορο του δίσκου. Επιπλέον θα δώσουμε έναν τύπο ο οποίος περιγράφει ακριβώς αυτήν την εξάρτηση. Παρατηρήστε πάλι τη διαφορά με την κατάσταση που ξέρετε στην Πραγματική Ανάλυση: Μια διαφορίσιμη πραγματική συνάρτηση δεν έχει κατ'ανάγκη αυτήν την ιδιότητα.

Ορισμος 2.6. *Αν Γ είναι ο κύκλος $\{z : |z - z_0| = r\}$ τότε θέτουμε*

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})ire^{it}dt.$$

Δηλαδή

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz, \quad \textit{όπου} \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \gamma(t) = z_0 + re^{it}.$$

Θεωρημα 2.7 (**Ο Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy για κύκλους**). *Έστω V ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ το οποίο περιέχει τον κύκλο $\Gamma = \{z : |z - z_0| = r\}$ και το εσωτερικό του Γ, δηλαδή τον ανοιχτό δίσκο $U := D(z_0, r)$. Έστω $f : V \to \mathbb{C}$ μια αναλυτική συνάρτηση. Τότε για κάθε $z \in U$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Απόδειξη. Θέτουμε

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z}, & \text{αν } w \in U,\ w \neq z \\ f'(z), & \text{αν } w = z \end{cases}.$$

Τότε η g είναι συνεχής στο U και αναλυτική στο $U \setminus \{z\}$, επομένως από το Θεώρημα 2.6 έχουμε $\int_\Gamma g(w)dw = 0$ (παρατηρήστε ότι μπορούμε να βρούμε έναν ανοιχτό δίσκο D τέτοιο ώστε $\Gamma \cup U \subset D \subset V$. Εφόσον ο D είναι κυρτό σύνολο, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.6). Άρα

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{f(z)}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dw}{w - z}.$$

Τώρα

$$\int_\Gamma \frac{dw}{w - z} = \int_\Gamma \frac{dw}{(w - z_0) - (z - z_0)} = \int_\Gamma \sum_{n=0}^\infty \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} dw.$$

Εφόσον
$$\left|\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\right| = \frac{|z-z_0|^n}{r^{n+1}} \quad \text{και} \quad |z-z_0|<r,$$
έχουμε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα (κριτήριο Weierstraß) και άρα μπορούμε να εναλλάξουμε το ολοκλήρωμα με το άπειρο άθροισμα. Αλλά
$$\int_\Gamma \frac{1}{(w-z_0)^{n+1}}dw = \int_0^{2\pi} r^{-(n+1)}e^{-i(n+1)t}ire^{it}dt = \begin{cases} 0 & \text{αν } n=1,2,\dots \\ 2\pi i & \text{αν } n=0. \end{cases}$$
Συνεπώς
$$\int_\Gamma \frac{dw}{w-z} = 2\pi i.$$
□

Στην παραπάνω απόδειξη υπολογίσαμε ένα χρήσιμο ολοκλήρωμα. Απομονώνουμε αυτόν τον υπολογισμό:

Λημμα 2.1. *Αν Γ είναι ένας κύκλος, τότε*
$$\int_\Gamma \frac{dw}{w-z} = \begin{cases} 2\pi i & \textit{αν το } z \textit{ είναι στο εσωτερικό του } \Gamma \\ 0 & \textit{αν το } z \textit{ είναι στο εξωτερικό του } \Gamma. \end{cases}$$

Αποδειξη. Αν το z είναι μέσα στον κύκλο, τότε χρησιμοποιούμε το επιχείρημα της προηγούμενης απόδειξης. Αν το z βρίσκεται έξω από τον κύκλο, τότε η συνάρτηση $f(w)=(w-z)^{-1}$ είναι αναλυτική σ'έναν ανοιχτό δίσκο ο οποίος περιέχει τον Γ αλλά όχι το z. Το συμπέρασμα τώρα έπεται από το Θεώρημα 2.6. □

Μια άλλη ιδιότητα των μιγαδικών συναρτήσεων η οποία δεν έχει κάποιο ανάλογο στην Πραγματική Ανάλυση είναι ότι αν η f είναι αναλυτική σ'ένα ανοιχτό σύνολο U, τότε η f είναι απείρως παραγωγίσιμη και μάλιστα η n-τάξης παράγωγός της μπορεί να βρεθεί αν παραγωγίσουμε n φορές τον Ολοκληρωτικό Τύπο του Cauchy.

Θεωρημα 2.8 (**Ο Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy για παραγώγους**). *Έστω $V\subset\mathbb{C}$ ανοιχτό και $f:V\to\mathbb{C}$ αναλυτική. Τότε η f έχει παραγώγους όλων των τάξεων στο V. Ειδικότερα, για κάθε $z\in V$, αν U είναι ένας ανοιχτός δίσκος με περιφέρεια Γ τέτοιος ώστε $z\in U$ και $U\cup\Gamma\subset V$, τότε*
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw.$$

Αποδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο n. Κατ'αρχήν αποδεικνύουμε τον τύπο για $n=1$. Από το Θεώρημα 2.7 έχουμε
$$\begin{aligned} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} &- \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi i h}\int_\Gamma \left[\frac{f(w)}{w-z-h} - \frac{f(w)}{w-z} - \frac{hf(w)}{(w-z)^2}\right]dw \\ &= \frac{h}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2(w-z-h)}dw \to 0 \text{ καθώς } h\to 0 \end{aligned}$$
διότι η f είναι φραγμένη στον Γ και η ποσότητα $|(w-z)^2(w-z-h)|$ είναι κάτω φραγμένη από μια θετική σταθερά (αφού $w\in\Gamma$, z είναι ένα σταθεροποιημένο σημείο στο U και το h είναι αρκετά κοντά στο 0 ώστε $\overline{D}(z,|h|)\subset U$).

Τώρα υποθέτουμε ότι έχουμε αποδείξει τον τύπο για $n = k$. Τότε

$$\frac{f^{(k)}(z+h) - f^{(k)}(z)}{h} - \frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+2}}$$
$$= \frac{k!}{2\pi i h}\int_\Gamma \left[\frac{f(w)}{(w-z-h)^{k+1}} - \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} - \frac{h(k+1)f(w)}{(w-z)^{k+2}}\right] dw$$
$$= \frac{hk!}{2\pi i}\int_\Gamma f(w)G(w,z,h)dw,$$

όπου η $G(w, z, h)$ είναι ίση με

$$\frac{\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j}(w-z)^{j+1}(-h)^{k-j-1} - (k+1)\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}(w-z)^{j}(-h)^{k-j}}{(w-z-h)^{k+1}(w-z)^{k+2}}.$$

Η παραπάνω ποσότητα είναι φραγμένη, επομένως

$$\frac{hk!}{2\pi i}\int_\Gamma f(w)G(w,z,h)dw \to 0 \text{ καθώς } h \to 0.$$

Άρα ο τύπος ισχύει για $n = k + 1$. □

Πορισμα 2.1. *Αν μια συνάρτηση f έχει παράγουσα σ'ένα ανοιχτό σύνολο U, τότε η f είναι αναλυτική στο U.*

Αποδειξη. Άμεση από το Θεώρημα 2.8. □

Πορισμα 2.2. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f : U \to \mathbb{C}$ συνεχής. Αν $z_0 \in U$ και η f είναι αναλυτική στο $U \setminus \{z_0\}$, τότε η f είναι αναλυτική στο U.*

Αποδειξη. Έστω $D = D(z_0, r) \subset U$. Αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι αναλυτική στο D. Από το Θεώρημα 2.6, $\int_\gamma f(z)dz = 0$ για κάθε κλειστό μονοπάτι γ στο D και επομένως από την Πρόταση 2.4 η f έχει παράγουσα στο D. Από το Πόρισμα 2.1 η f είναι αναλυτική στο D. □

Είδαμε ότι αν η f είναι αναλυτική σ'ένα ανοιχτό και κυρτό σύνολο U, τότε το ολοκλήρωμα της f πάνω σε οποιοδήποτε κλειστό μονοπάτι στο U είναι 0. Θα δείξουμε ότι το αντίστροφο ισχύει χωρίς την υπόθεση της κυρτότητας.

Θεωρημα 2.9 (**Το Θεώρημα Morera**). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f : U \to \mathbb{C}$ συνεχής. Αν $\int_\Gamma f(z)dz = 0$ για κάθε τρίγωνο Γ στο U, τότε η f είναι αναλυτική στο U.*

Αποδειξη. Έστω D ένας δίσκος που περιέχεται στο U. Από την Πρόταση 2.5 η f έχει παράγουσα στο D. Από το Πόρισμα 2.1, η f είναι αναλυτική στο D. Αφού ο D ήταν τυχόντας, η f είναι αναλυτική στο U. □

Το επιχείρημα στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.8 δείχνει ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε αναλυτικές συναρτήσεις μέσω ολοκληρωμάτων:

Προταση 2.8. *Έστω γ ένα μονοπάτι και $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής. Για κάθε $z \in \mathbb{C}\setminus\gamma^*$ ορίζουμε*

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Τότε η g έχει παραγώγους όλων των τάξεων, και

$$g^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw.$$

Επιπλέον $g^{(n)}(z) \to 0$ καθώς $z \to \infty$ για όλα τα n.

Απόδειξη. Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.8 μπορεί να επαναληφθεί κατά λέξη. Η μοναδική φορά όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η f ήταν αναλυτική (και ότι το Γ ήταν κύκλος), ήταν για να εκφράσουμε την $f(z)$ μέσω της $f(w)$, $w \in \Gamma$, χρησιμοποιώντας τον Ολοκληρωτικό Τύπο του Cauchy. Στην παρούσα κατάσταση, αυτό είναι ήδη τμήμα της υπόθεσης.

Τέλος, το γ^* είναι ένα συμπαγές και επομένως φραγμένο σύνολο, άρα περιέχεται σε κάποιον κλειστό δίσκο $\overline{D}(0,r)$. Αν $|f| \leq M$ στο γ^*, τότε για $|z| > r$ έχουμε

$$|g^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{(|z|-r)^{n+1}} \cdot \text{μήκος}(\gamma) \to 0,$$

καθώς $z \to \infty$. $\square$

Ο Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy μας επιτρέπει να αποδείξουμε ότι μια αναλυτική συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί τοπικά σαν συγκλίνουσα δυναμοσειρά.

Πρόταση 2.9 (**Ανάπτυγμα Taylor**). *Έστω f αναλυτική στο $D(z_0, r)$. Τότε*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n, \quad z \in D(z_0, r).$$

Η σειρά συγκλίνει απόλυτα στο $D(z_0, r)$ και ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $D(z_0, r)$.

Απόδειξη. Έστω r_1 με $0 < r_1 < r$. Θέτουμε $\Gamma = \{w : |w - z_0| = r_1\}$. Από το Θεώρημα 2.7 έχουμε

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z_0} \left[\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} \right] dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \sum_{n=0}^{\infty} f(w) \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw, \end{aligned}$$

για κάθε $z \in D(z_0, r_1)$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $w \in \Gamma$ έχουμε

$$\frac{|f(w)(z-z_0)^n|}{|w-z_0|^{n+1}} \leq \frac{\max\{|f(w)| : w \in \Gamma\}}{r_1} \left(\frac{|z-z_0|}{r_1} \right)^n.$$

Επομένως, από το κριτήριο του Weierstraß, η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(w) \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα για $w \in \Gamma$ και άρα μπορούμε να εναλλάξουμε το άθροισμα και το ολοκλήρωμα. Συνεπώς

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

από το Θεώρημα 2.8. Εφόσον το r_1 ήταν αυθαίρετο, έχουμε σύγκλιση για κάθε $z \in D(z_0, r)$. Η απόλυτη και η ομοιόμορφη σύγκλιση έπονται από την Πρόταση 2.6. $\square$

Τυπικά παραδείγματα αναπτυγμάτων Taylor είναι τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned}
e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \ z \in \mathbb{C} \\
\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \ z \in \mathbb{C} \\
\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \ z \in \mathbb{C} \\
\log z &= (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n} + \cdots, \ z \in D(1,1).
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε την αναλογία με τα αντίστοιχα αναπτύγματα από τον Απειροστικό Λογισμό.

Για να αποδείξουμε το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης, δηλαδή ότι κάθε συγκλίνουσα δυναμοσειρά ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση, χρειαζόμαστε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 2.10. *Έστω $f_1, f_2, \ldots$ μια ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων σ'ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του U. Τότε η f είναι αναλυτική στο U. Επιπλέον, για κάθε m, $f_n^{(m)} \to f^{(m)}$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του U.*

Απόδειξη. Έστω $z_0 \in U$. Επιλέγουμε $r > 0$ τέτοιο ώστε $\overline{D}(z_0, r) \subset U$, και θέτουμε

$$\Gamma = \{w : |w - z_0| = r\}.$$

Από το Θεώρημα 2.7 έχουμε

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_n(w)}{w - z} dw,$$

για κάθε $z \in D(z_0, r)$. Έφόσον το Γ είναι συμπαγές, και για $w \in \Gamma$ η ποσότητα $|w - z|$ είναι κάτω φραγμένη από μια θετική σταθερά, έχουμε ότι

$$\frac{f_n(w)}{w - z} \to \frac{f(w)}{w - z}$$

ομοιόμορφα στο Γ. Επομένως

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

(Το ολοκλήρωμα υπάρχει διότι η f είναι συνεχής στο Γ ως ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων). Τώρα, από την Πρόταση 2.8, η f είναι αναλυτική στον $D(z_0, r)$, και εφόσον το z_0 είναι τυχόν, η f είναι αναλυτική σ'ολόκληρο το U.

Τέλος, από το Θεώρημα 2.8 έχουμε

$$f_n^{(m)}(z) - f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_n(w) - f(w)}{(w - z)^{m+1}} dw, \ z \in D(z_0, r).$$

Αν τώρα $z \in \overline{D}(z_0, r_1)$, όπου $r_1 < r$, τότε από την Πρόταση 2.2 έχουμε

$$|f_n^{(m)}(z) - f^{(m)}(z)| \le \frac{m!}{2\pi} \max_{w \in \Gamma} |f_n(w) - f(w)| \frac{2\pi r}{(r - r_1)^{m+1}} \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Επομένως $f_n^{(m)} \to f^{(m)}$ ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό υποδίσκο του $D(z_0, r)$, άρα σε κάθε κλειστό υποδίσκο του U (διότι το z_0 ήταν τυχόν), και άρα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του U (διότι κάθε συμπαγές υποσύνολο του U μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένο πλήθος κλειστών υποδίσκων του U). $\square$

Μπορούμε τώρα να δείξουμε το βασικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.10. *Η f είναι αναλυτική στο z_0 αν και μόνο αν η f μπορεί να αναπαρασταθεί σαν μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ σε μια περιοχή του z_0.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το ευθύ προκύπτει από την Πρόταση 2.9. Για το αντίστροφο, έχουμε ότι για κάθε n, η $\sum_{k=0}^{n} a_k(z-z_0)^k$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και συγκλίνει στην $f(z)$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα κάποιου δίσκου $D(z_0, r)$. Επομένως η f είναι αναλυτική από την Πρόταση 2.10. $\square$

Τέλος δείχνουμε ότι οι συντελεστές του αναπτύγματος σε δυναμοσειρά μιας αναλυτικής συνάρτησης f είναι μοναδικοί, και ότι οι παράγωγοι της f μπορούν να βρεθούν αν παραγωγίσουμε τους όρους της δυναμοσειράς.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.11. *Αν $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ για $z \in D(z_0, r)$, τότε*

(1) $f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)(z-z_0)^{n-m}$, $m = 1, 2, \ldots$.

(2) $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, *για όλα τα n (δηλαδή, η δυναμοσειρά συμπίπτει με το ανάπτυγμα Taylor).*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

(1) Από την Πρόταση 2.6, $\sum_{k=0}^{n} a_k(z-z_0)^k \to f(z)$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $D(z_0, r)$. Από την Πρόταση 2.10,
$$\sum_{k=m}^{n} a_k k(k-1)\cdots(k-m+1)(z-z_0)^{k-m} \to f^{(m)}(z).$$

(2) Θέτουμε $z = z_0$ στο (1) και παίρνουμε $f^{(m)}(z_0) = a_m m!$.

$\square$

4. Εφαρμογές

Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε την ισχύ των αποτελεσμάτων που διαθέτουμε μέσα από μια σειρά (αναπάντεχων) εφαρμογών.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.12 (**Εκτιμήσεις Cauchy**). *Έστω f αναλυτική στο $D(z_0, R)$. Θέτουμε*
$$M_f(z_0, r) = \max\{|f(z)| : |z-z_0| = r\}, \quad 0 < r < R.$$
Τότε
$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} M_f(z_0, r).$$
Επομένως, αν $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z \in D(z_0, R)$, τότε
$$|a_n| \leq \frac{M_f(z_0, r)}{r^n}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Άμεση από το Θεώρημα 2.8 και την Πρόταση 2.2. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.7. *Μια συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ονομάζεται* ***ακέραιη*** *αν είναι αναλυτική σ'ολόκληρο το $\mathbb{C}$.*

Το επόμενο αποτέλεσμα έρχεται σε πλήρη αντίθεση με ό,τι γνωρίζουμε από την Πραγματική Ανάλυση.

Θεωρημα 2.11 (**Το Θεώρημα Liouville**). *Αν η f είναι ακέραιη και φραγμένη, τότε η f είναι σταθερή.*

Αποδειξη. Από την Πρόταση 2.9, η f αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 και άπειρη ακτίνα σύγκλισης:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \ z \in \mathbb{C}.$$

Από την Πρόταση 2.12 έχουμε

$$|a_n| \leq \frac{M_f(z_0, r)}{r^n} \to 0, \text{ καθώς } r \to \infty, \text{ αν } n \geq 1,$$

διότι η f είναι φραγμένη. Συνεπώς $a_n = 0$ για όλα τα $n \geq 1$. Άρα $f(z) = a_0$ για όλα τα $z \in \mathbb{C}$. □

Είμαστε τώρα σε θέση να δείξουμε ένα διάσημο αποτέλεσμα.

Θεωρημα 2.12 (**Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας**). *Έστω P ένα πολυώνυμο βαθμού τουλάχιστον 1. Τότε $P(z) = 0$ για κάποιο z.*

Αποδειξη. Αν $P(z) \neq 0$ για όλα τα z, τότε η $\frac{1}{P}$ είναι ακέραιη. Εφόσον $P(z) \to \infty$ καθώς $z \to \infty$, η $\frac{1}{P}$ είναι φραγμένη, επομένως σταθερή από το Θεώρημα 2.11. Αυτό είναι άτοπο διότι υποθέσαμε ότι ο βαθμός του P είναι τουλάχιστον 1. □

Ορισμος 2.8. *Ένας μιγαδικός αριθμός z_0 λέγεται* ***ρίζα*** *μιας συνάρτησης f αν $f(z_0) = 0$. Έστω τώρα ότι η f είναι αναλυτική στο z_0, και έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ το ανάπτυγμα της f σε δυναμοσειρά σε μια περιοχή του z_0. Λέμε ότι το z_0 είναι* ***ρίζα τάξης*** *m της f αν και μόνο αν $a_n = 0$ για $n < m$ και $a_m \neq 0$. Μια ρίζα τάξης 1 λέγεται μερικές φορές* ***απλή ρίζα****.*

Παρατηρήστε ότι αν το z_0 είναι ρίζα τάξης m της f, τότε το ανάπτυγμα της f σε δυναμοσειρά έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} f(z) &= a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \cdots \\ &= (z - z_0)^m [a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \cdots] \\ &= (z - z_0)^m g(z), \end{aligned}$$

όπου $g(z_0) = a_m \neq 0$. Από το Θεώρημα 2.10, η g είναι αναλυτική. Επομένως σε μια περιοχή της ρίζας, η f μπορεί να «παραγοντοποιηθεί». Σαν εφαρμογή αυτής της παρατήρησης, εύκολα μπορεί να δείξει κανείς (άσκηση!) το ανάλογο του κανόνα L'Hôpital για αναλυτικές συναρτήσεις:

Έστω $f, g : D(z_0, r) \to \mathbb{C}$ αναλυτικές και όχι ταυτοτικά μηδέν. Αν

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} g(z) = 0,$$

τότε το

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$$

υπάρχει (ενδεχομένως είναι ∞) και ισχύει

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Είδαμε ότι αν η f είναι αναλυτική σ'ένα ανοιχτό σύνολο U που περιέχει ένα κύκλο Γ και το εσωτερικό του, τότε οι τιμές της f στον Γ καθορίζουν τις τιμές της f στο εσωτερικό του Γ. Θα δείξουμε τώρα ότι αν S είναι ένα υποσύνολο του U το οποίο έχει σημείο συσσώρευσης στο U, τότε οι τιμές της f στο S καθορίζουν τις τιμές της f στο U.

Πρόταση 2.13. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και συνεκτικό, και $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική. Υποθέτουμε ότι το σύνολο των ριζών της f έχει ένα σημείο συσσώρευσης z_0 στο U. Τότε η f είναι ταυτοτικά ίση με 0 στο U.*

Απόδειξη. Αναπτύσσουμε την f σε δυναμοσειρά γύρω από το z_0:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \ |z - z_0| < r.$$

Ισχυριζόμαστε ότι $a_n = 0$ για όλα τα n. Διαφορετικά, έστω m ο ελάχιστος ακέραιος τέτοιος ώστε $a_m \neq 0$. Τότε $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, όπου g αναλυτική στο z_0 και $g(z_0) \neq 0$. Λόγω συνέχειας, η g είναι μη μηδενική σε μια περιοχή του z_0, το οποίο αντιφάσκει με το ότι το z_0 είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου των ριζών της f.

Τώρα, θέτουμε

$$A = \{z \in U : \text{Το } z \text{ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου των ριζών της } f\}.$$

Από υπόθεση, $z_0 \in A$, άρα το A είναι μη κενό. Θα δείξουμε ότι το A είναι ανοιχτό και κλειστό στο U, άρα $A = U$ διότι το U είναι συνεκτικό. Αν $z \in A$, τότε το επιχείρημα στην προηγούμενη παράγραφο δείχνει ότι η f είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν σ'ένα δίσκο $D(z, \epsilon)$ και άρα $D(z, \epsilon) \subset A$. Επομένως το A είναι ανοιχτό στο $\mathbb{C}$, συνεπώς και στο U. Έστω τώρα μια ακολουθία $w_n \in A$ τέτοια ώστε $w_n \to w$, $w \in U$. Αν $w_n = w$ για κάποιο n, τότε $w \in A$ και τελειώσαμε. Αν $w_n \neq w$ για κάθε n, τότε από τη συνέχεια της f έχουμε $f(w_n) = 0$ και άρα $w \in A$. Επομένως το A είναι κλειστό. □

Θεώρημα 2.13 (**Το Θεώρημα της Ταυτότητας**). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και συνεκτικό και $f, g : U \to \mathbb{C}$ αναλυτικές. Θέτουμε*

$$A = \{z \in U : f(z) = g(z)\}.$$

Αν το A έχει σημείο συσσώρευσης στο U, τότε $f = g$ ταυτοτικά στο U.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 2.13 στην αναλυτική συνάρτηση $f - g$. □

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.13 είναι ότι η exp είναι η μοναδική αναλυτική συνάρτηση η οποία συμφωνεί με τη συνηθισμένη εκθετική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Το ίδιο ισχύει για τις log, sin και cos.

Παρατηρήστε ότι στο προηγούμενο θεώρημα, η υπόθεση ότι το σημείο συσσώρευσης ανήκει στο U είναι απαραίτητη. Για παράδειγμα, αν $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, τότε η συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$ με $f(z) = \sin \frac{1}{z}$, έχει ρίζες στα σημεία $\frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, τα οποία συσσωρεύονται στο $0 \notin U$, αλλά προφανώς η f δεν είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι, χοντρικά, η απόλυτη τιμή μιας συνάρτησης αναλυτικής σ'ένα σύνολο S δεν μπορεί να πάρει maximum σ'ένα εσώτερικό σημείο του S. Χρειαζόμαστε πρώτα ένα ενδιάμεσο αποτέλεσμα.

Λημμα 2.2. *Έστω f αναλυτική σ'ένα ανοιχτό σύνολο που περιέχει τον κλειστό δίσκο $\overline{D}(z_0, r)$. Τότε*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta$$

και επομένως

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|d\theta.$$

Αποδειξη. Άσκηση. □

Θεωρημα 2.14 (**Η Αρχή του Μεγίστου**). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και συνεκτικό, και f αναλυτική στο U, όχι σταθερή. Τότε*

(1) *Αν $z_0 \in U$ και $D(z_0, r) \subset U$, τότε υπάρχει ένα σημείο $z_1 \in D(z_0, r)$ τέτοιο ώστε $|f(z_1)| > |f(z_0)|$.*
(2) *Αν $\lambda = \sup_{z\in U} |f(z)|$, τότε $|f(z)| < \lambda$ γαι κάθε $z \in U$.*
(3) *Αν το U είναι φραγμένο και ∂U είναι το σύνορο του U, θέτουμε*

$$M = \limsup_{z\to\partial U} |f(z)|.$$

Ο συμβολισμός σημαίνει ότι το M είναι το supremum των ορίων όλων των συγκλινουσών ακολουθιών της μορφής $|f(z_n)|$, όπου $z_n \in U$ και $z_n \to z$, $z \in \partial U$. Τότε $|f(z)| < M$ για κάθε $z \in U$.
(4) *Αν το U είναι φραγμένο και η f ορίζεται και είναι συνεχής στο $\overline{U}$, θέτουμε*

$$M_0 = \max_{z\in\partial U} |f(z)|.$$

Τότε $|f(z)| < M_0$ για όλα τα $z \in U$, και επομένως,

$$M_0 = \max_{z\in\overline{U}} |f(z)| = |f(z_0)|,$$

για κάποιο $z_0 \in \partial U$ (δηλαδή η $|f|$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο σύνορο του U).

Αποδειξη.

(1) Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει. Τότε

$$|f(z_0 + se^{i\theta})| \leq |f(z_0)|,$$

για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$ και κάθε s με $0 \leq s < r$. Από το Λήμμα 2.2 έχουμε

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + se^{i\theta})|d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|d\theta = |f(z_0)|.$$

Επομένως

$$\int_0^{2\pi} (|f(z_0)| - |f(z_0 + se^{i\theta})|)d\theta = 0,$$

για κάθε $0 \leq s < r$. Στο παραπάνω ολοκλήρωμα, η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι μη αρνητική και συνεχής, άρα πρέπει να είναι ταυτοτικά ίση με 0. Με άλλα λόγια, η $|f(z)|$ είναι σταθερή στο $D(z_0, r)$. Τότε όμως και η f είναι σταθερή (άσκηση!) σ'αυτήν την περιοχή, άρα και σ'ολόκληρο το U από το Θεώρημα 2.13, άτοπο.
(2) Αν $|f(z_0)| = \lambda$ για κάποιο $z_0 \in U$, τότε από το (1) θα είχαμε $|f(z_1)| > \lambda$ για κάποιο άλλο $z_1 \in U$. Αυτό όμως αντιφάσκει με τον ορισμό του λ.

(3) Έστω $z_n \in U$ τέτοια ώστε $|f(z_n)| \to \lambda$. Τότε υπάρχει υπακολουθία z_{n_k} τέτοια ώστε $z_{n_k} \to z_0$ για κάποιο $z_0 \in \overline{U}$. Αν $z_0 \in U$ τότε, από τη συνέχεια της f, $|f(z_0)| = \lambda$, το οποίο είναι άτοπο από το (2). Επομένως $z_0 \in \partial U$. Από τον ορισμό του M έχουμε $\lambda \leq M$, άρα από το (2), $|f(z)| < M$ για όλα τα $z \in U$.

(4) Αν $z_n \in U$, $z_n \to z$, $z \in \partial U$, τότε $|f(z_n)| \to |f(z)|$ από τη συνέχεια της f. Προφανώς $|f(z)| \leq M_0$, άρα $M \leq M_0$, από τον ορισμό του M. Το συμπέρασμα έπεται από το (3).

□

Η απόλυτη τιμή μιας αναλυτικής είναι δυνατό να παίρνει ελάχιστη τιμή σ'ένα εσωτερικό σημείο ενός συνόλου. Για παράδειγμα, θεωρήστε την $f(z) = z$ στο $D(0,1)$. Αν όμως υποθέσουμε ότι η συνάρτηση δεν μηδενίζεται πουθενά, τότε έχουμε μια «Αρχή Ελαχίστου».

Θεωρημα 2.15 (**Η Αρχή του Ελαχίστου**). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και συνεκτικό, και f αναλυτική στο U, όχι σταθερή, πουθενά 0. Τότε*

(1) *Αν $z_0 \in U$ και $D(z_0, r) \subset U$, τότε υπάρχει ένα σημείο $z_1 \in D(z_0, r)$ τέτοιο ώστε $|f(z_1)| < |f(z_0)|$.*

(2) *Αν $\lambda = \inf_{z \in U} |f(z)|$, τότε $|f(z)| > \lambda$ γαι κάθε $z \in U$.*

(3) *Αν το U είναι φραγμένο και θέσουμε*
$$m = \liminf_{z \to \partial U} |f(z)|,$$
τότε $|f(z)| > m$ για κάθε $z \in U$.

(4) *Αν το U είναι φραγμένο και η f ορίζεται και είναι συνεχής στο $\overline{U}$, θέτουμε*
$$m_0 = \min_{z \in \partial U} |f(z)|.$$
Τότε $|f(z)| > m_0$ για όλα τα $z \in U$, και επομένως,
$$m_0 = \min_{z \in \overline{U}} |f(z)| = |f(z_0)|,$$
για κάποιο $z_0 \in \partial U$ (δηλαδή η $|f|$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο του U).

Αποδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.14 στην $\frac{1}{f}$. □

Τέλος, δείχνουμε ότι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος μιας αναλυτικής συνάρτησης ικανοποιούν τις αρχές του μεγίστου και του ελαχίστου.

Θεωρημα 2.16. *Έστω f αναλυτική και όχι σταθερή σ'ένα ανοιχτό και συνεκτικό σύνολο $U \subset \mathbb{C}$. Θέτουμε $u = \operatorname{Re} f$ και $v = \operatorname{Im} f$. Τότε οι u και v ικανοποιούν τις αρχές του μεγίστου και του ελαχίστου, δηλαδή τα (1)-(4) των Θεωρημάτων 2.14 και 2.15 ισχύουν με την u (ή την v) στη θέση της $|f|$.*

Αποδειξη. Η συνάρτηση e^f είναι αναλυτική στο U, όχι σταθερή και πουθενά 0. Εφόσον $|e^f| = e^u$, η u ικανοποιεί τις αρχές του μεγίστου και του ελαχίστου. Εφόσον $|e^{-if}| = e^v$, το ίδιο ισχύει και για την v. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Το Γενικό Θεώρημα του Cauchy

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με δύο βασικά ερωτήματα:

- Για ένα δεδομένο ανοιχτό σύνολο U, ποια είναι τα κλειστά μονοπάτια γ στο U με την ιδιότητα $\int_\gamma f(z)dz = 0$ για κάθε αναλυτική συνάρτηση f στο U;
- Πώς μπορούμε να χαρακτηρίσουμε εκείνα τα ανοιχτά σύνολα U με την ιδιότητα $\int_\gamma f(z)dz = 0$ για κάθε κλειστό μονοπάτι γ στο U και κάθε αναλυτική συνάρτηση f στο U;

1. Λογάριθμοι και ορίσματα

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1. *Έστω $S \subset \mathbb{C}$ και $f : S \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ συνεχής.*

Μια συνάρτηση $g : S \to \mathbb{C}$ λέγεται ***συνεχής λογάριθμος*** *της f αν είναι συνεχής και $e^{g(z)} = f(z)$ για κάθε $z \in S$.*

Μια συνάρτηση $\theta : S \to \mathbb{R}$ λέγεται ***συνεχές όρισμα*** *της f αν είναι συνεχής και $f(z) = |f(z)|e^{i\theta(z)}$ για κάθε $z \in S$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1. *Έστω f όπως στον Ορισμό 3.1.*

(1) *Αν g είναι ένας συνεχής λογάριθμος της f, τότε $\operatorname{Im} g$ είναι ένα συνεχές όρισμα της f.*
(2) *Αν θ είναι ένα συνεχές όρισμα της f, τότε $\log|f(z)| + i\theta(z)$, $z \in S$ είναι ένας συνεχής λογάριθμος της f.*
(3) *Αν το S είναι συνεκτικό και g_1, g_2 είναι συνεχείς λογάριθμοι της f, τότε $g_1 - g_2 = 2\pi i n$ για κάποιον ακέραιο n. Ομοίως, αν θ_1, θ_2 είναι συνεχή ορίσματα της f, τότε $\theta_1 - \theta_2 = 2\pi m$ για κάποιον ακέραιο m.*
(4) *Αν το S είναι συνεκτικό, g ένας συνεχής λογάριθμος της f, και θ ένα συνεχές όρισμα της f, τότε*

$$g(w) - g(z) = \log|f(w)| - \log|f(z)| + i[\theta(w) - \theta(z)],$$

για κάθε $z, w \in S$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

(1) $f(z) = e^{g(z)} = e^{\operatorname{Re} g(z)} e^{i\operatorname{Im} g(z)} = |f(z)|e^{i\operatorname{Im} g(z)}$.
(2) $e^{\log|f(z)| + i\theta(z)} = |f(z)|e^{i\theta(z)} = f(z)$.
(3) $e^{g_1} = f = e^{g_2}$, επομένως η συνάρτηση $\dfrac{g_2 - g_1}{2\pi i}$ είναι συνεχής και παίρνει ακέραιες τιμές. Αφού το S είναι συνεκτικό, πρέπει να είναι σταθερή. Ομοίως, $e^{i\theta_1} = \frac{f}{|f|} = e^{i\theta_2}$, άρα η $\dfrac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi}$ είναι σταθερή.
(4) Από το (2), η συνάρτηση $\log|f| + i\theta$ είναι συνεχής λογάριθμος της f. Από το (3), $g = \log|f| + i\theta + 2\pi i n$ για κάποιο n, και το συμπέρασμα έπεται.

□

Μια συνάρτηση f όπως στον Ορισμό 3.1, δεν έχει κατ'ανάγκη συνεχή λογάριθμο. Αν όμως το S είναι ένα κλειστό υποδιάστημα των πραγματικών αριθμών, τότε η f έχει συνεχή λογάριθμο.

Πρόταση 3.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ συνεχής. Τότε η f έχει συνεχή λογάριθμο.*

Απόδειξη. Αν D είναι ένας ανοιχτός δίσκος που δεν περιέχει το 0, τότε υπάρχει μια αναλυτική συνάρτηση h στον D τέτοια ώστε $e^{h(z)} = z$ για κάθε $z \in D$ (άσκηση!). Αφού το $[a,b]$ είναι συμπαγές, η $|f|$ παίρνει minimum, έστω m, στο $[a,b]$. Από υπόθεση, $m > 0$. Εφόσον η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, μπορούμε να βρούμε μια διαμέριση $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ τέτοια ώστε $|f(t) - f(t_i)| < m$ για $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Έτσι $f(t) \in D(f(t_i), m)$ για $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ και $0 \notin D(f(t_i), m)$ από τον ορισμό του m. Αν επιλέξουμε την h όπως παραπάνω, τότε $e^{h(f(t))} = f(t)$, $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, επομένως η f περιορισμένη στο $[t_i, t_{i+1}]$ έχει συνεχή λογάριθμο, έστω g_i.

Τώρα, αν $e^{g_0(t)} = f(t)$ για $t_0 \leq t \leq t_1$, και $e^{g_1(t)} = f(t)$ για $t_1 \leq t \leq t_2$, τότε $g_0(t_1) = g_1(t_1) + 2\pi i n$ για κάποιον ακέραιο n. Αντικαθιστούμε την g_1 με την $g_1 + 2\pi i n$, η οποία είναι επίσης ένας συνεχής λογάριθμος της f στο $[t_1, t_2]$. Έτσι παίρνουμε έναν συνεχή λογάριθμο της f στο $[t_0, t_2]$. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία επαγωγικά, παίρνουμε ένα συνεχή λογάριθμο της f στο $[a,b]$. □

Ορισμός 3.2. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική, πουθενά μηδέν. Μια συνάρτηση $g : U \to \mathbb{C}$ λέγεται* ***αναλυτικός λογάριθμος*** *της f αν η g είναι αναλυτική και $e^g = f$.*

Πρόταση 3.3. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική, πουθενά μηδέν. Τότε η f έχει αναλυτικό λογάριθμο αν και μόνο αν η «λογαριθμική παράγωγος» $\frac{f'}{f}$ έχει παράγουσα στο U. Ισοδύναμα, αν και μόνο αν $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$ για κάθε κλειστό μονοπάτι γ στο U.*

Απόδειξη. Αν $e^g = f$ στο U, τότε $g' e^g = f'$, επομένως $\frac{f'}{f} = g'$. Αντίστροφα, αν η g είναι αναλυτική στο U και $g' = \frac{f'}{f}$, τότε $(fe^{-g})' = f'e^{-g} - fg'e^{-g} = 0$ στο U. Επομένως fe^{-g} είναι ίση με μια σταθερά k_A πάνω σε κάθε συνεκτική συνιστώσα A του U.

Αν επιλέξουμε C_A έτσι ώστε $e^{C_A} = k_A$, τότε $e^{g + C_A} = f$ στο A. Αφού τώρα το A είναι μια αυθαίρετη συνεκτική συνιστώσα του U, αυτή η διαδικασία μας δίνει έναν αναλυτικό λογάριθμο της f στο U. □

Πρόταση 3.4. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και κυρτό, και $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική, πουθενά 0. Τότε η f έχει αναλυτικό λογάριθμο στο U. Γενικότερα, αν U είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $\int_\gamma h(z)dz = 0$ για κάθε κλειστό μονοπάτι γ στο U και κάθε αναλυτική συνάρτηση h στο U, τότε κάθε $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική και πουθενά 0, έχει αναλυτικό λογάριθμο στο U.*

Απόδειξη. Κατ'αρχήν υποθέτουμε ότι το U είναι κυρτό. Εφόσον η $\frac{f'}{f}$ είναι αναλυτική στο U, το Θεώρημα 2.6 μας δίνει

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0,$$

για κάθε κλειστό μονοπάτι γ στο U. Από την Πρόταση 3.3, η f έχει αναλυτικό λογάριθμο. Στη γενική περίπτωση, $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0$ από υπόθεση, και το συμπέρασμα έπεται όπως πριν. $\square$

Προταση 3.5. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική, και $g : U \to \mathbb{C}$ αναλυτικός λογάριθμος της f. Τότε για κάθε μονοπάτι $\gamma : [a,b] \to U$ έχουμε*

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).$$

Αποδειξη. Το επιχείρημα στην απόδειξη της Πρότασης 3.3 μας δίνει $g' = \frac{f'}{f}$ στο U. Συνεπώς

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int_a^b g'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).$$

$\square$

2. Ο δείκτης ενός σημείου σε σχέση με μια κλειστή καμπύλη

Μια μορφή του γενικού θεωρήματος του Cauchy λέει ότι αν η f είναι αναλυτική σ'ένα ανοιχτό σύνολο U και επιπλέον το U είναι απλά συνεκτικό, δηλαδή «δεν έχει τρύπες», τότε το ολοκλήρωμα της f πάνω σε οποιοδήποτε κλειστό μονοπάτι στο U είναι μηδέν. Ένας τρόπος να εκφράσουμε το ότι το U «δεν έχει τρύπες» είναι να πούμε ότι αν $\gamma : [a,b] \to U$ είναι ένα κλειστό μονοπάτι στο U και $z_0 \notin U$, τότε η συνολική μεταβολή του ορίσματος του $\gamma(t) - z_0$ καθώς το t κινείται από το a στο b είναι μηδέν.

Προταση 3.6. *Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ μια κλειστή καμπύλη τέτοια ώστε $0 \notin \gamma^*$, και έστω θ ένα συνεχές όρισμα της γ (υπάρχει από την Πρόταση 3.2). Τότε η ποσότητα $\frac{1}{2\pi}[\theta(b) - \theta(a)]$ είναι ακέραιος αριθμός. Επιπλέον, ο αριθμός αυτός είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του συνεχούς ορίσματος θ.*

Αποδειξη. Για κάθε $t \in [a,b]$,

$$e^{i\theta(t)} = \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}.$$

Επομένως

$$e^{i(\theta(b)-\theta(a))} = \frac{\gamma(b)}{|\gamma(b)|}\frac{|\gamma(a)|}{\gamma(a)} = 1,$$

εφόσον η γ είναι κλειστή. Συνεπώς ο αριθμός $\frac{1}{2\pi}[\theta(b) - \theta(a)]$ είναι ακέραιος. Αν τώρα ϕ είναι κάποιο άλλο συνεχές όρισμα, τότε από την Πρόταση 3.1, έχουμε ότι $\theta(t) - \phi(t) = 2\pi m$ για κάποιον ακέραιο m. Άρα $\theta(b) = \phi(b) + 2\pi m$ και $\theta(a) = \phi(a) + 2\pi m$, και το συμπέρασμα έπεται. $\square$

Ορισμος 3.3. *Έστω $\gamma; [a,b] \to \mathbb{C}$ μια κλειστή καμπύλη, και $z_0 \notin \gamma^*$. Συμβολίζουμε με $\gamma + w$ την καμπύλη $\gamma(t) + w$, $a \le t \le b$. Έστω θ ένα συνεχές όρισμα της $\gamma - z_0$. Τότε ο **δείκτης** του z_0 σε σχέση με την γ, ορίζεται να'ναι ο αριθμός*

$$\frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi},$$

και συμβολίζεται με $n(\gamma, z_0)$.

Από την Πρόταση 3.6, ο $n(\gamma, z_0)$ είναι καλά ορισμένος. Διαισθητικά, ο $n(\gamma, z_0)$ είναι ο καθαρός αριθμός των αντιωρολογιακών περιστροφών της γ γύρω από το σημείο z_0. Προφανώς, $n(\gamma, z_0) = n(\gamma + w, z_0 + w)$ για κάθε $w \in \mathbb{C}$.

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ένα τεχνικό λήμμα.

Λημμα 3.1. *Έστω $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ συνεχής και $V \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό τέτοιο ώστε $\gamma^* \subset V$. Τότε υπάρχει μια διαμέριση $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ και ανοιχτοί δίσκοι $D_1, D_2, \ldots, D_n \subset V$, τέτοιοι ώστε $\gamma(t) \in D_j$ για $t_{j-1} \le t \le t_j$, $j = 1, \ldots, n$.*

Αποδειξη. Έστω $\epsilon = \operatorname{dist}(\gamma^*, \mathbb{C} \setminus V) > 0$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της γ, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $|t - t'| < \delta$ τότε $|\gamma(t) - \gamma(t')| < \epsilon$. Έστω $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ μια διαμέριση του $[a, b]$ με $|t_j - t_{j-1}| < \delta$ για κάθε i. Θέτουμε $D_j = D(\gamma(t_j), \epsilon)$. □

Έχουμε τώρα την ακόλουθη ολοκληρωτική έκφραση του δείκτη:

Προταση 3.7. *Έστω $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ένα κλειστό μονοπάτι, και $z_0 \notin \gamma^*$. Τότε*

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz.$$

Γενικότερα, αν η f είναι αναλυτική σ'ένα ανοιχτό σύνολο V με $\gamma^* \subset V$, και $z_0 \notin (f \circ \gamma)^*$, τότε

$$n(f \circ \gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - z_0} dz.$$

Αποδειξη. Χωρίς απώλεια της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $f - z_0$ δεν είναι ποτέ μηδέν στο V (διαφορετικά περιορίζουμε το πεδίο ορισμού της f σε μια κατάλληλη περιοχή του γ^*). Κατασκευάζουμε μια διαμέριση $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ και ανοιχτούς δίσκους $D_1, \ldots, D_n$ όπως στο Λήμμα 3.1. Από την Πρόταση 3.4, η $f - z_0$ έχει αναλυτικό λογάριθμο g_j στο D_j. Από την Πρόταση 3.5,

$$\int_{\gamma(t_{j-1})}^{\gamma(t_j)} \frac{f'(z)}{f(z) - z_0} dz = g_j(\gamma(t_j)) - g_j(\gamma(t_{j-1})),$$

όπου ολοκληρώνουμε κατά μήκος του γ. Έστω $\theta(t)$ ένα συνεχές όρισμα της $f(\gamma(t)) - z_0$, $a \le t \le b$. Παρατηρήστε ότι η $g_j(\gamma(t))$ είναι ένας συνεχής λογάριθμος της $f(\gamma(t)) - z_0$, $t_{j-1} \le t \le t_j$. Επομένως, από την Πρόταση 3.1 έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - z_0} dz &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma(t_{j-1})}^{\gamma(t_j)} \frac{f'(z)}{f(z) - z_0} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} [g_j(\gamma(t_j)) - g_j(\gamma(t_{j-1}))] \\
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} [\log |f(\gamma(t_j)) - z_0| - \log |f(\gamma(t_{j-1})) - z_0| \\
&+ i\theta(t_j) - i\theta(t_{j-1})] \\
&= \frac{1}{2\pi} [\theta(b) - \theta(a)] = n(f \circ \gamma, z_0).
\end{aligned}$$

□

Τέλος εξετάζουμε τη συμπεριφορά του $n(\gamma, z_0)$ καθώς το z_0 μεταβάλλεται.

Πρόταση 3.8. *Έστω γ ένα κλειστό μονοπάτι. Τότε ο δείκτης $n(\gamma, z_0)$, θεωρούμενος σαν συνάρτηση του z_0, είναι σταθερός σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ και 0 στη μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα.*

Απόδειξη. Από τις Προτάσεις 3.7 και 2.8, ο δείκτης $n(\gamma, \cdot)$ είναι αναλυτική και άρα συνεχής στο $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$. Επομένως σε οποιαδήποτε συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$, η $n(\gamma, \cdot)$ είναι συνεχής και παίρνει τιμές στους ακέραιους άρα είναι σταθερή. Από την Πρόταση 2.8, έχουμε $n(\gamma, z_0) \to 0$, καθώς $z_0 \to \infty$, επομένως η $n(\gamma, \cdot)$ πρέπει να είναι ταυτοτικά ίση με 0 στην μη φραγμένη συνιστώσα. □

3. Το Γενικό Θεώρημα του Cauchy

Στην ανάπτυξη της θεωρίας θα χρειαστεί να ολοκληρώσουμε πάνω σε αντικείμενα κάπως πιο γενικά από κλειστά μονοπάτια.

Ορισμός 3.4. *Ένα τυπικό άθροισμα της μορφής $\gamma = a_1\gamma_1 + \cdots + a_m\gamma_m$, όπου τα a_i είναι ακέραιοι αριθμοί και τα γ_i κλειστά μονοπάτια, λέγεται* ***κύκλος***. *Θα συμβολίζουμε το $\bigcup_{i=1}^m \gamma_i^*$ με γ^*. Αν $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής, ορίζουμε*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\sum_{i=1}^m a_i\gamma_i} f(z)dz = \sum_{i=1}^m a_i \int_{\gamma_i} f(z)dz.$$

(Για όσους ξέρουν τι θα πει αυτό, ένας κύκλος είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές Λ στο χώρο $C(\gamma^*)$, η δράση του οποίου ορίζεται μέσω της παραπάνω σχέσης, δηλαδή

$$\Lambda(f) = \sum_{i=1}^m a_i \int_{\gamma_i} f(z)dz.)$$

Ένας κύκλος λέγεται ***ισοδύναμος*** *με το 0 αν*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0,$$

για όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$. Δύο κύκλοι γ_1 και γ_2 λέγονται ***ισοδύναμοι*** *αν ο $\gamma_1 - \gamma_2$ είναι ισοδύναμος με το 0 (για παράδειγμα, οι κύκλοι $2\gamma_1 - 5\gamma_2$ και $\gamma_1 - 3\gamma_2 + \gamma_1 - 2\gamma_2$ είναι ισοδύναμοι).*

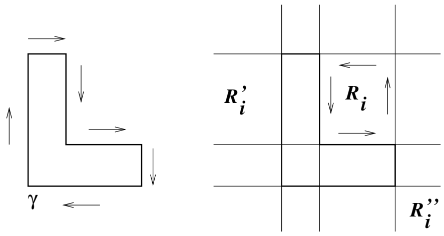
Τέλος ορίζουμε

$$n\left(\sum_{i=1}^m a_i\gamma_1, z\right) = \sum_{i=1}^m a_i n(\gamma_i, z).$$

Διαισθητικά, ένας κύκλος είναι μια αλυσίδα από κλειστά μονοπάτια γ_i έτσι ώστε το γ_i διαγράφεται a_i φορές.

Λήμμα 3.2 (**Το Θεμελιώδες Λήμμα**). *Έστω γ ένα κλειστό πολυγωνικό μονοπάτι, οι πλευρές του οποίου είναι παράλληλες στους άξονες των συντεταγμένων. Σχηματίζουμε το δίκτυο που αποτελείται από τις ευθείες που είναι παράλληλες στους άξονες και διέρχονται από τις κορυφές του γ. Έτσι παίρνουμε μια οικογένεια από (ανοιχτές) ορθογώνιες περιοχές R_i, $i = 1, \dots, m$, μια οικογένεια από μη φραγμένες περιοχές R_i' οι οποίες έχουν 3 πλευρές, και μια οικογένεια από μη φραγμένες περιοχές R_i'' οι οποίες έχουν 2 πλευρές.*

Επιλέγουμε σημεία $z_i \in R_i$, $i = 1, \dots, m$. Έστω γ_0 ο κύκλος $\sum_{i=1}^m n(\gamma, z_i)\partial R_i$, όπου ∂R_i συμβολίζει το σύνορο του R_i προσανατολισμένο αντιωρολογιακά. Τότε ο γ και ο γ_0 είναι ισοδύναμοι.



Απόδειξη. Κατ'αρχήν παρατηρούμε ότι

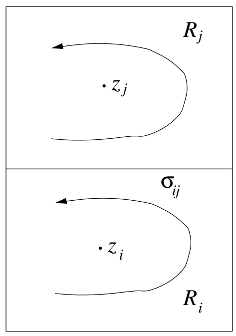
$$n(\gamma_0, z_k) = \sum_{i=1}^{m} n(\gamma, z_i) n(\partial R_i, z_k) = n(\gamma, z_k), \tag{3.1}$$

$k = 1, \ldots, m$. Επίσης, αν $z'_k \in R'_k$,

$$n(\gamma_0, z'_k) = \sum_{i=1}^{m} n(\gamma, z_i) n(\partial R_i, z'_k) = 0 = n(\gamma, z'_k) \tag{3.2}$$

εφόσον το z'_k ανήκει στη μη φραγμένη συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η σ_{ij} είναι μια πλευρά ανάμεσα στα R_i και R_j.



Έστω ότι στον κύκλο $\gamma - \gamma_0$, η σ_{ij} διαγράφεται c φορές (το c είναι ακέραιος αριθμός, πιθανώς αρνητικός). Θεωρούμε τον κύκλο $\sigma = \gamma - \gamma_0 - c\partial R_i$. Από τον ορισμό του c έχουμε ότι ο σ είναι ισοδύναμος μ'ένα κύκλο τ ο οποίος δεν περιέχει την σ_{ij}. Επομένως από την Πρόταση 3.7, τον ορισμό των ισοδύναμων κύκλων και την (3.1) έχουμε

$$n(\tau, z_i) = n(\sigma, z_i) = n(\gamma, z_i) - n(\gamma_0, z_i) - cn(\partial R_i, z_i) = -c, \tag{3.3}$$

και

$$n(\tau, z_j) = n(\sigma, z_j) = n(\gamma, z_j) - n(\gamma_0, z_j) - cn(\partial R_i, z_j) = 0. \tag{3.4}$$

Αφού τώρα τα z_i και z_j είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus \tau^*$, έχουμε ότι $n(\tau, z_i) = n(\tau, z_j)$. Από τις (3.3) και (3.4) παίρνουμε $c = 0$ και έτσι ο $\gamma - \gamma_0$ είναι ισοδύναμος μ'ένα κύκλο που δεν περιέχει την σ_{ij}. Ακριβώς το ίδιο επιχείρημα, με το z'_j στη θέση του z_j, δείχνει ότι αν σ'_{ij} είναι μια πλευρά ανάμεσα στο R_i και σε κάποια μη φραγμένη περιοχή R'_j, τότε η σ'_{ij} δεν συνεισφέρει τίποτα στον $\gamma - \gamma_0$. Αλλά όλες οι πλευρές του $\gamma - \gamma_0$ είναι της μορφής σ_{ij} ή σ'_{ij}. Επομένως ο $\gamma - \gamma_0$ είναι ισοδύναμος με το 0. □

Είμαστε τώρα σε θέση να απαντήσουμε στο πρώτο ερώτημα που θέσαμε στην αρχή του κεφαλαίου.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική. Έστω γ ένα κλειστό μονοπάτι (ή γενικότερα ένας κύκλος) στο U τέτοιος ώστε $n(\gamma, z) = 0$ για κάθε $z \notin U$. Τότε $\int_\gamma f(z)dz = 0$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.1, κατασκευάζουμε μια διαμέριση $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ του πεδίου ορισμού του γ και ανοιχτούς δίσκους $D_1, \ldots, D_n \subset U$, έτσι ώστε $\gamma(t) \in D_j$, $t_{j-1} \leq t \leq t_j$, $j = 1, \ldots, n$. Αν γ_j είναι ένα πολυγωνικό μονοπάτι στον D_j από το $\gamma(t_{j-1})$ στο $\gamma(t_j)$, με πλευρές παράλληλες στους άξονες, τότε το ολοκλήρωμα της f από το $\gamma(t_{j-1})$ στο $\gamma(t_j)$ κατά μήκος του γ είναι το ίδιο με το ολοκλήρωμα της f κατά μήκος του γ_j, από το Θεώρημα 2.6. Μπορούμε επομένως να υποθέσουμε χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι το γ είναι ένα πολυγωνικό μονοπάτι με πλευρές παράλληλες στους άξονες, και έτσι από το Λήμμα 3.2, το γ είναι ισοδύναμο μ'ένα κύκλο της μορφής $\sum_{i=1}^m n(\gamma, z_i)\partial R_i$. Τώρα, αν $\overline{R_i} \not\subseteq U$ τότε επιλέγουμε $z_0 \in \overline{R_i} \setminus U$. Προφανώς τα z_i και z_0 βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, και άρα, από την Πρόταση 3.8, έχουμε ότι $n(\gamma, z_i) = n(\gamma, z_0)$. Αλλά από υπόθεση, $n(\gamma, z_0) = 0$, και έτσι το γ είναι ισοδύναμο με τον κύκλο

$$\sigma = \sum_{\overline{R_i} \subset U} n(\gamma, z_i)\partial R_i.$$

Επομένως

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\sigma f(z)dz = \sum_{\overline{R_i} \subset U} n(\gamma, z_i) \int_{\partial R_i} f(z)dz.$$

Αλλά αν $\overline{R_i} \subset U$ τότε το ∂R_i περιέχεται σ'ένα κυρτό υποσύνολο του U, άρα

$$\int_{\partial R_i} f(z)dz = 0$$

από το Θεώρημα 2.6.

□

Το προηγούμενο αποτέλεσμα έχει αντίστροφο: Αν γ είναι ένα κλειστό μονοπάτι (ή κύκλος) στο U τέτοιος ώστε $\int_\gamma f(z)dz = 0$ για κάθε αναλυτική συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$, τότε $n(\gamma, z) = 0$ για κάθε $z \notin U$. Πράγματι, αν για κάποιο $z_0 \notin U$ έχουμε $n(\gamma, z_0) \neq 0$, τότε η $f(z) = [2\pi i(z - z_0)]^{-1}$ είναι αναλυτική στο U, αλλά από την Πρόταση 3.7, έχουμε $\int_\gamma f(z)dz = n(\gamma, z_0) \neq 0$. Επομένως απαντήσαμε πλήρως στο πρώτο ερώτημα που θέσαμε στην αρχή του κεφαλαίου:

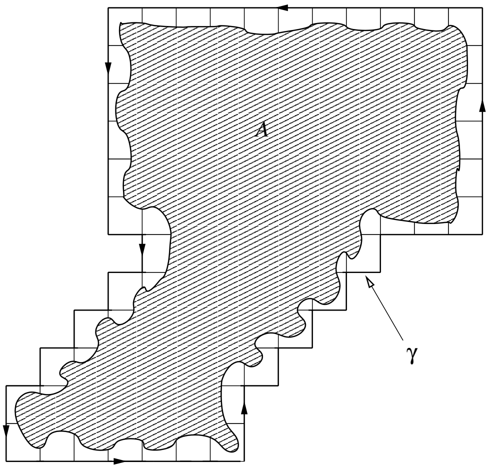
ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2 (**Το Πρώτο Θεώρημα του Cauchy**). *Έστω U ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, και γ ένα κλειστό μονοπάτι (ή κύκλος) στο U. Τότε $\int_\gamma f(z)dz = 0$ για κάθε αναλυτική συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$ αν και μόνο αν $n(\gamma, z) = 0$ για κάθε $z \notin U$.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.1. *Έστω γ_1 και γ_2 κλειστά μονοπάτια (ή κύκλοι) σ'ένα ανοιχτό σύνολο U. Τότε $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$ για κάθε αναλυτική συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$ αν και μόνο αν $n(\gamma_1, z) = n(\gamma_2, z)$ για κάθε $z \notin U$.*

Συνεχίζουμε τώρα με το δεύτερο ερώτημα. Θα χρειαστούμε πάλι ένα τεχνικό λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 3.3. *Έστω A, B ξένα, μη κενά υποσύνολα του $\widehat{\mathbb{C}}$ τέτοια ώστε το A είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $dist_{\widehat{\rho}}(A, B) = \delta > 0$, όπου $\widehat{\rho}$ είναι η μετρική στο $\widehat{\mathbb{C}}$.*

Κατασκευάζουμε ένα δίκτυο από κλειστά τετράγωνα (στο $\mathbb{C}$) με πλευρές μήκους $\frac{\delta}{2\sqrt{2}}$, παράλληλες στους άξονες. Έστω $Q_1, \ldots, Q_m$ τα τετράγωνα στο δίκτυο που τέμνουν το A, και έστω σ ο κύκλος $\sum_{i=1}^m \partial Q_i$. Αφαιρούμε όλες τις πλευρές που είναι κοινές σε οποιαδήποτε δύο τετράγωνα και παίρνουμε έναν ισοδύναμο κύκλο γ.



Τότε

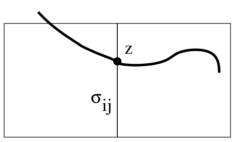
(1) $\gamma^* \cap (A \cup B) = \emptyset$.
(2) *Αν το z είναι εσωτερικό σημείο οποιουδήποτε Q_i, τότε $n(\gamma, z) = 1$.*

Απόδειξη.

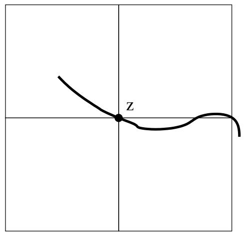
(1) Αν $z \in B \cap \gamma^*$, τότε $z \in \partial Q_i$ για κάποιο i. Αφού το Q_i τέμνει το A και η διαγώνιος του Q_i έχει μήκος $\frac{\delta}{2}$, έχουμε $|z - w| \leq \frac{\delta}{2}$ για κάποιο $w \in A$. Αλλά $z \in B$, επομένως

$$\mathrm{dist}_{\widehat{\rho}}(A, B) \leq \widehat{\rho}(z, w) \leq |z - w| \leq \frac{\delta}{2},$$

το οποίο είναι άτοπο. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $z \in A \cap \gamma^*$. Τότε το z ανήκει σε κάποιο ∂Q_i. Αν το z δεν είναι κορυφή, τότε ανήκει σε κάποια πλευρά του Q_i. Δηλαδή το A τέμνει όχι μόνο το Q_i αλλά και κάποιο γειτονικό τετράγωνο του δικτύου. Επομένως το z βρίσκεται πάνω στην κοινή πλευρά σ_{ij} δύο τετραγώνων Q_i και Q_j που τέμνουν το A.



Αλλά τότε η σ_{ij} δεν μπορεί να εμφανίζεται στην έκφραση του γ, δηλαδή $z \notin \gamma^*$, άτοπο. Αν το z είναι κορυφή, τότε το z βρίσκεται πάνω σε 4 τετράγωνα που τέμνουν το A.



Πάλι οι 4 πλευρές που περιέχουν το z δεν μπορεί να εμφανίζονται στην έκφραση του γ, δηλαδή $z \notin \gamma^*$, άτοπο.

(2) $n(\gamma, z) = n(\sigma, z) = \sum_{j=1}^{m} n(\partial Q_j, z) = n(\partial Q_i, z) = 1$, διότι αν το z δεν είναι εσωτερικό σημείο κάποιου Q_j τότε $n(\partial Q_j, z) = 0$.

$\square$

Θεωρημα 3.3 (**Το Δεύτερο Θεώρημα του Cauchy**). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Το $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$ είναι συνεκτικό.*

(2) *$n(\gamma, z) = 0$ για κάθε κλειστό μονοπάτι (ή κύκλο) γ στο U και κάθε σημείο $z \in \mathbb{C} \setminus U$.*

(3) *$\int_\gamma f(z)dz = 0$ για κάθε κλειστό μονοπάτι (ή κύκλο) γ στο U και κάθε αναλυτική συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$.*

(4) *Αν η $f : U \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική, τότε η f έχει παράγουσα στο U.*

(5) *Αν η $f : U \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική και πουθενά μηδέν, τότε η f έχει αναλυτικό λογάριθμο στο U.*

Αποδειξη.

$(1) \Rightarrow (2)$ Παρατηρήστε ότι αν ορίσουμε $n(\gamma, \infty) = 0$, τότε η $n(\gamma, \cdot)$ γίνεται συνεχής συνάρτηση στο $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \gamma^*$, από την Πρόταση 3.8. Έχουμε ότι $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus U$ το οποίο είναι ένα συνεκτικό υποσύνολο του $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \gamma^*$. Επίσης, $\infty \in \widehat{C} \setminus U$ διότι $U \subset \mathbb{C}$. Δηλαδή, τα z και ∞ ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \gamma^*$, επομένως $n(\gamma, z) = n(\gamma, \infty) = 0$.

$(2) \Rightarrow (1)$ Υποθέτουμε ότι $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U = A \cup B$, όπου τα A και B είναι μη κενά, ξένα και κλειστά στο $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$. Έστω ότι $\infty \in B$. Τότε το A είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Εφόσον το A είναι συμπαγές και το B κλειστό, έχουμε $\operatorname{dist}_{\widehat{\rho}}(A, B) > 0$. Κατασκευάζουμε ένα κύκλο γ όπως στο Λήμμα 3.3. Εφόσον $\gamma^* \cap (A \cup B) = \emptyset$, έχουμε $\gamma^* \subset U$, δηλαδή ο γ είναι ένας κύκλος στο U. Στο Λήμμα 3.3 μπορούμε να επιλέξουμε το δίκτυο έτσι ώστε το εσωτερικό κάποιου από τα τετράγωνα να περιέχει ένα δεδομένο $z \in A$. Τότε $n(\gamma, z) = 1$, άτοπο.

$(2) \Leftrightarrow (3)$ Άμεσο από το Θεώρημα 3.2.

$(3) \Leftrightarrow (4)$ Έπεται από την Πρόταση 2.4.

$(4) \Rightarrow (5)$ Αν η $f : U \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική και πουθενά μηδέν, τότε η $\frac{f'}{f}$ είναι αναλυτική στο U και επομένως έχει παράγουσα στο U. Από την Πρόταση 3.3, η f έχει αναλυτικό λογάριθμο.

$(5) \Rightarrow (2)$ Αν $z_0 \notin U$, τότε η $f(z) = z - z_0$ είναι αναλυτική και δεν μηδενίζεται στο U, άρα έχει αναλυτικό λογάριθμο. Επομένως

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0,$$

από την Πρόταση 3.7 και την Πρόταση 3.3.

□

Ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ που ικανοποιεί οποιαδήποτε από τις συνθήκες του προηγούμενου θεωρήματος λέγεται **απλά συνεκτικό**. Διαισθητικά, οι συνθήκες (1) και (2) λένε ότι το U δεν έχει «τρύπες». Αν το U είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και γ είναι ένας κύκλος στο U τέτοιος ώστε $n(\gamma, z) = 0$ για κάθε $z \notin U$, τότε λέμε ότι ο γ είναι **0-ομολογικός** (στο U). Δυο κύκλοι γ_1 και γ_2 λέγονται **ομολογικοί** (στο U) αν ο $\gamma_1 - \gamma_2$ είναι 0-ομολογικός. Μια αναλυτική συνάρτηση έχει το ίδιο ολοκλήρωμα πάνω σε ομολογικούς κύκλους, και το ολοκλήρωμά της είναι 0 πάνω σε κάθε 0-ομολογικό κύκλο.

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε μια γενικότερη μορφή του ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy.

Θεώρημα 3.4 (**Η γενική μορφή του Ολοκληρωτικού Τύπου του Cauchy**). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική. Έστω γ ένα κλειστό μονοπάτι (ή γενικότερα κύκλος) στο U τέτοιος ώστε $n(\gamma, z) = 0$ για κάθε $z \notin U$. Τότε*

$$f(z)n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw,$$

για κάθε $z \in U$, $z \notin \gamma^*$. Επομένως από τις Προτάσεις 2.8 και 3.8,

$$f^{(m)}(z)n(\gamma, z) = \frac{m!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{m+1}}dw.$$

Απόδειξη. Έστω

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{αν } w \in U,\ w \neq z \\ f'(z) & \text{αν } w = z. \end{cases}$$

Τότε η g είναι αναλυτική στο U από το Πόρισμα 2.2, επομένως, από το Θεώρημα 3.1 $\int_\gamma g(w)dw = 0$. Έτσι,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = f(z)\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = f(z)n(\gamma, z).$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Εφαρμογές της Θεωρίας του Cauchy

1. Ανωμαλίες

Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και ας υποθέσουμε ότι η f είναι αναλυτική στο $U \setminus \{z_0\}$. Τότε λέμε ότι το z_0 είναι μια **μεμονωμένη ανωμαλία** της f. Θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά της f κοντά στο z_0. Ένα από τα βασικά αποτελέσματα της τοπικής θεωρίας του Cauchy είναι ότι αν η f είναι αναλυτική στο z_0, τότε η f μπορεί να αναπαρασταθεί σαν δυναμοσειρά σε μια περιοχή του z_0. Θα δείξουμε ότι αν το z_0 είναι μια μεμονωμένη ανωμαλία της f, τότε γύρω από το z_0, η f μπορεί να αναπαρασταθεί σαν μια «δυναμοσειρά» η οποία περιέχει και θετικές και αρνητικές δυνάμεις.

Ορισμός 4.1. *Μια σειρά* ***Laurent*** *είναι ένα τυπικό άθροισμα της μορφής*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}.$$

Σε αναλογία με την Πρόταση 2.6, αν μια σειρά Laurent συγκλίνει σε κάποια z_1, z_2, με $|z_1 - z_0| = r_1$, $|z_2 - z_0| = r_2$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, τότε η σειρά συγκλίνει απόλυτα στον ανοιχτό δακτύλιο $\{z : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ και ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του δακτυλίου.

Θα χρειαστούμε την ακόλουθη «διορθωμένη» μορφή του ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy:

Πρόταση 4.1. *Έστω ότι η f είναι αναλυτική σ'ένα ανοιχτό σύνολο U το οποίο περιέχει τον δακτύλιο $\{z \in \mathbb{C} : r_1 \le |z - z_0| \le r_2\}$, όπου $0 < r_1 < r_2 < \infty$. Θέτουμε $\Gamma_i = \{z : |z - z_0| = r_i\}$, $i = 1, 2$. Τότε για καθε z με $r_1 < |z - z_0| < r_2$ έχουμε*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Απόδειξη. Έστω $\gamma = \Gamma_2 - \Gamma_1$. Ο γ είναι 0-ομολογικός στο U, επομένως από το Θεώρημα 3.4,

$$f(z)n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Αλλά αν $r_1 < |z - z_0| < r_2$, τότε

$$n(\gamma, z) = n(\Gamma_2, z) - n(\Gamma_1, z) = 1 - 0 = 1.$$

□

Θεώρημα 4.1 (**Σειρές Laurent**). *Έστω ότι η f είναι αναλυτική στον δακτύλιο $U = \{z : s_1 < |z - z_0| < s_2\}$, όπου $0 \le s_1 < s_2 \le \infty$. Τότε*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \ z \in U,$$

όπου

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$$

και Γ είναι οποιοσδήποτε κύκλος με κέντρο το z_0 και ακτίνα r, $s_1 < r < s_2$. Η σειρά συγκλίνει απόλυτα στο U και ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του U.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι τα a_n είναι καλά ορισμένα διότι δύο κύκλοι $\Gamma = \{z : |z-z_0| = r\}$ και $\Gamma' = \{z : |z-z_0| = r'\}$ με $s_1 < r < r' < s_2$ είναι ομολογικοί στο U. Επιλέγουμε r_1, r_2 τέτοια ώστε $s_1 < r_1 < r_2 < s_2$, και έστω $\Gamma_i = \{z : |z-z_0| = r_i\}$, $i = 1,2$. Αν $|z-z_0| < r_2$, επαναλαμβάνουμε το επιχείρημα στην απόδειξη της Πρότασης 2.9 και παίρνουμε

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \ |z-z_0| < r_2, \tag{4.1}$$

όπου

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw.$$

Η σειρά συγκλίνει απόλυτα, και ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $D(z_0, r_2)$. Έστω τώρα ότι $|z-z_0| > r_1$. Τότε

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}dw &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(w)}{z-z_0-(w-z_0)}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f(w)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(w-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}dw. \end{aligned}$$

Αν $w \in \Gamma_1$, τότε

$$\left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right| = \frac{r_1}{|z-z_0|} < 1,$$

επομένως η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα και έτσι μπορούμε να εναλλάξουμε ολοκλήρωμα και άθροισμα για να πάρουμε

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^{-(k+1)},$$

όπου

$$b_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f(w)(w-z_0)^k dw.$$

Θέτουμε $n = -(k+1)$ και παίρνουμε

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n, \ |z-z_0| > r_1, \tag{4.2}$$

όπου

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw.$$

Αυτή είναι μια δυναμοσειρά ως προς $(z-z_0)^{-1}$, επομένως συγκλίνει απόλυτα για $|z-z_0| > r_1$, και ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\{z : |z-z_0| > r_1\}$. Οι (4.1), (4.2) και η Πρόταση 4.1 μας λένε ότι

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

για κάθε z με $r_1 < |z - z_0| < r_2$. Εφόσον τα r_1 και r_2 ήταν τυχόντα, η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $z \in U$.

□

Πρόταση 4.2. *Θέτουμε $U = \{z : s_1 < |z - z_0| < s_2\}$, $0 \leq s_1 < s_2 \leq \infty$. Έστω ότι*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

για κάθε $z \in U$. Τότε η f είναι αναλυτική και

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw,$$

όπου $\Gamma = \{z : |z - z_0| = r\}$ οποιοσδήποτε κύκλος στο U. Δηλαδή το ανάπτυγμα σε σειρά Laurent είναι μοναδικό.

Απόδειξη. Εφόσον η f είναι το άθροισμα μιας δυναμοσειράς ως προς $z - z_0$ και μιας δυναμοσειράς ως προς $(z - z_0)^{-1}$, η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του U, από την παρατήρηση στον ορισμό της σειράς Laurent (ή από το επιχείρημα στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.1 το οποίο είναι και η απόδειξη της παρατήρησης!). Δηλαδή η ακολουθία

$$\sum_{k=-n}^{n} b_k (z - z_0)^k$$

συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του U, άρα η f είναι αναλυτική από την Πρόταση 2.10. Πολλαπλασιάζουμε τώρα και τα δύο μέλη της έκφρασης της f με

$$\frac{1}{2\pi i (z - z_0)^{k+1}},$$

εναλλάσουμε άθροισμα και ολοκλήρωμα, και παίρνουμε

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (z - z_0)^{n-k-1} dz = b_k,$$

διότι αν $n \neq k$ τότε η $(z - z_0)^{n-k-1}$ έχει παράγουσα στο U και επομένως το ολοκλήρωμα πάνω στο Γ είναι μηδέν, ενώ για $n = k$ έχουμε

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z - z_0} = n(\Gamma, z_0) = 1.$$

□

Είμαστε τώρα σε θέση να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της f κοντά σε μια μεμονωμένη ανωμαλία.

Ορισμός 4.2. *Έστω ότι η f έχει μια μεμονωμένη ανωμαλία στο z_0 (δηλαδή είναι αναλυτική σ'ένα σύνολο της μορφής $U \setminus \{z_0\}$). Τότε από το Θεώρημα 4.1*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,\ 0 < |z - z_0| < r,$$

για κάποιο $r > 0$.

Το άθροισμα των αρνητικών δυνάμεων της σειράς Laurent, δηλαδή

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$$

ονομάζεται ***κύριο μέρος*** *της σειράς Laurent.*

Αν η σειρά Laurent δεν έχει αρνητικές δυνάμεις, δηλαδή αν

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

τότε λέμε ότι η f έχει ***επουσιώδη ανωμαλία*** *στο z_0. Σ'αυτήν την περίπτωση, αν επεκτείνουμε το πεδίο ορισμού της f θέτοντας $f(z_0)=a_0$, τότε η f είναι αναλυτική στο z_0 από το Θεώρημα 2.10. Δηλαδή, η f είναι αναλυτική σε μια περιοχή του z_0 και τα αναπτύγματα Laurent και Taylor συμπίπτουν.*

Αν η σειρά Laurent έχει ένα θετικό αλλά πεπερασμένο αριθμό m αρνητικών δυνάμεων, δηλαδή αν

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,\ a_{-m}\neq 0,$$

τότε λέμε ότι η f έχει ***πόλο τάξης*** *m στο z_0, και* ***απλό πόλο*** *αν $m=1$. Σ'αυτήν την περίπτωση, η $(z-z_0)^m f(z)$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο z_0, και*

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=a_{-m}\neq 0.$$

Επίσης, $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$, επομένως αν ορίσουμε $f(z_0)=\infty$, τότε η f είναι μια συνεχής απεικόνιση του U στο εκτεταμένο επίπεδο.

Αν η σειρά Laurent έχει άπειρο αριθμό αρνητικών δυνάμεων, τότε λέμε ότι η f έχει ***ουσιώδη ανωμαλία*** *στο z_0.*

Μια αναλυτική συνάρτηση της οποίας όλες οι μεμονωμένες ανωμαλίες είναι πόλοι, ονομάζεται ***μερόμορφη****.*

Θα βρούμε τώρα ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι μια μεμονωμένη ανωμαλία επουσιώδης, πόλος ή ουσιώδης. Το ακόλουθο λήμμα θα είναι χρήσιμο.

Λημμα 4.1. *Έστω ότι η f έχει μια μεμονωμένη ανωμαλία στο z_0. Θέτουμε*

$$M_f(z_0,r)=\max\{|f(z)|:|z-z_0|=r\}.$$

Αν υπάρχουν $c>0$ και $\alpha\geq 0$ έτσι ώστε $M_f(z_0,r)\leq cr^{-\alpha}$ για κάθε $r>0$ αρκετά μικρό, τότε η f έχει είτε επουσιώδη ανωμαλία στο z_0 είτε πόλο τάξης $\leq\alpha$.

Αποδειξη. Έστω a_j οι συντελεστές στο ανάπτυγμα Laurent της f. Για $j\geq 0$ έχουμε

$$|a_{-j}|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)(z-z_0)^{j-1}dz\right|\leq\frac{1}{2\pi}M_f(z_0,r)r^{j-1}2\pi r\leq cr^{j-\alpha}\to 0,$$

καθώς $r\to 0$, αν $j>\alpha$. Επομένως $a_{-j}=0$ αν $j>\alpha$. □

Η συμπεριφορά μιας συνάρτησης κοντά σε μια ουσιώδη ανωμαλία είναι αρκετά παθολογική:

Θεωρημα 4.2 (**Το Θεώρημα Casorati-Weierstraß**). *Έστω ότι η f έχει μια ουσιώδη ανωμαλία στο σημείο z_0. Τότε για κάθε $b > 0$ αρκετά μικρό, το σύνολο $f(\{z : 0 < |z - z_0| < b\})$ είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$.*

Αποδειξη. Έστω $b > 0$ αρκετά μικρό, $V = \{z : 0 < |z - z_0| < b\}$. Επιλέγουμε τυχόν $w \in \mathbb{C}$. Αν $f(z) = w$ για κάποιο $z \in U$, τότε δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε. Αν $f(z) \neq w$ για κάθε $z \in V$, τότε θεωρούμε την $g : V \to \mathbb{C}$ με

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}.$$

Η g είναι αναλυτική. Αρκεί να δείξουμε ότι δεν είναι φραγμένη. Ας υποθέσουμε ότι η g είναι φραγμένη. Τότε $M_g(z_0, r) \leq c$, $0 < r < b$, όπου c κάποια θετική σταθερά. Από το Λήμμα 4.1, η g έχει επουσιώδη ανωμαλία στο z_0. Αλλά

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$$

στο V, άρα η $(z - z_0)^m f(z)$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο z_0 για κατάλληλο m. Συνεπώς η f είτε έχει επουσιώδη ανωμαλία, είτε έχει πόλο στο z_0, άτοπο. $\square$

Θεωρημα 4.3. *Έστω ότι η f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο z_0. Τότε*

(1) *Το z_0 είναι επουσιώδης ανωμαλία αν και μόνο αν το $\lim_{z \to z_0} f(z)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο.*
(2) *Το z_0 είναι πόλος τάξης m αν και μόνο αν το $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$ είναι μη μηδενικό και πεπερασμένο.*
(3) *Το z_0 είναι ουσιώδης ανωμαλία αν και μόνο αν το $\lim_{z \to z_0} f(z)$ δεν υπάρχει.*

Αποδειξη. Άσκηση. $\square$

Η συμπεριφορά μιας συνάρτησης f στο ∞ μπορεί να μελετηθεί εξετάζοντας την $g(z) = f(\frac{1}{z})$ στο 0.

Ορισμος 4.3. *Λέμε ότι η f έχει **μεμονωμένη ανωμαλία στο** ∞ αν και μόνο αν η f είναι αναλυτική σ'ένα σύνολο της μορφής $\{z : |z| > r\}$ και η συνάρτηση*

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο 0. Επουσιώδεις ανωμαλίες, πόλοι και ουσιώδεις ανωμαλίες ορίζονται παρόμοια.

2. Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Θα αναπτύξουμε μια τεχνική η οποία επιτρέπει τον γρήγορο υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_\gamma f(z)dz$, όπου γ είναι ένα κλειστό μονοπάτι στο U και η f είναι αναλυτική στο U, εκτός από ένα σύνολο μεμονωμένων ανωμαλιών.

Ορισμος 4.4. *Αν η f έχει μια μεμονωμένη ανωμαλία στο z_0, τότε ο συντελεστής a_{-1} στο ανάπτυγμα Laurent της f γύρω από το z_0 λέγεται **ολοκληρωτικό υπόλοιπο** της f στο z_0 και συμβολίζεται με $\mathrm{Res}\,(f, z_0)$.*

Στόχος μας είναι να ανάγουμε τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων στον υπολογισμό ολοκληρωτικών υπολοίπων.

Λημμα 4.2. *Έστω f αναλυτική στο $U \setminus \{z_0\}$, όπου $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό. Έστω R ένα ανοιχτό ορθογώνιο τέτοιο ώστε $\overline{R} \subset U$. Αν $z_0 \in R$, τότε*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} f(z)dz = \operatorname{Res}(f, z_0).$$

Αποδειξη. Αναπτύσσουμε την f σε σειρά Laurent γύρω από το z_0:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Έστω $\Gamma \subset R$ ένας κύκλος με κέντρο το z_0. Το ∂R είναι ομολογικό με το Γ, επομένως

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} a_n \int_{\Gamma} (z - z_0)^n dz = a_{-1}.$$

□

Θα χρειαστούμε και το ακόλουθο τεχνικό λήμμα:

Λημμα 4.3. *Έστω γ ένα κλειστό μονοπάτι στο $\mathbb{C}$, $S \subset \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $\overline{S} \cap \gamma^* = \emptyset$. Υποθέτουμε ότι $n(\gamma, w) = 0$ για κάθε σημείο συσσώρευσης του S. Τότε $n(\gamma, z) = 0$ για όλα εκτός από το πολύ πεπερασμένο πλήθος $z \in S$.*

Αποδειξη. Θέτουμε $A = \{z : n(\gamma, z) = 0\}$. Τότε το A είναι η ένωση όλων των συνεκτικών συνιστωσών του $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ στις οποίες ο δείκτης $n(\gamma, \cdot)$ είναι μηδέν. Ιδιάιτερα το A είναι ένα ανοιχτό σύνολο το οποίο περιέχει το $\{z : |z| > r\}$ για $r > 0$ αρκετά μεγάλο. Επομένως το $\mathbb{C} \setminus A$ είναι συμπαγές. Αν τώρα άπειρα σημεία του S ανήκουν στο $\mathbb{C} \setminus A$, τότε το S έχει σημείο συσσώρευσης στο $\mathbb{C} \setminus A$, άτοπο. □

Θεωρημα 4.4 (**Το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων**). *Έστω f αναλυτική σ'ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{C}$, εκτός από ένα σύνολο μεμονωμένων ανωμαλιών στα σημεία $w_1, w_2, \ldots$. Έστω γ ένα 0-ομολογικό κλειστό μονοπάτι (ή κύκλος) στο U, τέτοιο ώστε $w_j \notin \gamma^*$ για κάθε j. Τότε*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_j n(\gamma, w_j)\operatorname{Res}(f, w_j).$$

Αποδειξη. Κατ'αρχήν παρατηρούμε ότι $n(\gamma, w_j) = 0$ για όλα εκτός από το πολύ πεπερασμένο πλήθος j, κι'έτσι το άθροισμα είναι στην πραγματικότητα πεπερασμένο. Πράγματι, ας θέσουμε $S = \{w_1, w_2, \ldots\}$. Αν w είναι ένα σημείο συσσώρευσης του S, τότε $w \notin U$ διότι όλες οι ανωμαλίες είναι μεμονωμένες. Επομένως $n(\gamma, w) = 0$. Επιπλέον, $\overline{S} \cap \gamma^* = \emptyset$ διότι $S \cap \gamma^* = \emptyset$ από υπόθεση, και τα σημεία συσσώρευσης του S δεν ανήκουν στο γ^* γιατί $\gamma^* \subset U$. Ο ισχυρισμός έπεται τώρα από το Λήμμα 4.3.

Τώρα έστω $w_1, \ldots, w_t$ οι ανωμαλίες για τις οποίες $n(\gamma, w_j) \neq 0$ (αναδιατάσσουμε τα w_j αν χρειάζεται). Το σύνολο $U \setminus S$ είναι ανοιχτό, διότι το S δεν έχει σημεία συσσώρευσης στο U. Επίσης, $\gamma^* \subset U \setminus S$. Επομένως, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το γ είναι ένα πολυγωνικό μονοπάτι με πλευρές παράλληλες στους άξονες. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι κανένα από τα $w_1, \ldots, w_t$ δεν βρίσκεται πάνω στο δίκτυο των ευθειών που διέρχονται από τις κορυφές του γ και είναι παράλληλες στους άξονες.

Από το Λήμμα 3.2, το γ είναι ισοδύναμο με ένα κύκλο της μορφής

$$\sum_{i=1}^{m} n(\gamma, z_i)\partial R_i,$$

όπου $z_i \in R_i$, και για κάθε $j = 1, \dots, t$, έχουμε $w_j \in R_i$ για κάποιο i. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το δίκτυο των ευθειών είναι τόσο πυκνό ώστε δυο διαφορετικά w_j στο σύνολο $\{w_1, \dots, w_t\}$ να μην ανήκουν στο ίδιο R_i.

Τώρα, έστω $V = U \setminus \{w_{t+1}, w_{t+2}, \dots\}$. Αν κάποιο $\overline{R}_i$ δεν περιέχεται στο V, τότε $n(\gamma, z_i) = 0$. Για να δούμε γιατί αυτό ισχύει, επιλέγουμε $z_0 \in \overline{R}_i \setminus V$. Τότε τα z_i και z_0 βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ και κατά συνέπεια $n(\gamma, z_i) = n(\gamma, z_0)$. Αν $z_0 \notin U$, τότε $n(\gamma, z_0) = 0$ διότι το γ είναι 0-ομολογικό. Αν το z_0 είναι κάποιο από τα w_j, $j \geq t+1$, τότε $n(\gamma, z_0) = 0$, από την επιλογή του t.

Δηλαδή το γ είναι ισοδύναμο με τον κύκλο

$$\sigma = \sum_{\overline{R}_k \subset V} n(\gamma, z_k) \partial R_k.$$

Επομένως

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\sigma f(z)dz = \sum_{\overline{R}_k \subset V} n(\gamma, z_k) \int_{\partial R_k} f(z)dz.$$

Αν τώρα κάποιο w_j, $j = 1, \dots, t$, ανήκει σε κάποιο R_k με $\overline{R}_k \subset V$, τότε $n(\gamma, z_k) = n(\gamma, w_j)$ και

$$\int_{\partial R_k} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}\,(f, w_j),$$

από το Λήμμα 4.2. Αν κανένα w_j, $j = 1, \dots, t$, δεν ανήκει σε κάποιο R_k με $\overline{R}_k \subset V$ τότε

$$\int_{\partial R_k} f(z)dz = 0.$$

Αλλά κάθε w_j, $j = 1, \dots, t$, ανήκει σε κάποιο R_k με $\overline{R}_k \subset V$. Επομένως

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{t} n(\gamma, w_j) \mathrm{Res}\,(f, w_j).$$

□

Το πλεονέκτημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων είναι ότι συχνά είναι εύκολο να υπολογιστούν.

Πρόταση 4.3. *Αν η f έχει πόλο τάξης m στο z_0, τότε*

$$\mathrm{Res}\,(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \right).$$

Απόδειξη. Άσκηση. □

Θα εφαρμόσουμε τώρα το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων για να αποδείξουμε μια βασική γεωμετρική ιδιότητα των αναλυτικών συναρτήσεων: Αν γ είναι ένα κλειστό μονοπάτι, τότε ο αριθμός των στροφών της $f(z)$ γύρω από την αρχή των αξόνων καθώς το z κινείται πάνω στο γ, είναι ίσος με τον αριθμό των ριζών της f μέσα στο γ^*, λαμβάνοντας υπόψη το δείκτη τους και την τάξη τους.

Θα αποδείξουμε πρώτα ένα Λήμμα.

Λήμμα 4.4. *Έστω ότι η f είναι αναλυτική στο z_0. Υποθέτουμε ότι το z_0 είναι ρίζα τάξης k της f. Τότε η $\frac{f'}{f}$ έχει απλό πόλο στο z_0 με* $\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = k$.

Απόδειξη. Έστω $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, όπου η g είναι αναλυτική στο z_0 και $g(z_0) \neq 0$. Τότε

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Επομένως

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = k + \mathrm{Res}\left(\frac{g'}{g}, z_0\right) = k,$$

διότι η $\frac{g'}{g}$ είναι αναλυτική στο z_0. □

Θεώρημα 4.5 (**Η Αρχή του Ορίσματος**). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική και γ ένα 0-ομολογικό κλειστό μονοπάτι στο U τέτοιο ώστε η f δεν μηδενίζεται στο γ^*. Αν η f δεν είναι ταυτοτικά ίση με 0 σε καμία συνεκτική συνιστώσα του U, και οι ρίζες της f είναι τα διακεκριμένα σημεία $z_1, z_2, \ldots$ με τάξεις $k_1, k_2, \ldots$, τότε*

$$n(f \circ \gamma, 0) = \sum_j k_j n(\gamma, z_j).$$

(Το άθροισμα είναι πεπερασμένο από το Λήμμα 4.3.)

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.7, το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων και το Λήμμα 4.4 έχουμε

$$n(f \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_j \mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_j\right) n(\gamma, z_j) = \sum_j k_j n(\gamma, z_j).$$

□

Θεώρημα 4.6 (**Η Γενικευμένη Αρχή του Ορίσματος**). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, $f, g : U \to \mathbb{C}$ αναλυτικές, και γ ένα 0-ομολογικό κλειστό μονοπάτι στο U τέτοιο ώστε η f και g δεν μηδενίζονται στο γ^*. Υποθέτουμε ότι οι f και g δεν είναι ταυτοτικά μηδέν σε καμία συνεκτική συνιστώσα του U. Έστω $z_1, z_2, \ldots$ οι ρίζες της f με τάξεις $k_1, k_2, \ldots$, και $w_1, w_2, \ldots$ οι ρίζες της g με τάξεις $m_1, m_2, \ldots$. Θέτουμε $h = \frac{f}{g}$. Τότε*

$$n(h \circ \gamma, 0) = \sum_j k_j n(\gamma, z_j) - \sum_j m_j n(\gamma, w_j).$$

Απόδειξη. Άσκηση. □

Θεώρημα 4.7 (**Το Θεώρημα του Rouche**). *Έστω ότι οι f και g ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4.5 και επιπλέον $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ για κάθε $z \in \gamma^*$. Τότε $n(f \circ \gamma, 0) = n(g \circ \gamma, 0)$. Επομένως, από την Αρχή του Ορίσματος, η f και η g έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών μέσα στο γ^* (λαμβανομένων υπόψη των τάξεων τους και των δεικτών τους).*

Απόδειξη. Σε μια περιοχή του γ^* έχουμε $g = f f_1$, όπου

$$f_1 = 1 + \frac{g - f}{f}.$$

Η f_1 δεν είναι ποτέ μηδέν στο γ^* από υπόθεση. Επίσης έχουμε $|f_1(z) - 1| < \delta$, για κάθε $z \in \gamma^*$, όπου $0 < \delta < 1$. Τώρα

$$n(g \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}dz$$
$$= n(f\circ\gamma, 0) + n(f_1\circ\gamma, 0).$$

Αλλά το $f_1\circ\gamma$ είναι ένα κλειστό μονοπάτι στο απλά συνεκτικό ανοιχτό σύνολο $D(1,\delta)$ και $0 \notin D$. Άρα $n(f_1\circ\gamma, 0) = 0$. □

3. Το Θεώρημα Ανοιχτής Απεικόνισης

Σκοπός μας σ'αυτήν την ενότητα είναι να δείξουμε ότι μια μη σταθερή αναλυτική συνάρτηση απεικονίζει ανοιχτά σύνολα σε ανοιχτά σύνολα. Κατ'αρχήν χρειαζόμαστε κάποιες πληροφορίες σχετικά με τον αριθμό των λύσεων της εξίσωσης $f(z) = w$, όπου το w είναι σταθεροποιημένο και το z κινείται σε μια περιοχή μιας ρίζας της f.

Πρόταση 4.4. *Έστω ότι η f είναι αναλυτική και όχι σταθερή στο $D(z_0, r)$. Υποθέτουμε ότι το z_0 είναι ρίζα τάξης k της f. Επιλέγουμε r_1 αρκετά μικρό ώστε ούτε η f ούτε η f' να μηδενίζονται για $0 < |z - z_0| \le r_1$ (αν αυτό δεν είναι δυνατό τότε το σύνολο των ριζών είτε της f είτε της f' έχει σημείο συσσώρευσης, επομένως η f είναι σταθερή, άτοπο).*

Θέτουμε $m = \min\{|f(z)| : |z - z_0| = r_1\}$. Αν $0 < |w| < m$, τότε υπάρχουν ακριβώς k σημεία $z \in D(z_0, r_1)$ τέτοια ώστε $f(z) = w$.

Απόδειξη. Έστω $\gamma(t) = z_0 + r_1 e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Τότε $|f(z)| \ge m > |w|$ στο γ^*, επομένως από το Θεώρημα Rouche
$$n(f\circ\gamma, 0) = n((f - w)\circ\gamma, 0).$$
Τώρα από υπόθεση, η f έχει μια μόνο ρίζα τάξης k μέσα στο γ^*. Άρα από την Αρχή του Ορίσματος, $n(f\circ\gamma, 0) = k$. Από την άλλη μεριά, πάλι η Αρχή του Ορίσματος μας λέει ότι
$$n((f - w)\circ\gamma, 0) = \sum_j k_j n(\gamma, z_j),$$
όπου τα z_j είναι οι ρίζες της $f - w$ μέσα στο γ^* (άρα $n(\gamma, z_j) = 1$) με τάξεις k_j. Αν υπήρχαν λιγότερα από k τέτοια σημεία, τότε κάποιο z_j θα είχε τάξη μεγαλύτερη από 1. Αλλά τότε $f'(z_j) = 0$, άρα κατ'ανάγκη $z_j = z_0$, το οποίο είναι άτοπο διότι $f(z_0) = 0 \ne w$. □

Πρόταση 4.5. *Έστω f αναλυτική και όχι σταθερή στο $D(z_0, r)$. Υποθέτουμε ότι το z_0 είναι ρίζα τάξης k της f. Τότε υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset D(z_0, r)$ με $z_0 \in U$ τέτοιο ώστε για κάθε $z \in U \setminus \{z_0\}$*

1. *$f(z) \ne 0$.*
2. *Υπάρχουν ακριβώς k σημεία $z' \in U \setminus \{z_0\}$ τέτοια ώστε $f(z) = f(z')$. Με άλλα λόγια η f παίρνει κάθε τιμή της στο $U \setminus \{z_0\}$ ακριβώς k φορές (ισοδύναμα, η f είναι «k-1» στο $U \setminus \{z_0\}$).*

Απόδειξη. Έστω $D(z_0, r_1)$ και m όπως στην Πρόταση 4.4. Θέτουμε $U = D(z_0, r_1) \cap f^{-1}(D(0, m))$. Αν $z \in U \setminus \{z_0\}$, τότε $f(z) \ne 0$, από την επιλογή του r_1. Επιπλέον, $0 < |f(z)| < m$, άρα από την Πρόταση 4.4, υπάρχουν ακριβώς k σημεία $z' \in D(z_0, r_1)$ με $f(z) = f(z')$. Εφόσον $0 < |f(z')| < m$, όλα τα z' ανήκουν στο $U \setminus \{z_0\}$. □

Είμαστε τώρα σε θέση να προσδιορίσουμε πότε μια αναλυτική συνάρτηση είναι τοπικά 1-1.

Πρόταση 4.6. *Έστω f αναλυτική στο z_0. Αν $f'(z_0) \neq 0$, τότε υπάρχει μια περιοχή του z_0 στην οποία η f είναι 1-1. Αν $f'(z_0) = 0$, τότε η f δεν μπορεί να είναι 1-1 σε καμία περιοχή του z_0.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 4.5 στην $f(z) - f(z_0)$, παρατηρώντας ότι το z_0 είναι ρίζα τάξης 1 αν $f'(z_0) \neq 0$ και τάξης $k > 1$ αν $f'(z_0) = 0$. □

Θεώρημα 4.8 (**Το Θεώρημα Ανοιχτής Απεικόνισης**). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, και $g : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική, όχι σταθερή σε καμία συνεκτική συνιστώσα του U. Αν το V είναι ανοιχτό υποσύνολο του U, τότε το $g(V)$ είναι ανοιχτό (στο $\mathbb{C}$).*

Απόδειξη. Έστω $g(z_0) \in g(V)$, $z_0 \in V$. Θέτουμε $f(z) = g(z) - g(z_0)$ και επιλέγουμε r ώστε $D(z_0, r) \subset V$. Από υπόθεση και Αρχή Ταυτότητας, η f δεν είναι σταθερή στο $D(z_0, r)$. Ορίζουμε τα $D(z_0, r_1)$ και m όπως στην Πρόταση 4.4. Τότε $D(0, m) \subset f(V)$, επομένως $D(g(z_0), m) \subset g(V)$. Άρα το $g(V)$ είναι ανοιχτό. □

Πόρισμα 4.1. *Έστω g αναλυτική και 1-1 στο ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{C}$. Τότε η αντίστροφη g^{-1} είναι αναλυτική στο ανοιχτό σύνολο $g(U)$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Ανοιχτής Απεικόνισης, η g είναι ανοιχτή, επομένως η g^{-1} είναι συνεχής. Το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα 2.3. □

4. Αναλυτικές απεικονίσεις ενός δίσκου σ'έναν άλλο

Σ'αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά μιας αναλυτικής συνάρτησης η οποία απεικονίζει ένα δίσκο σε κάποιον άλλο. Κατάλληλοι γραμμικοί κλασματικοί μετασχηματισμοί, δηλαδή απεικονίσεις της μορφής

$$\frac{az+b}{cz+d}, \ ad - bc \neq 0$$

αποτελούν τα βασικά παραδείγματα. Τα αποτελέσματα που θα δείξουμε, ουσιαστικά, θα μας επιτρέψουν να συγκρίνουμε μια δεδομένη αναλυτική συνάρτηση μ'έναν τέτοιο μετασχηματισμό.

Λήμμα 4.5. *Αν $|a| < 1$, θέτουμε*

$$f(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

Τότε η f είναι μια 1-1 και επί αναλυτική απεικόνιση του $D(0,1)$ στον εαυτό του. Επιπλέον, η f απεικονίζει 1-1 και επί το $\{z : |z| = 1\}$ στον εαυτό του.

Απόδειξη. Η f είναι προφανώς 1-1. Εφόσον $|a| < 1$, η f είναι αναλυτική στο $D(0,1)$. Αν τώρα $|z| = 1$, τότε $|z - a| = |z||1 - a\overline{z}|$, επομένως $|f(z)| = 1$. Η αντίστροφη της f είναι

$$g(w) = \frac{w+a}{1+\overline{a}w}.$$

Επομένως $|g(w)| = 1$ όταν $|w| = 1$. Άρα η f απεικονίζει το $\{z : |z| = 1\}$ 1-1 και επί στον εαυτό του.

Από την Αρχή του Μεγίστου, η f απεικονίζει το $D(0,1)$ στον εαυτό του, και ομοίως για την g. Αλλά $g(D) \subset D$ συνεπάγεται $D \subset f(D)$, άρα η f είναι επί. □

Λήμμα 4.6. *Θέτουμε*

$$f(z) = \frac{R(z-z_0)}{R^2 - \overline{z}_0 z}, \ |z_0| < R.$$

Τότε f η είναι μια 1-1 και επί αναλυτική συνάρτηση του $D(0,R)$ στο $D(0,1)$. Επίσης, η f απεικονίζει το $\{z : |z| = R\}$ 1-1 και επί στο $\{z : |z| = 1\}$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 4.5 για τη συνάρτηση

$$g(z) = \frac{z - (z_0/R)}{1 - (\overline{z}_0 z/R)}$$

και παρατηρούμε ότι

$$f(z) = g\left(\frac{z}{R}\right).$$

□

Τα επόμενα τρία αποτελέσματα είναι γνωστά με το όνομα **Λήμμα του Schwarz**.

Θεώρημα 4.9. *Έστω f μια αναλυτική απεικόνιση του $D = D(0,1)$ στον εαυτό του, με $f(0) = 0$. Τότε $|f(z)| \leq |z|$ για κάθε $z \in D$ και $|f'(0)| \leq 1$. Επιπλέον, αν $|f(z_0)| = |z_0|$ για κάποιο $z_0 \in D$, $z_0 \neq 0$, ή αν $|f'(0)| = 1$, τότε η f είναι της μορφής $f(z) = az$ για κάποιο $a \in \mathbb{C}$ με $|a| = 1$.*

Απόδειξη. Θέτουμε

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & z \neq 0 \\ f'(0), & z = 0 \end{cases}.$$

Από το Πόρισμα 2.2, η f είναι αναλυτική στο D. Αν $|z| = r < 1$, τότε $|g(z)| \leq 1/r$, επομένως από την Αρχή του Μεγίστου, $|g(z)| \leq 1/r$, όταν $|z| \leq r$. Για $r \to 1$ παίρνουμε $|g(z)| \leq 1$, δηλαδή $|f(z)| \leq |z|$, $z \in D$. Αν $|g(z_0)| = 1$ για κάποιο $z_0 \in D$, τότε $|g(z_0)| = \sup\{|g(z)| : z \in D\}$. Επομένως από την Αρχή του Μεγίστου, η g είναι σταθερή στο D. Τότε όμως $f(z) = az$, για κάποιο a με $|a| = 1$. □

Θεώρημα 4.10. *Έστω f μια αναλυτική απεικόνιση του $D(0,R)$ στο $D(0,M)$ με $f(z_0) = w_0$, $|z_0| < R$, $|w_0| < M$. Τότε*

$$\left|\frac{M(f(z) - w_0)}{M^2 - \overline{w}_0 f(z)}\right| \leq \left|\frac{R(z - z_0)}{R^2 - \overline{z}_0 z}\right|,$$

για όλα τα $z \in D(0,R)$.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$T(z) = \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \overline{z}_0 z},\ S(w) = \frac{M(w - w_0)}{M^2 - \overline{w}_0 w}.$$

Τότε η $S \circ f \circ T^{-1}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4.9, επομένως $|S \circ f \circ T^{-1}(z_1)| \leq |z_1|$, για $|z_1| < 1$, και άρα, $|S(f(z))| \leq |T(z)|$, για $|z| < R$. □

Παρατηρήσεις:

(1) Αν στο προηγούμενο θεώρημα έχουμε ισότητα σε κάποιο σημείο (διαφορετικό από το z_0), τότε από το Θεώρημα 4.9, έχουμε $S \circ f \circ T^{-1}(z) = az$, με $|a| = 1$, δηλαδή

$$f(z) = S^{-1}(aT(z)).$$

Ιδιαίτερα, η f είναι ένας γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός.

(2) Εφόσον

$$T'(z_0) = \frac{R}{R^2 - |z_0|^2},$$

έπεται ότι

$$(S \circ f \circ T^{-1})'(0) = \frac{M}{R} f'(z_0) \left(\frac{R^2 - |z_0|^2}{M^2 - |f(z_0)|^2} \right).$$

Από το Θεώρημα 4.9, η παραπάνω ποσότητα είναι, σε απόλυτη τιμή, το πολύ 1. Αν η απόλυτη τιμή είναι ίση με 1, τότε η f είναι ένας γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός, όπως στην προηγούμενη παρατήρηση.

Θεωρημα 4.11. *Έστω f μια αναλυτική απεικόνιση του $D(0,R)$ στον $D(0,M)$, με $f(z_0) = 0$ για κάποιο $z_0 \in D(0,R)$. Τότε*

$$|f(z)| \leq M \left| \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \overline{z}_0 z} \right|,$$

για όλα τα $z \in D(0,R)$.

Αν έχουμε ισότητα για κάποιο $z \neq z_0$, ή αν

$$\frac{|f'(z_0)(R^2 - |z_0|^2)|}{MR} = 1,$$

τότε η f είναι της μορφής

$$f(z) = aM \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \overline{z}_0 z},$$

με $|a| = 1$.

Αποδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός έπεται από το Θεώρημα 4.10 για $w_0 = 0$. Η υπόθεση του δεύτερου ισχυρισμού συνεπάγεται, από τις παρατηρήσεις παραπάνω, ότι $f(z) = S^{-1}(aT(z))$. Αλλά $S(w) = w/M$, ισοδύναμα, $S^{-1}(z) = Mz$, και το συμπέρασμα έπεται. □

5. Μια επέκταση του Θεωρήματος του Cauchy και του Ολοκληρωτικού Τύπου του Cauchy

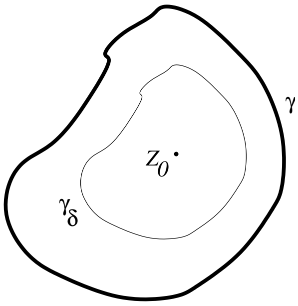
Θα αποδείξουμε μια έκδοση του Θεωρήματος και του ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy για συναρτήσεις οι οποίες είναι αναλυτικές σ'ένα τόπο το σύνορο του οποίου είναι ένα κλειστό μονοπάτι, και συνεχείς στην κλειστότητα του τόπου.

Θεωρημα 4.12. *Έστω U ένα ανοιχτό, συνεκτικό, απλά συνεκτικό και φραγμένο υπσύνολο του $\mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι:*

(1) *Υπάρχει ένα κλειστό μονοπάτι γ της μορφής $\gamma(t) = z_0 + \gamma_1(t)$, $a \leq t \leq b$, τέτοιο ώστε $\gamma^* = \partial U$.*
(2) *Αν $0 \leq \delta < 1$, τότε $z_0 + \delta\gamma_1(t) \in U$ για όλα τα $t \in [a,b]$.*

Τότε για κάθε $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο U και συνεχή στο $\overline{U}$, έχουμε $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Αποδειξη. Έστω $\gamma_\delta(t) = z_0 + \delta\gamma_1(t)$, $0 < \delta < 1$. Τότε $\int_{\gamma_\delta} f(z)dz = 0$, από το Θεώρημα 3.3.



Τώρα,

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)dz\right| &= \left|\int_\gamma f(z)dz - \int_{\gamma_\delta} f(z)dz\right| \\ &= \left|\int_a^b f(z_0+\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt - \int_a^b f(z_0+\delta\gamma_1(t))\delta\gamma_1'(t)dt\right| \\ &\le \left|\int_a^b [f(z_0+\gamma_1(t)) - f(z_0+\delta\gamma_1(t))]\gamma_1'(t)dt\right| \\ &+ \left|\int_a^b f(z_0+\delta\gamma_1(t))\gamma_1'(t)(1-\delta)dt\right|.\end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος τείνει στο 0 καθώς $\delta \to 1$ εφόσον η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\overline{U}$, και ο δεύτερος όρος τείνει στο 0 καθώς $\delta \to 1$, διότι η f είναι φραγμένη στο $\overline{U}$. □

Θεωρημα 4.13. *Με τις υποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος, για κάθε* $z \in U$ *έχουμε*

$$f(z)n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Αποδειξη. Επαναλαμβάνουμε κατά λέξη το επιχείρημα της απόδειξης του Θεωρήματος 3.4, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.12 στη θέση του Θεωρήματος 3.1. □

6. Ο Ολοκληρωτικός Τύπος του Poisson και το Πρόβλημα Dirichlet

Ο σκοπός μας στην ενότητα αυτή είναι να λύσουμε το πρόβλημα Dirichlet για τον δίσκο, δηλαδή να κατασκευάσουμε μια λύση της εξίσωσης Laplace δεδομένων κάποιων συνοριακών τιμών. Το βασικό εργαλείο είναι ο ολοκληρωτικός τύπος του Poisson, ο οποίος μπορεί να θεωρηθεί το ανάλογο του ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy για πραγματικές συναρτήσεις.

Ξεκινάμε μ'ένα υπολογιστικό λήμμα.

Λημμα 4.7. *Αν* $z = re^{i\theta}$, $0 \le r < R$, *τότε*

$$\operatorname{Re}\left[\frac{Re^{it}+z}{Re^{it}-z}\right] = \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-t)+r^2} = \frac{R^2-r^2}{|Re^{it}-z|^2}.$$

Αποδειξη. Θέτουμε $w = z/R$. Τότε

$$\frac{1+we^{-it}}{1-we^{-it}} = \frac{(1+we^{-it})(1-\overline{w}e^{it})}{|1-we^{-it}|^2} = \frac{1-\frac{r^2}{R^2}+2i\mathrm{Im}\,(we^{-t})}{\left|1-\frac{z}{R}e^{-it}\right|^2}.$$

Στην παραπάνω ισότητα παίρνουμε πραγματικά μέρη, χρησιμοποιούμε τον Νόμο των Συνημιτόνων, και τελειώσαμε. □

Εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό.

$$P_r(x) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos x + r^2}, \ 0 \le r < R, \ x \in \mathbb{R},$$

$$Q_z(t) = \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z}, \ |z| < R, \ t \in \mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση P_r ονομάζεται **πυρήνας Poisson**.

Θα αποδείξουμε τώρα τον Ολοκληρωτικό Τύπο του Poisson, σύμφωνα με τον οποίο, η τιμή μιας αναλυτικής συνάρτησης σ'ένα σημείο στο εσωτερικό ενός δίσκου είναι η «μέση τιμή με βάρη» των τιμών της στο σύνορο του δίσκου, όπου τα βάρη δίνονται από τον πυρήνα Poisson.

Θεωρημα 4.14 (**Ο Ολοκληρωτικός Τύπος του Poisson**). *Έστω f αναλυτική στον $D(z_0, R)$ και συνεχής στον $\overline{D}(z_0, R)$. Τότε για $z = z_0 + re^{i\theta}$, $0 \le r < R$, έχουμε*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f(z_0 + Re^{it})dt.$$

Αν $u = \operatorname{Re} f$, τότε

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) u(z_0 + Re^{it})dt.$$

Αποδειξη. Έστω $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Από το Θεώρημα 4.13 έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}dw. \tag{4.3}$$

Θέτουμε $z_1 = z_0 + \dfrac{R^2}{\overline{z} - \overline{z}_0}$. Εφόσον το z_1 βρίσκεται εκτός του γ^*, το Θεώρημα 4.13 δίνει

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z_1}dw = 0. \tag{4.4}$$

Αφαιρώντας την (4.4) από την (4.3) παίρνουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) \left[\frac{1}{Re^{it} - re^{i\theta}} - \frac{1}{Re^{it} - \frac{R^2}{r}e^{i\theta}}\right] Re^{it}dt.$$

Αλλά

$$\frac{Re^{it}}{Re^{it} - re^{i\theta}} - \frac{Re^{it}}{Re^{it} - \frac{R^2}{r}e^{i\theta}} = \frac{R}{R - re^{i(\theta - t)}} + \frac{re^{i(t-\theta)}}{R - re^{i(t-\theta)}} = P_r(\theta - t).$$

□

Πορισμα 4.2.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)dt = 1.$$

Αποδειξη. Παίρνουμε $f = 1$ στο Θεώρημα 4.14. □

Είμαστε τώρα έτοιμοι για το βασικό αποτέλεσμα.

Θεωρημα 4.15 (**Το Πρόβλημα Dirichlet**). *Έστω u_0 μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στον κύκλο $\{z : |z - z_0| = R\}$. Ορίζουμε*

$$u(z_0 + re^{i\theta}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)u_0(z_0 + Re^{it})dt, & 0 \le r < R \\ u_0(z_0 + Re^{i\theta}), & r = R \end{cases}.$$

Τότε

(1) *Στον δίσκο $D(z_0, R)$, η u είναι το πραγματικό μέρος μιας αναλυτικής συνάρτησης και επομένως ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(2) *Η u είναι συνεχής στο $\overline{D}(z_0, R)$.*

Αποδειξη. Για $z = re^{i\theta}$, $0 \le r < R$, θέτουμε

$$f(z_0 + z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_z(t)u_0(z_0 + Re^{it})dt.$$

Τώρα,

$$Q_z(t) = -1 + \frac{2Re^{it}}{Re^{it} - z},$$

επομένως η $f(z_0 + z)$ είναι ίση με μια σταθερά συν

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R} \frac{2u_0(z_0 + w)}{w - z}dw.$$

Από την Πρόταση 2.8, η f είναι αναλυτική, και επομένως συνεχής στο $D(z_0, R)$. Από το Λήμμα 4.7, $\operatorname{Re} f = u$ στον $D(z_0, R)$ και η απόδειξη του (1) είναι πλήρης.

Τώρα έστω $g(t) = u_0(z_0 + Re^{it})$. Από τον Ολοκληρωτικό Τύπο του Poisson και το Πόρισμα 4.2 έχουμε

$$\begin{aligned} |u(z_0 + re^{i\theta}) - u(z_0 + Re^{i\theta})| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)[g(t) - g(\theta)]dt\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)|g(x + \theta) - g(\theta)|dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} P_r(x)|g(x + \theta) - g(\theta)|dx \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{\substack{|x| \ge \delta \\ |x| \le \pi}} P_r(x)|g(x + \theta) - g(\theta)|dx. \end{aligned}$$

Για δεδομένο $\epsilon > 0$, επιλέγουμε δ τόσο μικρό ώστε αν $|x| < \delta$ τότε $|g(x+\theta) - g(\theta)| < \epsilon$, για όλα τα θ. Η παραπάνω έκφραση είναι τότε μικρότερη από

$$\epsilon + \frac{P_r(\delta)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(x + \theta) - g(\theta)|dx \le \epsilon + 2kP_r(\delta),$$

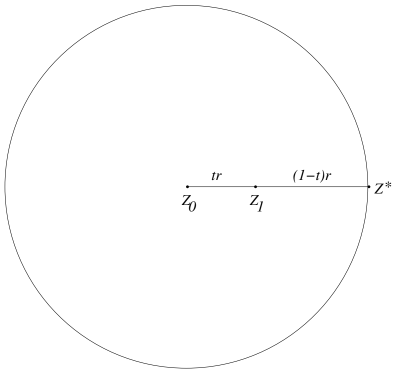
όπου k είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $|g|$. Εφόσον $P_r(\delta) \to 0$ καθώς $r \to R$, έπεται ότι $u(z_0 + re^{i\theta}) \to u(z_0 + Re^{i\theta})$ ομοιόμορφα ως προς θ. Επίσης, $u(z_0 + r'e^{i\theta}) \to u(z_0 + re^{i\theta})$ καθώς $r' \to r < R$, ομοιόμορφα ως προς θ, από το (1). Αλλά $u(z_0 + re^{i\theta'}) \to u(z_0 + re^{i\theta})$ καθώς $\theta' \to \theta$ για κάθε δεδομένο r, $0 \le r \le R$.

Επομένως η $u(z_0 + re^{i\theta})$ είναι από κοινού συνεχής ως προς (r, θ), $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le R$. Συμπεραίνουμε ότι η u είναι συνεχής στο $\overline{D}(z_0, R)$. $\square$

7. Αναλυτική συνέχιση και το Θεώρημα Μονοδρομίας

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε το πρόβλημα της επέκτασης του πεδίου ορισμού μιας αναλυτικής συνάρτησης.

Ορισμος 4.5. *Έστω $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, με ακτίνα σύγκλισης r, $0 < r < \infty$. Έστω z^* ένα σημείο τέτοιο ώστε $|z^* - z_0| = r$ και έστω $r(t)$ η ακτίνα σύγκλισης του αναπτύγματος της f γύρω από το σημείο $z_1 = (1-t)z_0 + tz^*$, $0 < t < 1$. Τότε $r(t) \ge (1-t)r$. Αν $r(t) = (1-t)r$ για κάποιο $t \in (0,1)$, ούτως ώστε δεν υπάρχει συνάρτηση g αναλυτική σ'ένα ανοιχτό συνολο το οποίο να περιέχει το $D(z_0, r) \cup \{z^*\}$ και τέτοια ώστε $g = f$ στο $D(z_0, r)$, τότε το z^* λέγεται* **ιδιάζον σημείο** *της f.*



Είναι χρήσιμο να έχουμε μια σχέση ανάμεσα στο ανάπτυγμα της f γύρω από το z_1 και το ανάπτυγμα της f γύρω από το z_0.

Λημμα 4.8. *Έστω f όπως στον Ορισμό 4.5. Αν $z_1 \in D(z_0, r)$, τότε το ανάπτυγμα Taylor της f γύρω από το σημείο z_1 είναι*

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_1)^k,$$

όπου

$$b_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (z_1 - z_0)^{n-k}.$$

Αποδειξη.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1 + z_1 - z_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z - z_1)^k (z_1 - z_0)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} (z_1 - z_0)^{n-k} \right) (z - z_1)^k.
\end{aligned}$$

Μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά της άθροισης διότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |z - z_1|^k |z_1 - z_0|^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|z - z_1| + |z_1 - z_0|)^n < \infty,$$

αν $|z - z_1| + |z_1 - z_0| < r$. □

Θα δείξουμε ότι πάντα υπάρχει τουλάχιστο ένα ιδιάζον σημείο πάνω στον κύκλο σύγκλισης. Κατ'αρχήν εξετάζουμε μια ειδική περίπτωση.

Θεωρημα 4.16. *Στον Ορισμό 4.5, αν τα a_n είναι πραγματικά και μη αρνητικά, τότε το σημείο $z_0 + r$ είναι ένα ιδιάζον σημείο.*

Αποδειξη. Αν $r(t) > (1-t)r$, τότε το ανάπτυγμα Taylor της f γύρω από το σημείο $z_1 = (1-t)z_0 + t(z_0 + r) = z_0 + tr$ συγκλίνει σε κάποιο σημείο $z = z_1 + h$, όπου h κάποιος θετικός πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος από $(1-t)r$. Επομένως, από το Λήμμα 4.8, η ποσότητα

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} (z_1 - z_0)^{n-k} \right) (z - z_1)^k$$

είναι πεπερασμένη για κάθε τέτοιο z. Αλλά αυτή είναι μια διπλή σειρά μη αρνητικών αριθμών και επομένως μπορούμε πάντοτε να εναλλάξουμε τη σειρά της άθροισης. Επομένως και η ποσότητα

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

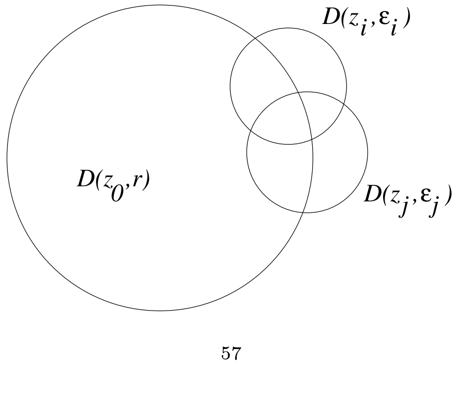
είναι πεπερασμένη. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι υποθέσαμε ότι η ακτίνα σύγκλισης του αναπτύγματος της f γύρω από το σημείο z_0 είναι r. □

Θεωρημα 4.17. *Στον Ορισμό 4.5, έστω $\Gamma = \{z : |z - z_0| = r\}$ ο κύκλος της σύγκλισης. Τότε πάνω στον Γ υπάρχει τουλάχιστο ένα ιδιάζον σημείο της f.*

Αποδειξη. Αν το σημείο $z \in \Gamma$ δεν είναι ιδιάζον τότε υπάρχει μια συνάρτηση f_z αναλυτική σ'ένα δίσκο $D(z, \epsilon_z)$ τέτοια ώστε $f_z = f$ στο $D(z_0, r) \cap D(z, \epsilon_z)$. Υποθέτουμε ότι ο Γ δεν περιέχει ιδιάζοντα σημεία. Από συμπάγεια, ο Γ μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένο πλήθος τέτοιων δίσκων $D(z_i, \epsilon_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D(z_0, r) \\ f_{z_i}(z), & z \in D(z_i, \epsilon_i),\ i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Η g είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, αν $D(z_i, \epsilon_i) \cap D(z_j, \epsilon_j) \neq \emptyset$, τότε $D(z_i, \epsilon_i) \cap D(z_j, \epsilon_j) \cap D(z_0, r) \neq \emptyset$.



Τώρα $f_{z_i} - f_{z_j} = f - f = 0$ στο $D(z_i, \epsilon_i) \cap D(z_j, \epsilon_j) \cap D(z_0, r)$, επομένως από Αρχή Ταυτότητας, $f_{z_i} - f_{z_j} = 0$ στο $D(z_i, \epsilon_i) \cap D(z_j, \epsilon_j)$. Έτσι η g είναι αναλυτική στο δίσκο $D(z_0, s)$ για κάποιο $s > r$. Αλλά το ανάπτυγμα Taylor της g γύρω από το z_0 συμπίπτει με αυτό της f διότι $g = f$ στον $D(z_0, r)$. Δηλαδή το ανάπτυγμα της f συγκλίνει σ'ένα δίσκο ακτίνας μεγαλύτερης από r, άτοπο! $\square$

Θα κατασκευάσουμε παραδείγματα δυναμοσειρών για τα οποία ο κύκλος σύγκλισης είναι **φυσικό σύνορο**, δηλαδή κάθε σημείο του είναι ιδιάζον. Θα χρειαστούμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λημμα 4.9. *Έστω $f_1(w) = \frac{1}{2}(w^p + w^{p+1})$, όπου p είναι ένας θετικός ακέραιος. Θέτουμε $U = D(0,1) \cup D(1, \epsilon)$, $\epsilon > 0$. Τότε $f_1(D(0, r)) \subset U$, για κάποιο $r > 1$.*

Αποδειξη. Προφανώς $f_1(\overline{D}(0,1)) \subset \overline{D}(0,1)$. Αν τώρα $|w| \leq 1$ και $|f_1(w)| = 1$, τότε

$$|1 + w| = \frac{2}{|w|^p} \geq 2,$$

επομένως $w = 1$. Συνεπώς $f_1(\overline{D}(0,1)) \subset U$, και άρα ο κύκλος $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$ μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένο πλήθος δίσκων $D_1, D_2, \ldots, D_n$ ούτως ώστε $f_1(D_i) \subset U$, $i = 1, \ldots, n$. Εφόσον ο Γ έχει θετική απόσταση από το σύνολο $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, συμπεραίνουμε ότι $f(D(0, r)) \subset U$ για κάποιο $r > 1$. $\square$

Θεωρημα 4.18. *Έστω $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$. Υποθέτουμε ότι $a_k \neq 0$ και ότι υπάρχει $s > 0$ τέτοιο ώστε $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq s$ για όλα τα k. Αν η ακτίνα σύγκλισης της σειράς είναι 1, τότε κάθε σημείο πάνω στον κύκλο σύγκλισης είναι ιδιάζον.*

Αποδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι το 1 δεν είναι ιδιάζον. Τότε η f μπορεί να επεκταθεί σε μια συνάρτηση αναλυτική στο $U = D(0,1) \cup D(1, \epsilon)$, για κάποιο $\epsilon > 0$. Εφόσον $f = g$ στο $D(0,1)$, οι f και g έχουν το ίδιο ανάπτυγμα Taylor γύρω από το 0. Αν θέσουμε $h(w) = g(f_1(w))$, όπου $f_1(w) = \frac{1}{2}(w^p + w^{p+1})$, τότε από το Λήμμα 4.9, η h είναι αναλυτική στο $D(0, r)$ για κάποιο $r > 1$. Τώρα αν $|w| < 1$ έχουμε $|f_1(w)| < 1$, επομένως

$$\begin{aligned} h(w) = f(f_1(w)) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-n_k} (w^p + w^{p+1})^{n_k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-n_k} \sum_{n=0}^{n_k} \binom{n_k}{n} w^{(p+1)n} w^{p(n_k - n)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-n_k} \sum_{n=0}^{n_k} \binom{n_k}{n} w^{pn_k + n}. \end{aligned}$$

Για δεδομένο k, οι δυνάμεις του w που αναπαρίστανται είναι

$$pn_k, pn_k + 1, \ldots, (p+1)n_k.$$

Επιλέγουμε p τέτοιο ώστε

$$\frac{p+1}{p} < s,$$

επομένως

$$(p+1)n_k < psn_k \leq pn_{k+1}.$$

Δηλαδή οι δυνάμεις του w δεν επαναλμβάνονται και έτσι η παραπάνω έκφραση είναι το ανάπτυγμα Taylor της h γύρω απο το 0.

Η σειρά συγκλίνει απόλυτα για $w \in D(0,r)$, διότι η h είναι αναλυτική στο $D(0,r)$. Ας επιλέξουμε $w \in D(0,r)$ με $|w| > 1$. Τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| 2^{-n_k} \sum_{n=0}^{n_k} \binom{n_k}{n} |w|^{pn_k+n} < \infty,$$

δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| 2^{-n_k} (|w|^p + |w|^{p+1})^{n_k} < \infty.$$

Αλλά

$$\frac{1}{2}(|w|^p + |w|^{p+1}) = |w|^p \left(\frac{1+|w|}{2} \right) > 1,$$

δηλαδή το ανάπτυγμα Taylor της f συγκλίνει σε κάποιο σημείο έξω από το δίσκο $D(0,1)$, άτοπο.

Τέλος, αν το $z^* = e^{i\theta}$ δεν είναι ιδιάζον σημείο, θέτουμε

$$q(z) = f(e^{i\theta} z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\theta n_k} z^{n_k},$$

με ακτίνα σύγκλισης 1 όπως πριν, διότι $|e^{i\theta n_k}| = 1$. Τώρα η f επεκτείνεται σε μια συνάρτηση αναλυτική στο $D(0,1) \cup D(z^*, \epsilon)$ για κάποιο $\epsilon > 0$. Επομένως η q επεκτείνεται σε μια συνάρτηση αναλυτική στο $D(0,1) \cup D(1,\epsilon)$, άτοπο. $\square$

Τυπικά παραδείγματα τέτοιων σειρών είναι:

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^{2^k}, \ \sum_{k=1}^{\infty} z^{k!}.$$

Παρατηρήσεις:
Η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

αποκλίνει σε κάθε σημείο του κύκλου σύγκλισης. Παρολ'αυτά, το $z = 1$ είναι το μοναδικό ιδιάζον σημείο αφού η $(z-1)^{-1}$ είναι αναλυτική παντού εκτός από το σημείο αυτό. Απ'την άλλη, η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2^n}$$

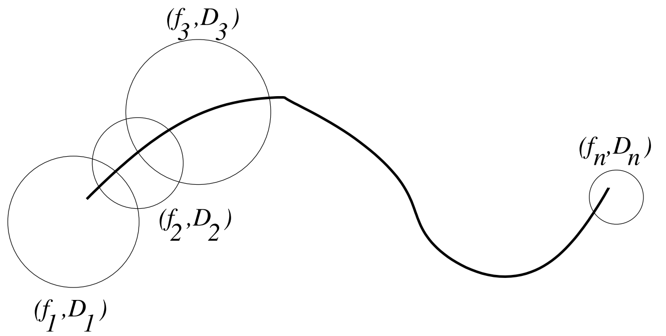
έχει ακτίνα σύγκλισης 1 και συγκλίνει σε κάθε σημείο του κύκλου σύγκλισης. Παρολ'αυτά, κάθε σημείο του κύκλου σύγκλισης είναι ιδιάζον από το προηγούμενο θεώρημα.

Τέλος παρατηρούμε ότι το συμπέρασμα του θεωρήματος αυτού ισχύει για κάθε (πεπερασμένη) ακτίνα σύγκλισης διότι αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$ έχει ακτίνα σύγκλισης r, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (rz)^{n_k}$ έχει ακτίνα σύγκλισης 1.

Θα εξετάσουμε τώρα «αλυσίδες» αναλυτικών συναρτήσεων που ορίζονται σε ανοιχτούς δίσκους.

Ορισμος 4.6. *Έστω U ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Ένα* **συναρτησιακό στοιχείο** *στο U είναι ένα ζευγάρι (f, D), όπου D είναι ένας δισκος στο U και f μια αναλυτική συνάρτηση στον D. Αν $z \in D$, τότε λέμε ότι το (f, D) είναι ένα συναρτησιακό στοιχείο στο z. Αν (f_1, D_1) και (f_2, D_2) είναι δυο συναρτησιακά στοιχεία στο U τότε λέμε ότι το (f_2, D_2) είναι* **άμεση αναλυτική συνέχιση** *του (f_1, D_1) (και αντίστροφα), αν $D_1 \cap D_2 \neq 0$ και $f_1 = f_2$ στο $D_1 \cap D_2$. Αν υπάρχει μια αλυσίδα (f_1, D_1), (f_2, D_2),...,(f_n, D_n) τέτοια ώστε το (f_{i+1}, D_{i+1}) είναι άμεση αναλυτική συνέχιση του (f_i, D_i) για $i = 1, 2, \ldots, n-1$, τότε λέμε ότι το (f_n, D_n) είναι* **αναλυτική συνέχιση** *του (f_1, D_1) (και αντίστροφα).*

Υποθέτουμε τώρα ότι γ είναι μια καμπύλη στο U, ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$. Αν υπάρχει μια διαμέριση $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, και μια αλυσίδα (f_1, D_1), (f_2, D_2), $\ldots$, (f_n, D_n) συναρτησιακών στοιχείων στο U τέτοια ώστε (f_{i+1}, D_{i+1}) είναι μια άμεση αναλυτική συνέχιση του (f_i, D_i), για $i = 1, \ldots, n-1$, και $\gamma(t) \in D_i$, για $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, n$, τότε λέμε ότι το (f_n, D_n) είναι μια αναλυτική συνέχιση του (f_1, D_1), **κατά μήκος της καμπύλης** *γ.*



Θεωρημα 4.19. *Η αναλυτική συνέχιση ενός δεδομένου συναρτησιακού στοιχείου κατά μήκος μιας δεδομένης καμπύλης είναι μοναδική, με την έννοια ότι αν (f_n, D_n) και (g_m, E_m) είναι δύο αναλυτικές συνεχίσεις του (f_1, D_1) κατά μήκος της ίδιας καμπύλης γ, τότε $f_n = g_m$ στο $D_n \cap E_m$.*

Αποδειξη. Έστω ότι η αλυσίδα για την πρώτη συνέχιση είναι

$$(f_1, D_1), \ldots, (f_n, D_n),$$

και έστω ότι η αλυσίδα για τη δεύτερη συνέχιση είναι

$$(g_1, E_1), \ldots, (g_m, E_m),$$

όπου $g_1 = f_1$, $E_1 = D_1$. Υπάρχουν διαμερίσεις

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,\ a = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = b,$$

τέτοιες ώστε $\gamma(t) \in D_i$ για $t_{i-1} \leq t \leq t_i$, $i = 1, \ldots, n$ και $\gamma(t) \in E_j$ για $s_{j-1} \leq t \leq s_j$, $j = 1, \ldots, m$.

Ισχυριζόμαστε ότι αν $[t_{i-1}, t_i] \cap [s_{j-1}, s_j] \neq \emptyset$ τότε το (f_i, D_i) είναι άμεση αναλυτική συνέχιση του (g_j, E_j). Αυτό αληθεύει όταν $i = j = 1$. Έστω ότι δεν αληθεύει για κάποια i, j. Έστω (i, j) εκείνο το ζευγάρι για το οποίο δεν αληθεύει και για το οποίο ο αριθμός $i + j$ είναι ελάχιστος. Ας πούμε ότι $s_{j-1} \leq t_{i-1}$. Τότε έχουμε $s_{j-1} \leq t_{i-1} \leq s_j$. Επομένως, $\gamma(t_{i-1}) \in D_{i-1} \cap D_i \cap E_j$. Τώρα το (f_i, D_i) είναι άμεση συνέχιση του (f_{i-1}, D_{i-1}), και επιπλέον το (f_{i-1}, D_{i-1}) είναι άμεση συνέχιση του (g_j, E_j), από την επιλογή των i, j. Αφού $D_{i-1} \cap D_i \cap E_j \neq \emptyset$, το (f_i, D_i) πρέπει να'ναι άμεση συνέχιση του (g_j, E_j), άτοπο. Επομένως ο ισχυρισμός αληθεύει για όλα τα i, j. Ιδιαίτερα για $i = n$, $j = m$ και το συμπέρασμα έπεται. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.7. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και συνεκτικό. Δύο συναρτησιακά στοιχεία (f_1, D_1), (f_2, D_2) λέγονται* ***ισοδύναμα*** *αν το ένα είναι αναλυτική συνέχιση του άλλου. Η σχέση αυτή ορίζει προφανώς μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο όλων των συναρτησιακών στοιχείων. Μια κλάση ισοδυναμίας Φ τέτοια ώστε για κάθε $z \in U$ υπάρχει $(f, D) \in \Phi$ με $z \in D$, λέγεται* ***γενικευμένη αναλυτική συνάρτηση*** *στο U.*

Παρατηρούμε ότι αν η g είναι αναλυτική στο U, τότε η g ορίζει μια γενικευμένη αναλυτική συνάρτηση:

$$\Phi = \{(g, D) : D \text{ ανοιχτός δίσκος στο } U\}.$$

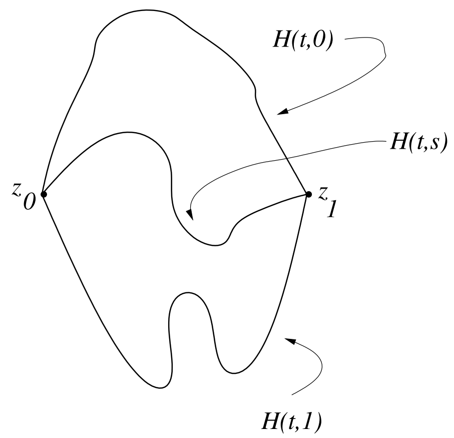
Το αντίστροφο δεν ισχύει. Δεν είναι αλήθεια ότι κάθε γενικευμένη αναλυτική συνάρτηση προκύπτει από μια (συνηθισμένη) αναλυτική συνάρτηση μ'αυτόν τον τρόπο (άσκηση!). Σκοπός μας είναι να βρούμε συνθήκες οι οποίες να εξασφαλίζουν ότι αυτό είναι δυνατό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.8. *Έστω γ_0, γ_1 δυο καμπύλες σ'ένα σύνολο $S \subset \mathbb{C}$ (για ευκολία, ας υποθέσουμε ότι το πεδίο ορισμού τους είναι το $[0,1]$). Υποθέτουμε ότι $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = z_0$ και $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = z_1$. Οι γ_0, γ_1 λέγονται* ***ομοτοπικές*** *(στο S), Αν υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $H : [0,1] \times [0,1] \to S$ (η* ***ομοτοπία*** *των γ_0 και γ_1) τέτοια ώστε*

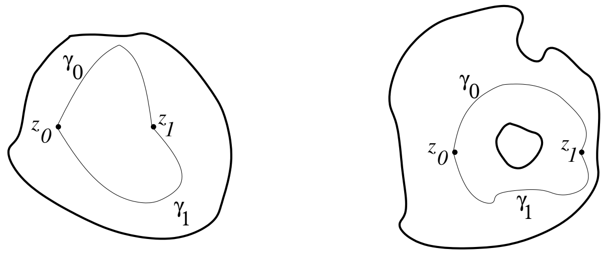
$$H(t,0) = \gamma_0(t),\ H(t,1) = \gamma_1(t),\ \forall t \in [0,1],$$

και

$$H(0,s) = z_0,\ H(1,s) = z_1,\ \forall s \in [0,1].$$



Διαισθητικά, οι καμπύλες γ_0 και γ_1 είναι ομοτοπικές στο U, αν με συνεχή τρόπο μπορούμε να «παραμορφώσουμε» την γ_0, με τα άκρα της σταθεροποιημένα, και να πάρουμε την γ_1, χωρίς να βγούμε έξω από το U. Στο πάνω σχήμα η $H(t,s)$ απεικονίζει την παραμόρφωση σε «χρόνο s». Στο κάτω σχήμα βλέπουμε δύο καμπύλες οι οποίες είναι ομοτοπικές σε κάποιο χωρίο (αριστερά), και δύο καμπύλες οι οποίες δεν είναι ομοτοπικές. Η «τρύπα» μας εμποδίζει να παραμορφώσουμε την πρώτη και να πάρουμε τη δεύτερη χωρίς να ξεφύγουμε από το χωρίο (δεξιά).



Θεωρημα 4.20. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και συνεκτικό, γ_1,γ_2 ομοτοπικές καμπύλες στο U, με αρχικό σημείο z_0, και έστω (f, D) ένα συναρτησιακό στοιχείο στο z_0. Υποθέτουμε ότι το (f, D) έχει αναλυτική συνέχιση κατά μήκος όλων των δυνατών καμπύλων στο U, δηλαδή, αν γ είναι μια καμπύλη που συνδέει το z_0 με το τυχόν $z_n \in U$, τότε υπάρχει μια αναλυτική συνέχιση (f_n, D_n) του (f, D) κατά μήκος της γ.*

Αν (g_0, D_0) είναι μια αναλυτική συνέχιση του (f, D) κατά μήκος της γ_0 και (g_1, D_1) είναι μια αναλυτική συνέχιση του (f, D) κατά μήκος της γ_1, τότε $g_0 = g_1$ στο $D_0 \cap D_1$.

Αποδειξη. Έστω H μια ομοτοπία των γ_0 και γ_1. Από υπόθεση, αν $s \in [0, 1]$, υπάρχει μια αναλυτική συνέχιση του (f, D), ας πούμε (g_s, D_s), κατά μήκος της καμπύλης $\gamma_s = H(\cdot, s)$. Σταθεροποιούμε ένα s και διαλέγουμε μια τέτοια αναλυτική συνέχιση, έστω $(h_1, E_1), \ldots, (h_n, E_n)$ με $(h_1, E_1) = (f, D)$ και $(h_n, D_n) = (g_s, D_s)$.

Υπάρχει μια διαμέριση $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ τέτοια ώστε $\gamma_s(t) \in E_i$ για $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Έστω $K_i = \gamma_s([t_{i-1}, t_i]) \subset E_i$. Θέτουμε

$$\epsilon = \min\{\mathrm{dist}(K_i, \mathbb{C} \setminus E_i) : 1 \leq i \leq n\} > 0.$$

Εφόσον η H είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $|s - s'| < \delta$ τότε $|\gamma_s(t) - \gamma_{s'}(t)| < \epsilon$ για κάθε $t \in [0, 1]$. Ιδιαίτερα, αν $t \in [t_{i-1}, t_i]$ τότε $\gamma_{s'}(t) \in E_i$.

Έτσι η $(h_1, E_1), \ldots, (h_n, E_n)$ είναι μια αναλυτική συνέχιση του (f, D) κατά μήκος της $\gamma_{s'}$. Αλλά το (f, D) μπορεί να συνεχιστεί, κατά μήκος της $\gamma_{s'}$, από ένα συναρτησιακό στοιχείο, ας πούμε $(g_{s'}, D_{s'})$. Από το Θεώρημα 4.19, έχουμε ότι $g_s = g_{s'}$ στο $D_s \cap D_{s'}$. Συνεπώς για κάθε $s \in [0, 1]$, υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα I_s τέτοιο ώστε $g_{s'} = g_s$ στο $D_{s'} \cap D_s$, όταν $s' \in I_s$. Αφού το $[0, 1]$ μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένο πλήθος τέτοιων διαστημάτων, έπεται ότι $g_0 = g_1$ στο $D_0 \cap D_1$. □

Θεωρημα 4.21 (**Το Θεώρημα Μονοδρομίας**). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και συνεκτικό με την ιδιότητα ότι κάθε κλειστή καμπύλη στο U είναι ομοτοπική με την αρχή της (θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι το U είναι απλά συνεκτικό).*

Έστω Φ μια γενικευμένη αναλυτική συνάρτηση στο U. Υποθέτουμε κάθε στοιχείο της Φ έχει αναλυτική συνέχιση κατά μήκος όλων των δυνατών καμπύλων στο U. Τότε υπάρχει μια αναλυτική συνάρτηση $g : U \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε αν $(f, D) \in \Phi$, τότε $g = f$ στο D. Δηλαδή η Φ καθορίζεται πλήρως από μία μόνο αναλυτική συνάρτηση.

Αποδειξη. Έστω $z \in U$, τότε υπάρχει ένα συναρτησιακό στοιχείο $(f_z, D_z) \in \Phi$ τέτοιο ώστε $z \in D_z$. Θέτουμε $g(z) = f_z(z)$.

Πρέπει να δείξουμε ότι η g είναι καλά ορισμένη. Δηλαδή, αν $(f^*, D^*) \in \Phi$ και $z \in D^*$, πρεπει να δείξουμε ότι $f_z(z) = f^*(z)$. Αφού $(f_z, D_z), (f^*, D^*) \in \Phi$, το (f^*, D^*) είναι αναλυτική συνέχιση του (f_z, D_z). Εφόσον $z \in D_z \cap D^*$, υπάρχει μια καμπύλη γ στο U (στην πραγματικότητα, μια πολυγωνική γραμμή) με αρχή και τέλος το z, τέτοια ώστε το (f^*, D^*) να είναι αναλυτική συνέχιση του (f_z, D_z) κατά μήκος της γ. Από υπόθεση, η γ είναι ομοτοπική με την (εκφυλισμένη) καμπύλη $\gamma_0 = z$. Αφού το (f_z, D_z) είναι συνέχιση του (f_z, D_z) κατά μήκος της γ_0, έχουμε από το Θεώρημα 4.20 ότι $f_z = f^*$ στο $D_z \cap D^*$, ιδιαίτερα $f_z(z) = f^*(z)$. Αφού $f_z = g$ στο D_z, και το z είναι αυθαίρετο, έπεται ότι η g είναι αναλυτική σ'ολόκληρο το U. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Οικογένειες αναλυτικών συναρτήσεων

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε το γραμμικό χώρο $A(U)$ όλων των αναλυτικών συναρτήσεων σ'ένα ανοιχτό σύνολο U. Εισάγουμε μια μετρική d στο $A(U)$ με την ιδιότητα ότι η σύγκλιση ως προς την d είναι η ομοιόμορφη σύγκλιση πάνω στα συμπαγή υποσύνολα του U. Προσδιορίζουμε τα συμπαγή υποσύνολα του $A(U)$ και αποδεικνύουμε διάφορα ισχυρά αποτελέσματα σχετικά με σύγκλιση ακολουθιών αναλυτικών συναρτήσεων. Τέλος αποδεικνύουμε το Θεώρημα Σύμμορφης Απεικόνισης του Riemann, την ομοτοπική έκδοση του Θεωρήματος του Cauchy, το Θεώρημα Παραγοντοποίησης του Weierstraß, και μια σειρά από αποτελέσματα προσέγγισης και παρεμβολής.

1. Οι χώροι $A(U)$ και $C(U)$

Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό. Συμβολίζουμε με $A(U)$ το σύνολο όλων των αναλυτικών συναρτήσεων στο U και με $C(U)$ το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων στο U.

Θέτουμε

$$K_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n \text{ και } |z-w| \geq 1/n \text{ για όλα τα } w \in \mathbb{C} \setminus U\}.$$

Τότε η K_n είναι μια αύξουσα ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του U η ένωση της οποίας είναι το U. Επιπλέον, αν K είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του U, τότε το K έχει θετική Ευκλείδεια απόσταση από το $\mathbb{C} \setminus U$ και επομένως $K \subset K_n$ για αρκετά μεγάλο n.

Για $f, g \in C(U)$, ορίζουμε

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f-g\|_{K_n}}{1+\|f-g\|_{K_n}},$$

όπου $\|h\|_{K_n} = \sup\{|h(z)| : z \in K_n\}$. Μπορεί εύκολα κανείς να δείξει ότι η d ορίζει μια μετρική στο $C(U)$, άρα και στο $A(U)$.

Θεωρημα 5.1. *Έστω $f_j, f \in C(U)$, $j = 1, 2, \ldots$. Τότε $d(f_j, f) \to 0$ αν και μόνο αν $f_j \to f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του U.*

Αποδειξη. Έστω ότι $d(f_j, f) \to 0$. Τότε $\|f_j - f\|_{K_n} \to 0$ καθώς $j \to \infty$ για κάθε n. Αν K είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του U, τότε το K περιέχεται σε κάποιο K_n και επομένως $\|f_j - f\|_K \leq \|f_j - f\|_{K_n} \to 0$. Άρα $f_j \to f$ ομοιόμορφα στο K. Αντίστροφα, έστω ότι $f_j \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του U. Δεδομένου $\epsilon > 0$, επιλέγουμε N τέτοιο ώστε

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε j_0 τέτοιο ώστε για κάθε $j \geq j_0$

$$\frac{\|f_j - f\|_{K_n}}{1 + \|f_j - f\|_{K_n}} < \frac{\epsilon}{2}, \; n = 1, \ldots, N.$$

Τότε $d(f_j, f) < \epsilon$ για κάθε $j \geq j_0$. $\square$

Το επιχείρημα στην προηγούμενη απόδειξη δείχνει ότι αν η f_j είναι μια ακολουθία Cauchy στον $(C(U), d)$ τότε η f_j είναι ομοιόμορφα Cauchy στα συμπαγή υποσύνολα του U.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.2. *Ο χώρος $(C(U), d)$ είναι πλήρης, και το $A(U)$ ένα κλειστό υποσύνολό του. Επομένως ο $(A(U), d)$ είναι πλήρης.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω f_j μια ακολουθία Cauchy στον $(C(U), d)$. Τότε για κάθε $z \in U$ η $f_j(z)$ είναι μια ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{C}$. Επομένως υπάρχει $f : U \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $f_j(z) \to f(z)$ για κάθε $z \in U$. Αν K είναι οποιοδήποτε συμπαγές υποσύνολο του U και $\epsilon > 0$, τότε για κάποιο j_0 έχουμε $|f_i(z) - f_j(z)| \leq \epsilon$ για κάθε $z \in K$, αν $i, j \geq j_0$. Σταθεροποιώντας το i και αφήνοντας $j \to \infty$ παίρνουμε $|f_i(z) - f(z)| \leq \epsilon$ για κάθε $z \in K$, αν $j \geq j_0$. Επομένως $f_j \to f$ ομοιόμορφα στο K. Παίρνοντας το K να είναι ένας τυχόντας κλειστός δίσκος, βρίσκουμε ότι η f είναι συνεχής στο U. Έτσι ο $C(U)$ είναι πλήρης. Το ότι το $A(U)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $C(U)$ έπεται από την Πρόταση 2.10. $\square$

Αν $f_n \in A(U)$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του U, τότε $f \in A(U)$. Θα εξετάσουμε τώρα τις ιδιότητες της f κάτω από επιπλέον προϋποθέσεις για τις f_n.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.3 (**Το Θεώρημα του Hurwitz**). *Έστω $f_n, f \in A(U)$, $f_n \xrightarrow{d} f$. Υποθέτουμε ότι $\overline{D}(z_0, r) \subset U$ και ότι η f δεν μηδενίζεται στο $\{z : |z - z_0| = r\}$. Τότε υπάρχει ένας θετικός ακέραιος N τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq N$, οι f_n και f έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών στο $D(z_0, r)$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\epsilon = \min\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}$. Τότε για αρκετά μεγάλο n,

$$|f(z) - f_n(z)| < \epsilon \leq |f(z)|,$$

γαι $|z - z_0| = r$. Το συμπέρασμα έπεται τώρα από το Θεώρημα του Rouche. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.4. *Έστω $f_n, f \in A(U)$, $f_n \xrightarrow{d} f$. Αν το U είναι συνεκτικό και οι f_n δεν μηδενίζονται στο U, τότε είτε η f δεν μηδενίζεται, είτε η f είναι ταυτοτικά ίση με 0.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι $f(z_0) = 0$ και ότι η f δεν είναι ταυτοτικά ίση με 0. Τότε, από την Πρόταση 2.13 υπάρχει ένας κλειστός δίσκος $\overline{D}(z_0, r) \subset U$ τέτοιος ώστε η f δεν μηδενίζεται στο $\{z : |z - z_0| = r\}$. Από το Θεώρημα του Hurwitz έπεται ότι για μεγάλα n η f_n πρέπει να έχει ρίζα στο $D(z_0, r)$. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.5. *Έστω $f_n, f \in A(U)$, $f_n \xrightarrow{d} f$. Αν το U είναι συνεκτικό και όλες οι f_n είναι 1-1, τότε είτε η f είναι 1-1, είτε η f είναι σταθερή στο U.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $z_0 \in U$, και θέτουμε $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_0)$. Τότε $g_n \in A(U \setminus \{z_0\})$, $g_n \to f - f(z_0)$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $U \setminus \{z_0\}$. Επιπλέον, το $U \setminus \{z_0\}$ είναι συνεκτικό. Τώρα, οι g_n δεν μηδενίζονται στο $U \setminus \{z_0\}$, επομένως από το Θεώρημα 5.4, η $f - f(z_0)$ είτε δεν μηδενίζεται, είτε είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν στο $U \setminus \{z_0\}$. Αφού το z_0 ήταν τυχόν, το συμπέρασμα έπεται. $\square$

Θα προσδιορίσουμε τώρα τα συμπαγή υποσύνολα του $A(U)$.

Ορισμος 5.1. *Ένα σύνολο $F \subset C(U)$ λέγεται **ομοιόμορφα φραγμένο** αν για κάθε συμπαγές $K \subset U$,*

$$\sup\{\|f\|_K : f \in F\} < \infty,$$

δηλαδή, οι συναρτήσεις στο F είναι ομοιόμορφα φραγμένες σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του U.

Θεωρημα 5.6. *Έστω F ένα ομοιόμορφα φραγμένο υποσύνολο του $A(U)$. Τότε το F είναι **ισοσυνεχές** σε κάθε σημείο $z_0 \in U$, δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $z \in U$ και $|z - z_0| < \delta$, τότε $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ για κάθε $f \in F$.*

Αποδειξη. Έστω $\overline{D}(z_0, r) \subset U$. Αν $z \in D(z_0, r/2)$ και $f \in F$, τότε από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy, με $\Gamma = \{z : |z - z_0| = r\}$, έχουμε

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(w) \left[\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w - z_0} \right] dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}(z - z_0) \int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)(w-z_0)} dw. \end{aligned}$$

Θέτουμε $M = \sup\{\|f\|_\Gamma : f \in F\}$. Τότε

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} |z - z_0| M \frac{1}{(r^2/2)} 2\pi r$$

και το συμπέρασμα έπεται. □

Θεωρημα 5.7. *Έστω $F \subset C(U)$ ισοσυνεχές σε κάθε σημείο του U. Αν $f_n \in F$ και $f_n \to f$ κατά σημείο (δηλαδή $f_n(z) \to f(z)$ για κάθε $z \in U$), τότε $f \in C(U)$ και $f_n \xrightarrow{d} f$. Αν η $f_n(z)$ συγκλίνει μόνο για z σ'ένα πυκνό υποσύνολο του U, τότε η $f_n(z)$ συγκλίνει για κάθε $z \in U$, και από τα παραπάνω, το όριο f ανήκει στο $C(U)$, και $f_n \xrightarrow{d} f$.*

Αποδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Από ισοσυνέχεια, για κάθε $z \in U$ υπάρχει ένας δίσκος $D(z) \subset U$ με κέντρο το z τέτοιος ώστε αν $z' \in D(z)$ τότε $|f_n(z') - f_n(z)| \leq \epsilon/3$ για κάθε n. Παίρνοντας όρια καθώς $n \to \infty$ έχουμε $|f(z') - f(z)| \leq \epsilon/3$. Αυτό αποδεικνύει τη συνέχεια της f. Έστω τώρα $K \subset U$ συμπαγές. Τότε $K \subset \bigcup_{j=1}^m D(z_j)$ για κάποια $z_1, \ldots, z_m$. Επιλέγουμε n_0 τέτοιο ώστε $|f(z_j) - f_n(z_j)| \leq \epsilon/3$ για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε j. Αν $z \in K$ τότε το z ανήκει σε κάποιο $D(z_j)$. Αλλά

$$|f(z) - f_n(z)| \leq |f(z) - f(z_j)| + |f(z_j) - f_n(z_j)| + |f_n(z_j) - f_n(z)|.$$

Από τη συνέχεια της f και την ισοσυνέχεια των f_n, ο πρώτος και ο τρίτος όρος στο δεξιά μέλος της παραπάνω ανισότητας είναι το πολύ $\epsilon/3$ (για όλα τα n). Ο δεύτερος όρος, από κατά σημείο σύγκλιση, είναι μικρότερος ή ίσος από $\epsilon/3$ για $n \geq n_0$. Επομένως, αν $n \geq n_0$ τότε $|f(z) - f_n(z)| \leq \epsilon$ για κάθε $z \in K$.

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι η $f_n(z)$ συγκλίνει για κάθε $z \in S$, όπου S πυκνό υποσύνολο του U. Έστω $z \in U$. Αφού το S είναι πυκνό, μπορούμε να βρούμε $w \in S \cap D(z)$. Τώρα

$$\begin{aligned} |f_m(z) - f_n(z)| &\leq |f_m(z) - f_m(w)| + |f_m(w) - f_n(w)| + |f_n(w) - f_n(z)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + |f_m(w) - f_n(w)| + \frac{\epsilon}{3} \leq \epsilon, \end{aligned}$$

για n, m αρκετά μεγάλα. Δηλαδή η f_n είναι κατά σημείο Cauchy και συνεπώς συγκλίνει κατά σημείο σ'ολόκληρο το U. Το συμπέρασμα έπεται από το πρώτο μέρος της απόδειξης. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.8 (**Το Θεώρημα Montel**). *Έστω F ένα ομοιόμορφα φραγμένο υποσύνολο του $A(U)$ και f_n μια ακολουθία στο F. Τότε η f_n έχει μια υπακολουθία η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του U.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\{z_1, z_2, \dots\}$ ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του U. Αφού το F είναι ομοιόμορφα φραγμένο, υπάρχει μια σταθερά $M_1 > 0$ τέτοια ώστε $|f(z_1)| \le M_1$ για κάθε $f \in F$. Επομένως μπορούμε να βρούμε μια υπακολουθία $\{f_{1,n}\}$ της $\{f_n\}$ τέτοια ώστε $f_{1,n}(z_1) \to w_1$ για κάποιο $w_1 \in \mathbb{C}$. Με την ίδια λογική, μπορούμε να βρούμε μια υπακολουθία $\{f_{2,n}\}$ της $\{f_{1,n}\}$ τέτοια ώστε $f_{2n} \to w_2$ για κάποιο w_2. Συνεχίζοντας μ'αυτόν τον τρόπο, βρίσκουμε, για κάθε k, μια υπακολουθία $\{f_{k,n}\}$ της $\{f_{k-1,n}\}$ τέτοια ώστε $f_{k,n}(z_k) \to w_k$ καθώς $n \to \infty$.

Θέτουμε $g_n(z) = f_{n,n}(z)$, $n = 1, 2, \dots$. Τότε για κάθε k, η $\{g_k, g_{k+1}, \dots\}$ είναι μια υπακολουθία της $\{f_{k,n}\}$, επομένως $g_n(z_k) \to w_k$. Από το Θεώρημα 5.6, το F είναι ισοσυνεχές σε κάθε σημείο του U. Από το Θεώρημα 5.7, η g_n συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του U. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.9 (**Κριτήριο συμπάγειας**). *Έστω $F \subset A(U)$. Τότε το F είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και ομοιόμορφα φραγμένο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν f_n είναι μια ακολουθία σ'ένα κλειστό και ομοιόμορφα φραγμένο, τότε από το Θεώρημα Montel, υπάρχει μια υπακολουθία η οποία συγκλίνει σε κάποιο $f \in A(U)$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του U (δηλαδή ως προς τη μετρική d). Αφού το F είναι κλειστό, έχουμε ότι $f \in F$. Επομένως το F είναι ακολουθιακά συμπαγές, άρα συμπαγές.

Αντίστροφα, έστω ότι το F είναι συμπαγές. Τότε είναι κλειστό, άρα μένει να δείξουμε ότι είναι ομοιόμορφα φραγμένο. Σταθεροποιούμε ένα $K \subset U$ συμπαγές και παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $f \mapsto \|f\|_K$ είναι συνεχής (σαν απεικόνιση από το $(C(U), d)$ στο $\mathbb{R}$). Πράγματι, αν $d(f_n, f) \to 0$ τότε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο K, επομένως

$$\Big| \|f_n\|_K - \|f\|_K \Big| \le \|f_n - f\|_K \to 0.$$

Αφού το F είναι συμπαγές, η εικόνα $\{\|f\|_K : f \in F\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ άρα φραγμένο. Επομένως $\sup\{\|f\|_K : f \in F\} < \infty$. $\square$

Επιχειρήματα συμπάγειας εμφανίζονται με φυσιολογικό τρόπο σε διάφορα προβλήματα μεγιστοποίησης. Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι ένα τυπικό παράδειγμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.10. *Έστω F μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $A(U)$. Αν $z_0 \in U$, τότε υπάρχει $g \in F$ τέτοια ώστε $|g'(z_0)| \ge |f'(z_0)|$ για κάθε $f \in F$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απεικόνιση $f \mapsto |f'(z_0)|$ είναι συνεχής από το F στο $\mathbb{R}$. Επομένως το $\{|f'(z_0)| : f \in F\}$ είναι συμπαγές, άρα περιέχει το supremum του. $\square$

Στην επόμενη ενότητα θα χρειαστούμε το ακόλουθο:

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.11. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και συνεκτικό, $b > 0$, $z_0 \in U$. Θέτουμε*

$$F = \{f \in A(U) : \text{η } f \text{ είναι μια 1-1 απεικόνιση του } U \text{ στο } D(0,1) \text{ και } |f'(z_0)| \ge b\}.$$

Τότε το F είναι συμπαγές.

Απόδειξη. Από το κριτήριο συμπάγειας, αρκεί να δείξουμε ότι το F είναι ομοιόμορφα φραγμένο και κλειστό. Το ότι είναι ομοιόμορφα φραγμένο είναι προφανές. Έστω λοιπόν $f_n \in F$, με $f_n \xrightarrow{d} f$. Θα δείξουμε ότι $f \in F$. Άμεσα, $|f| \leq 1$ στο U και $|f'(z_0)| \geq b$ (άρα η f δεν είναι σταθερή). Από το Θεώρημα Ανοιχτής Απεικόνισης έχουμε ότι $|f| \leq 1 \Rightarrow |f| < 1$. Τώρα, από το Θεώρημα 5.5, η f πρέπει να είναι 1-1. □

Κλείνουμε την ενότητα αυτή μ'ένα αποτέλεσμα σύμφωνα με το οποίο αν μια ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία στο $A(U)$ συγκλίνει κατά σημείο σ'ένα σύνολο που έχει σημείο συσσώρευσης στο U, τότε συγκλίνει ως προς τη μετρική του U.

Λημμα 5.1. *Έστω f_n μια ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία στο $A(U)$. Αν η f_n δεν συγκλίνει (ως προς την d), τότε υπάρχουν δυο υπακολουθίες που συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f_n δεν συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποιο συμπαγές σύνολο K. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε n υπάρχει $m \geq n$ με $\|f_n - f_m\|_K \geq \epsilon$. Επιλέγουμε τυχόντα θετικό ακέραιο n_1. Στη συνέχεια επιλέγουμε $m_1 \geq n_1$ τέτοιο ώστε $\|f_{n_1} - f_{m_1}\|_K \geq \epsilon$. Μετά παίρνουμε $n_2 > m_1$ και $m_2 \geq n_2$ ώστε $\|f_{n_2} - f_{m_2}\|_K \geq \epsilon$. Προχωρώντας μ'αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε υπακολουθίες f_{n_j} και f_{m_j} τέτοιες ώστε $\|f_{n_j} - f_{m_j}\|_K \geq \epsilon$ για κάθε j.

Από το Θεώρημα Montel, υπάρχει μια υπακολουθία f_{r_j} της f_{n_j} και μια υπακολουθία f_{s_j} της f_{m_j} με $\|f_{r_j} - f_{s_j}\|_K \geq \epsilon$, τέτοιες ώστε $f_{r_j} \xrightarrow{d} f$ και $f_{s_j} \xrightarrow{d} g$ για κάποιες $f, g \in A(U)$. Αλλά τότε $\epsilon \leq \|f - g\|_K$, δηλαδή $f \neq g$. □

Θεωρημα 5.12 (**Το Θεώρημα Vitali**). *Έστω U ανοιχτό και συνεκτικό, f_n μια ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία στο $A(U)$. Υποθέτουμε ότι η $f_n(z)$ συγκλίνει για κάθε $z \in S \subset U$, όπου το S έχει ένα σημείο συσσώρευσης στο U. Τότε η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του U.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f_n δεν συγκλίνει. Τότε από το Λήμμα 5.1 μπορούμε να βρούμε δυο υπακολουθίες οι οποίες συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια, έστω f και g. Αλλά οι f και g πρέπει να είναι ίσες πάνω στο S άρα και σ'ολόκληρο το U, άτοπο. □

2. Το Θεώρημα Σύμμορφης Απεικόνισης του Riemann

Σ'αυτήν την ενότητα, U θα είναι ένα ανοιχτό, συνεκτικό, γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{C}$ με την ιδιότητα ότι κάθε αναλυτική συνάρτηση στο U η οποία δεν μηδενίζεται στο U έχει αναλυτική τετραγωνική ρίζα (δηλαδή υπάρχει αναλυτική συνάρτηση g στο U τέτοια ώστε $g^2 = f$). Στην επόμενη ενότητα θα δείξουμε ότι η παραπάνω συνθήκη είναι ισοδύναμη με το ότι το U είναι απλά συνεκτικό. Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε το Θεώρημα του Riemann σύμφωνα με το οποίο, υπάρχει μια αναλυτική, 1-1 και επί συνάρτηση απ'το U στο δίσκο $D(0,1)$.

Λημμα 5.2. *Υπάρχει μια αναλυτική, 1-1 συνάρτηση από το U στο $D(0,1)$.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $a \notin U$. Από υπόθεση, υπάρχει μια συνάρτηση $h \in A(U)$ τέτοια ώστε $h^2(z) = z - a$. Η h είναι κατ'ανάγκη 1-1. Από το Θεώρημα Ανοιχτής Απεικόνισης, το $h(U)$ περιέχει έναν ανοιχτό δίσκο $D(z_0, r)$. Παρατηρούμε ότι $0 \notin D(z_0, r)$, διότι διαφορετικά θα είχαμε $h(z) = 0$ για κάποιο $z \in U$ και έτσι $z = a$, άτοπο. Τώρα $h(U) \cap D(-z_0, r) = \emptyset$ γιατί, διαφορετικά, αν $h(z) = w \in D(-z_0, r)$, θα μπορούσαμε να βρούμε $z' \in U$ τέτοιο ώστε $h(z') = -w \in D(z_0, r)$. Αλλά τότε $h^2(z) = h^2(z')$, άρα $z = z'$, δηλαδή $w = 0$, άτοπο.

Έτσι, $|h(z)+z_0| \geq r$ για κάθε $z \in U$. Ορίζουμε

$$f(z) = \frac{kr}{h(z)+z_0},$$

όπου $0<|k|<1$. Η f είναι η ζητούμενη συνάρτηση. $\square$

Λημμα 5.3. *Θέτουμε G να είναι η οικογένεια των 1-1 αναλυτικών συναρτήσεων του U στο $D(0,1)$. Έστω $g \in G$ και έστω z_0 ένα σταθερό σημείο στο U. Αν η g δεν είναι επί, τότε υπάρχει μια συνάρτηση $f \in G$ τέτοια ώστε $|f'(z_0)| > |g'(z_0)|$.*

Αποδειξη. Επιλέγουμε $a \in D(0,1) \setminus g(U)$ και θέτουμε

$$T_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z},$$

Τότε η T_a είναι μια 1-1 και επί αναλυτική απεικόνιση του $D(0,1)$ στον εαυτό του, με αντίστροφη T_{-a}. Επίσης, $T_a(z)=0$ αν και μόνο αν $z=a$.

Τώρα, η $T_a \circ g$ δεν μηδενίζεται διότι $a \notin g(U)$, επομένως $h^2 = T_a \circ g$ για κάποια $h \in A(U)$. Αφού οι g και T_a είναι 1-1, και η h είναι 1-1. Αφού $h^2(U) \subset D(0,1)$, έχουμε $h(U) \subset D(0,1)$. Άρα $h \in G$.

Θέτουμε $f = T_b \circ h$, όπου $b = h(z_0)$ και έχουμε

$$\begin{aligned} g = T_{-a} \circ h^2 &= T_{-a} \circ (T_{-b} \circ f)^2 \\ &= T_{-a} \circ S \circ T_{-b} \circ f, \quad \text{όπου } S(w) = w^2, \\ &= W \circ f, \quad \text{όπου } W = T_{-a} \circ S \circ \ T_{-b}. \end{aligned}$$

Έτσι

$$g'(z_0) = W'(f(z_0))f'(z_0) = W'(T_b(h(z_0)))f'(z_0) = W'(0)f'(z_0).$$

Αλλά η W είναι μια αναλυτική απεικόνιση του $D(0,1)$ στον εαυτό του, η οποία δεν είναι 1-1 (διότι η S δεν είναι 1-1).

Ισχυριζόμαστε ότι $|W'(0)| < 1$. Πράγματι, από τη δεύτερη παρατήρηση μετά το Θεώρημα 4.10, έχουμε

$$|W'(0)| \leq 1 - |W(0)|^2 \leq 1.$$

Αν $|W'(0)| = 1$, τότε η W είναι γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός, ιδιαίτερα, η W είναι 1-1, άτοπο. Επομένως $|g'(z_0)| < |f'(z_0)|$. $\square$

Θεωρημα 5.13 (**Το Θεώρημα Σύμμορφης Απεικόνισης του Riemann**). *Υπάρχει μια αναλυτική, 1-1 και επί απεικόνιση του U στο $D(0,1)$*

Αποδειξη. Έστω h μια 1-1 αναλυτική απεικόνιση του U στο $D(0,1)$. Μια τέτοια h υπάρχει από το Λήμμα 5.2. Επιλέγουμε ένα $z_0 \in U$ και θέτουμε $b = |h'(z_0)|$. Τότε $b>0$ από την Πρόταση 4.6. Τώρα έστω

$$F = \{f \in A(U) : f(U) \subset D(0,1),\ f \text{ 1-1},\ |f'(z_0)| \geq b\}.$$

Το F είναι μη κενό και από το Θεώρημα 5.11, είναι συμπαγές. Από το Θεώρημα 5.10, υπάρχει $g \in F$ τέτοια ώστε $|g'(z_0)| \geq |f'(z_0)|$ για κάθε $f \in F$. Αλλά $g(U) = D(0,1)$ διότι διαφορετικά, από το Λήμμα 5.3, θα υπήρχε μια 1-1 αναλυτική συνάρτηση $f : U \to D(0,1)$ τέτοια ώστε $|f'(z_0)| > |g'(z_0)|$. Όμως $f \in F$, άτοπο. $\square$

Παρατηρήσεις:

Έστω g η απεικόνιση του προηγούμενου θεωρήματος. Τότε

(1) $g(z_0) = 0$.

(2) Έστω $f, h : U \to D(0,1)$ αναλυτικές, 1-1 και επί. Αν $f(z_0) = h(z_0) = 0$ και $f'(z_0) = h'(z_0)$, τότε $f = h$. Επίσης, αν $f(z_0) = h(z_0) = 0$ και $f(z_0)$, $h(z_0)$ είναι θετικοί πραγματικοί, τότε $f = h$. Επομένως η g είναι μοναδική κάτω από τους περιορισμούς $g(z_0) = 0$ και $g'(z_0) > 0$.
(3) Αν $f : U \to D(0,1)$ αναλυτική, 1-1 και επί, και $f'(z_0) = g'(z_0)$, τότε $f = g$.
(4) Αν $f : U \to D(0,1)$ αναλυτική και $f(z_0) = 0$, τότε $|f'(z_0)| \leq |g'(z_0)|$, με ισότητα αν και μόνο αν $f = kg$, όπου $|k| = 1$.

Απόδειξη. (1) Αν $g(z_0) = a \neq 0$, τότε (με T_a όπως στο Λήμμα 5.3), έχουμε ότι η $T_a \circ g$ είναι μια αναλυτική, 1-1 και επί απεικόνιση του U στο $D(0,1)$ και

$$|(T_a \circ g)'(z_0)| = |T_a'(g(z_0))g'(z_0)| = |T_a'(a)g'(z_0)| = \frac{|g'(z_0)|}{1-|a|^2} > |g'(z_0)|.$$

Έτσι η $T_a \circ g$ ανήκει στην οικογένεια F του Θεωρήματος 5.13 και

$$|(T_a \circ g)'(z_0)| > |g'(z_0)|,$$

άτοπο.

(2) Η $q = f \circ h^{-1}$ είναι μια αναλυτική 1-1 και επί απεικόνιση του $D(0,1)$ στον εαυτό του, η οποία στέλνει το 0 στο 0. Τώρα, αν υποθέσουμε ότι $f'(z_0) = h'(z_0)$, έχουμε

$$q'(0) = f'(z_0)(h^{-1})'(0) = \frac{f'(z_0)}{h'(z_0)} = 1,$$

επομένως, από το Θεώρημα 4.9, $q(z) = az$, με $|a| = 1$. Αφού $q'(0) = a$, έχουμε ότι $a = 1$. Άρα $f(z) = h(z)$ για κάθε $z \in U$.

Αν $f'(z_0)$ και $h'(z_0)$ είναι πραγματικοί και θετικοί, και, ας πούμε, $f'(z_0) > h'(z_0)$, τότε το παραπάνω επιχείρημα δείχνει ότι $q'(0) > 1$, άτοπο από το Θεώρημα 4.9. Επομένως $f'(z_0) = h'(z_0)$ και συμπεραίνουμε όπως πριν ότι $f = h$.

(3) Αφού $f'(z_0) = g'(z_0)$, η απόδειξη του (1) δείχνει ότι $f(z_0) = 0$. Το συμπέρασμα έπεται τώρα από το (2).

(4) Έστω $h = f \circ g^{-1}$. Τότε η h είναι μια αναλυτική απεικόνιση του $D(0,1)$ στον εαυτό του με $h(0) = 0$. Από το Θεώρημα 4.9, έχουμε $|h'(0)| \leq 1$, δηλαδή $|f'(z_0)| \leq |g'(z_0)|$, με ισότητα αν και μόνο αν $h(z) = kz$. Ισοδύναμα, $f = kg$, $|k| = 1$.

□

Παρατηρούμε επίσης ότι το Θεώρημα Σύμμορφης Απεικόνισης του Riemann δεν ισχύει για $U = \mathbb{C}$ (από το Θεώρημα Liouville).

3. Η ομοτοπική έκδοση του Θεωρήματος του Cauchy

Στην ενότητα αυτή εισάγουμε ακόμα μια συνθήκη η οποία είναι ισοδύναμη με την έννοια της απλής συνεκτικότητας: Ένα σύνολο είναι απλά συνεκτικό αν και μόνο αν κάθε κλειστή καμπύλη στο σύνολο μπορεί να «συρρικνωθεί» με συνεχή τρόπο σ'ένα σημείο χωρίς να ξεφύγει από το σύνολο. Αν δηλαδή κάθε κλειστή καμπύλη είναι ομοτοπική μ'ένα σημείο. Εξετάζουμε κατ'αρχήν τη σχέση ανάμεσα σε ομοτοπία και ομολογία.

Θεωρημα 5.14. *Έστω γ_0 και γ_1 κλειστές καμπύλες σ'ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{C}$. Αν οι γ_0 και γ_1 είναι ομοτοπικές (στο U), τότε οι γ_0 και γ_1 είναι ομολογικές, δηλαδή $n(\gamma_0, a) = n(\gamma_1, a)$ για κάθε $a \notin U$. Αν οι γ_0 και γ_1 είναι μονοπάτια, τότε έχουμε $\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$, για κάθε αναλυτική συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$. Ιδιαίτερα, αν η γ_0 είναι ομοτοπική μ'ένα σημείο, τότε η γ_0 είναι 0-ομολογική, και αν επιπλέον η γ_0 είναι μονοπάτι, τότε $\int_{\gamma_0} f(z)dz = 0$ για κάθε αναλυτική $f : U \to \mathbb{C}$.*

Αποδειξη. Έστω H μια ομοτοπία των γ_0 και γ_1. Θέτουμε $\gamma_s(t) = H(t, s)$, $s, t \in [0, 1]$. Τώρα, αν $a \notin U$, έστω θ_s ένα συνεχές όρισμα της $\gamma_s - a$. Στην παραγματικότητα, η $\theta_s(t)$ μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι συνεχής και ως προς τις δύο μεταβλητές (άσκηση!). Έχουμε

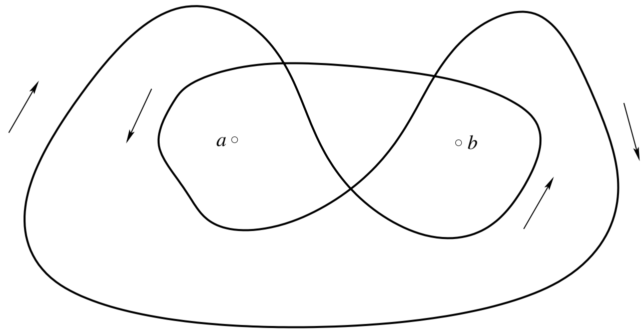
$$e^{i\theta_s(1)} = \frac{\gamma_s(1) - a}{|\gamma_s(1) - a|} = \frac{\gamma_s(0) - a}{|\gamma_s(0) - a|} = e^{i\theta_s(0)}.$$

Επομένως η ποσότητα

$$\frac{\theta_s(1) - \theta_s(0)}{2\pi}$$

είναι ένας ακέραιος $k(s)$. Αφού η k είναι συνεχής πρέπει να'ναι σταθερή. Επομένως ο δείκτης $n(\gamma_s, a)$ είναι ο ίδιος για όλα τα s. Ιδιαίτερα, $n(\gamma_0, a) = n(\gamma_1, a)$. □

Παρατηρήστε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει. Πράγματι, αν θέσουμε $U = \mathbb{C}\setminus\{a, b\}$, με $a \neq b$, τότε η καμπύλη του σχήματος είναι 0-ομολογική στο U αλλά δεν είναι ομοτοπική στο U με κάποιο σημείο (μια αυστηρή απόδειξη δεν είναι εύκολη).



Παρολ'αυτά, το επόμενο αποτέλεσμα μας λέει ότι αν **κάθε** κλειστή καμπύλη στο U είναι 0-ομολογική (αν δηλαδή το U είναι απλά συνεκτικό), τότε **κάθε** κλειστή καμπύλη στο U είναι ομοτοπική μ'ένα σημείο.

Θεωρημα 5.15. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και συνεκτικό. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Αν η f είναι αναλυτική και δεν μηδενίζεται στο U, τότε η f έχει αναλυτική τετραγωνική ρίζα στο U.*
(2) *Το U είναι ομοιομορφικό με το $D(0, 1)$.*
(3) *Κάθε κλειστή καμπύλη στο U είναι ομοτοπική μ'ένα σημείο.*
(4) *Κάθε κλειστό μονοπάτι στο U είναι ομοτοπικό μ'ένα σημείο.*
(5) *Το U είναι απλά συνεκτικό.*

Αποδειξη.(1) ⇒ (2) Αν $U \neq \mathbb{C}$, το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα Σύμμορφης Απεικόνισης του Riemann. Αν $U = \mathbb{C}$, τότε η απεικόνιση $h(z) = \dfrac{z}{1 + |z|}$ είναι ο ζητούμενος ομοιομορφισμός.

(2) $\Rightarrow$ (3) Κατ'αρχήν παρατηρούμε ότι κάθε κλειστή καμπύλη στο $D(0,1)$ είναι ομοτοπική μ'ένα σημείο. Τώρα αν $f : U \to D(0,1)$ είναι ένας ομοιομορφισμός, και γ μια κλειστή καμπύλη στο U, τότε θέτουμε $\gamma_0 = f \circ \gamma$. Αν τώρα H είναι μια ομοτοπία των γ_0 και $\gamma_0(0)$, τότε $f^{-1} \circ H$ είναι μια ομοτοπία των γ και $\gamma(0)$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Προφανές.

(4) $\Rightarrow$ (5) Έπεται από το Θεώρημα 5.14.

(5) $\Rightarrow$ (1) Από το Θεώρημα 3.3, η f έχει αναλυτικό λογάριθμο g. Τότε η συνάρτηση $\exp(\frac{1}{2}g)$ είναι η ζητούμενη αναλυτική τετραγωνική ρίζα.

$\square$

Το προηγούμενο θεώρημα, μαζί με το (ομολογικό) Γενικό Θεώρημα του Cauchy μας δίνει ένα πλήρη χαρακτηρισμό των απλά συνεκτικών υποσυνόλων του $\mathbb{C}$ και αποτελεί το κεντρικό αποτέλεσμα αυτού του μαθήματος.

4. Τα Θεωρήματα Runge και Mittag-Leffler

Όπως ξέρουμε κάθε αναλυτική συνάρτηση f μπορεί να αναπτυχθεί τοπικά σε δυναμοσειρά. Επομένως για κάθε σημείο z στο πεδίο ορισμού της f, υπάρχει μια περιοχή του z και μια ακολουθία πολυωνύμων η οποία συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα της περιοχής.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι τοπικό. Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε ένα πολύ ισχυρό σφαιρικό αποτέλεσμα: Υπάρχει μια ακολουθία ρητών συναρτήσεων, η οποία συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα ολόκληρου του πεδίου ορισμού της f. Θα χρειαστούμε το ακόλουθο τεχνικό λήμμα:

Λημμα 5.4. *Έστω $V, A \subset \mathbb{C}$ ανοιχτά με $V \subset A$ και $\partial V \cap A = \emptyset$. Αν H είναι μια συνεκτική συνιστώσα του A και $H \cap V \neq \emptyset$, τότε $H \subset V$.*

Αποδειξη. Έστω G μια συνεκτική συνιστώσα του V με $H \cap G \neq \emptyset$. Τότε το $H \cup G$ είναι ένα συνεκτικό υποσύνολο του A επομένως $G \subset H$. Αλλά $\partial G \subset \partial V$ (άσκηση!) άρα $\partial G \cap H = \emptyset$. Συνεπώς

$$H \setminus G = H \cap ((\mathbb{C} \setminus \overline{G}) \cup \partial G) = H \setminus \overline{G}.$$

Δηλαδή το $H \setminus G$ είναι ανοιχτό και κλειστό στο H. Αφού το H είναι συνεκτικό και $G \neq \emptyset$, πρέπει να έχουμε $H \setminus G = \emptyset$. Άρα $H = G \subset V$. $\square$

Θα δείξουμε στη συνέχεια ένα ενδιάμεσο προσεγγιστικό αποτέλεσμα: Πάνω σ'ένα σταθεροποιημένο συμπαγές σύνολο, μια αναλυτική συνάρτηση μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα από μια ρητή συνάρτηση με πόλους σ'ένα προδιαγεγραμμένο σύνολο.

Προταση 5.1. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, $K \subset U$ συμπαγές, και S ένα σύνολο το οποίο περιέχει ένα σημείο από κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$. Αν $f \in A(U)$ τότε η f μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα στο K από μια ρητή συνάρτηση με πόλους στο S.*

Αποδειξη. Έστω $r > 0$ τέτοιο ώστε $K \subset D(0,r)$. Θέτουμε

$$M = \operatorname{dist}(K, (\mathbb{C} \setminus U) \cup \partial D(0,r)) > 0.$$

Θεωρούμε ένα δίκτυο κλειστών τετραγώνων στο $\mathbb{C}$ με πλευρές παράλληλες στους άξονες και με διάμετρο μήκους s, όπου $s < M$. Έστω $Q_1, \ldots, Q_n$, εκείνα τα τετράγωνα που περιέχονται στο $U \cap D(0,r)$. Αν θέσουμε

$$S = \bigcup_{j=1}^{n} Q_j,$$

τότε $K \subset S^\circ$, από τον ορισμό του M. Έστω τώρα ο κύκλος

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} \partial Q_j.$$

Αφαιρούμε όλες τις πλευρές οι οποίες είναι κοινές σε οποιαδήποτε δύο Q_i και παίρνουμε ένα ισοδύναμο κύκλο γ. Αφού $n(\gamma, z) = n(\sigma, z) = 0$ για κάθε $z \notin U$ και $n(\gamma, z) = 1$ για κάθε $z \in S^\circ$, ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy μας δίνει

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

για κάθε $z \in K$. Η παραπάνω έκφραση μας επιτρέπει να ισχυριστούμε ότι η f μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα στο K από ρητές συναρτήσεις με πόλους στο γ^*. Πράγματι, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το γ είναι ένα μονοπάτι με πεδίο ορισμού $[0,1]$. Τότε

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t) dt = \int_0^1 h(t,z) dt.$$

Η h είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1] \times K$, επομένως για δεδομένο $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $z \in K$ και κάθε $s, t \in [0,1]$ με $|s - t| < \delta$ να έχουμε $|h(s,z) - h(t,z)| < \epsilon$. Έστω τώρα $0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ μια διαμέριση του $[0,1]$ με $t_j - t_{j-1} < \delta$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$. Θέτουμε

$$R(z) = \sum_{j=1}^{n} h(t_j, z)(t_j - t_{j-1}).$$

Τότε η R είναι μια ρητή συνάρτηση με πόλους στα σημεία $\gamma(t_j) \in \gamma^*$, και για κάθε $z \in K$ έχουμε

$$|f(z) - R(z)| \leq \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |h(t,z) - h(t_{j-1}, z)| dt < \epsilon,$$

το οποίο αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι κάθε ρητή συνάρτηση με πόλους στο γ^* μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα στο K από μια ρητή συνάρτηση με πόλους στο S. Στην πραγματικότητα θα δείξουμε κάτι ισχυρότερο: αν $a \notin K$ τότε η $(z - a)^{-1}$ μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα στο K από μια ρητή συνάρτηση με πόλους στο S. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(1) $\infty \notin S$. Ας πούμε ότι μια συνάρτηση έχει την ιδιότητα $\mathcal{P}(S)$ αν μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα στο K από μια ρητή συνάρτηση με πόλους στο S. Θέτουμε

$$V = \{a \in \mathbb{C} \setminus K : \text{η } (z-a)^{-1} \text{ έχει την ιδιότητα } \mathcal{P}(S)\}.$$

Θα δείξουμε ότι $V = \mathbb{C} \setminus K$. Κατ'αρχήν παρατηρούμε ότι

$$S \subset V \subset \mathbb{C} \setminus K.$$

Επίσης το V είναι ανοιχτό. Πράγματι, αν $a \in V$ και $b \in \mathbb{C}$ με $|a-b| < \operatorname{dist}(a, K)$, τότε για κάθε $z \in K$ έχουμε

$$\frac{1}{z-b} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b-a)^n}{(z-a)^{n+1}}.$$

Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο K από το κριτήριο Weierstraß. Τώρα, κάθε όρος του παραπάνω αθροίσματος έχει την ιδιότητα $\mathcal{P}(S)$ διότι $a \in V$. Επομένως το ίδιο ισχύει και για την $(z-b)^{-1}$. Άρα $b \in V$, δηλαδή $D(a, \operatorname{dist}(a,K)) \subset V$, συνεπώς το V είναι ανοιχτό.

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι $\partial V \cap (\mathbb{C} \setminus K) = \emptyset$. Πράγματι, αν $b \in \partial V$, τότε $b \notin V$ και επίσης υπάρχει $b_n \in V$ με $b_n \to b$. Αλλά $|b - b_n| \geq \operatorname{dist}(b_n, K)$, διαφορετικά το b θα ανήκε στο V από τα παραπάνω. Παίρνοντας όρια καθώς $n \to \infty$ έχουμε $\operatorname{dist}(b, K) = 0$, δηλαδή $b \in K$.

Έστω τώρα H μια συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus K$. Τότε $H \cap V \neq \emptyset$ διότι $S \subset V$. Εφόσον $\partial V \cap (\mathbb{C} \setminus K) = \emptyset$, το Λήμμα 5.4 μας δίνει $H \subset V$. Αφού η H ήταν τυχούσα συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{C} \setminus K \subset V$ και άρα $\mathbb{C} \setminus K = V$.

(2) $\infty \in S$. Στην περίπτωση αυτή, επιλέγουμε $a_0 \in \mathbb{C}$ με $|a_0| > \max\{|z| : z \in K\}$, και θέτουμε $S' = (S \setminus \{\infty\}) \cup \{a_0\}$. Το S' περιέχει ένα σημείο από κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus K$, επομένως από το (1) έχουμε ότι για κάθε $a \in \mathbb{C} \setminus K$, η $(z-a)^{-1}$ έχει την ιδιότητα $\mathcal{P}(S')$. Αλλά η $(z-a_0)^{-1}$ αναπτύσσεται σε σειρά Taylor με κέντρο 0 και ακτίνα σύγκλισης $|a_0|$. Συνεπώς η $(z-a_0)^{-1}$ μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα στο K από ένα πολυώνυμο (το οποίο είναι βέβαια μια ρητή συνάρτηση με πόλο στο ∞) και το συμπέρασμα έπεται.

$\square$

Πορισμα 5.1. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, και $K \subset U$ συμπαγές. Υποθέτουμε ότι το $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ είναι συνεκτικό. Αν $f \in A(U)$ τότε υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων P_n τέτοια ώστε $P_n \to f$ ομοιόμορφα στο K.*

Αποδειξη. Το $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ έχει μόνο μία συνεκτική συνιστώσα, επομένως μπορούμε να επιλέξουμε $S = \{\infty\}$ στην Πρόταση 5.1. Εφόσον μια ρητή συνάρτηση με μοναδικό πόλο το ∞ είναι πολυώνυμο, το συμπέρασμα έπεται. $\square$

Θεωρημα 5.16 (**Το Θεώρημα Runge**). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και S ένα σύνολο το οποίο περιέχει ένα σημείο από κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$. Αν $f \in A(U)$, τότε υπάρχει μια ακολουθία ρητών συναρτήσεων, με πόλους στο S, η οποία συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του U. Αν επιπλέον το U είναι απλά συνεκτικό, τότε υπάρχει μια ακολουθία πολυωνύμων η οποία συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του U.*

Αποδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια συμπαγών συνόλων $\{K_n\}$ όπως αυτή ορίστηκε στην αρχή του κεφαλαίου. Αφού κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K_n$ περιέχει μια συνεκτική συνεκτική συνιστώσα του $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$, κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K_n$ περιέχει ένα σημείο του S. Επομένως, από την Πρόταση 5.1, υπάρχει μια ρητή συνάρτηση R_n με πόλους στο S, τέτοια ώστε $|f(z) - R_n(z)| < 1/n$ για κάθε $z \in K_n$. Για κάθε συμπαγές $K \subset U$, έχουμε $K \subset K_n$ για αρκετά μεγάλο n. Επομένως $R_n \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του U.

Αν τώρα το U είναι απλά συνεκτικό, επιλέγουμε $S = \{\infty\}$. $\square$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα το Θεώρημα Runge για να δείξουμε ότι σε κάθε ανοιχτό σύνολο μπορούμε να κατασκευάσουμε μια μερόμορφη συνάρτηση τέτοια ώστε το κύριο μέρος της σειράς Laurent γύρω από κάθε πόλο να έχει όποια μορφή θέλουμε.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.17 (**Το Θεώρημα Mittag-Leffler**). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $A \subset U$ τέτοιο ώστε το A δεν έχει σημεία συσσώρευσης στο U. Σε κάθε $a \in A$ αντιστοιχούμε ένα θετικό ακέραιο $m(a)$ και μια ρητή συνάρτηση*

$$P_a(z) = \sum_{j=1}^{m(a)} c_{j,a}(z-a)^{-j}.$$

Τότε υπάρχει μια μερόμορφη συνάρτηση f στο U τέτοια ώστε το κύριο μέρος της σειράς Laurent της f σε κάθε $a \in A$ είναι ίσο με P_a, και η οποία δεν έχει άλλους πόλους στο U

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε πάλι την ακολουθία συμπαγών συνόλων $\{K_n\}$ όπως αυτή ορίστηκε στην αρχή του κεφαλαίου. Θέτουμε $A_1 = A \cap K_1$, και $A_n = A \cap (K_n \setminus K_{n-1})$ για $n = 2, 3, \ldots$. Εφόσον $A_n \subset K_n$ και το A δεν έχει σημεία συσσώρευσης στο U, κάθε A_n είναι πεπερασμένο. Θέτουμε

$$Q_n(z) = \sum_{a \in A_n} P_a(z).$$

Κάθε Q_n είναι ρητή συνάρτηση. Οι πόλοι της Q_n βρίσκονται στο σύνολο $K_n \setminus K_{n-1}$, για $n \geq 2$. Ιδιαίτερα, η Q_n είναι ολόμορφη σ'ένα ανοιχτό σύνολο το οποίο περιέχει το K_{n-1}. Από το Θεώρημα του Runge έπεται ότι υπάρχει μια ρητή συνάρτηση R_n, οι πόλοι της οποίας βρίσκονται στο $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$, τέτοια ώστε

$$|R_n(z) - Q_n(z)| < \frac{1}{2^n},$$

για $z \in K_{n-1}$.

Ισχυριζόμαστε ότι η

$$f(z) = Q_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} (Q_n(z) - R_n(z)),\ z \in U \setminus A$$

είναι η συνάρτηση που ψάχνουμε. Πράγματι, σταθεροποιούμε ένα N. Τότε στο K_N έχουμε

$$\begin{aligned} f &= Q_1 + \sum_{n=2}^{N} (Q_n - R_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} (Q_n - R_n) \\ &= \sum_{n=1}^{N} Q_n - \sum_{n=2}^{N} R_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} (Q_n - R_n) \\ &= F_N + G_N + H_N. \end{aligned}$$

Κάθε όρος του αθροίσματος που ορίζει την H_N είναι μικρότερος από 2^{-n} στο K_N επομένως το άθροισμα αυτό συγκλίνει ομοιόμορφα στο K_N. Άρα η H_N είναι αναλυτική στο εσωτερικό του K_N. Εφόσον οι πόλοι κάθε μιας από τις R_n είναι έξω από το U, η G_N είναι επίσης αναλυτική στο εσωτερικό του K_N. Τέλος

$$F_N = \sum_{a \in A \cap K_N} P_a.$$

Συνεπώς, στο K_N°, η f είναι μερόμορφη και για κάθε $a \in A \cap K_N^\circ$ το κύριο μέρος του αναπτύγματος Laurent της f γύρω από το a είναι ακριβώς P_a. Αφού το N ήταν αυθαίρετο, το συμπέρασμα έπεται. $\square$

5. Το Θεώρημα Παραγοντοποίησης του Weierstraß

Κάθε πολυώνυμο $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί σαν γινόμενο δυωνύμων

$$p(z) = a_n (z - z_0)^{m_0} \cdots (z - z_k)^{m_k},$$

όπου $z_0, \ldots, z_k$ οι διακεκριμένες ρίζες του p. Τώρα, διαισθητικά, κάθε ακέραιη συνάρτηση f μπορεί να θεωρηθεί σαν πολυώνυμο με άπειρους όρους:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Μπορούμε να αναμένουμε κάτι ανάλογο από την f; Μπορούμε δηλαδή, με αντίστοιχο τρόπο, να την «παραγοντοποιήσουμε» σε ένα (ενδεχομένως) άπειρο γινόμενο συναρτήσεων; Η απάντηση είναι «ναι», πρέπει όμως πρώτα να ορίσουμε την έννοια του άπειρου γινομένου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.2. *Έστω $\{z_n\}$ μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Θέτουμε*

$$p_n = (1 + z_1)(1 + z_2) \cdots (1 + z_n),$$

και υποθέτουμε ότι $p_n \to z$ για κάποιο $z \in \mathbb{C}$. Τότε γράφουμε

$$z = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z_n).$$

*Τα p_n ονομάζονται **μερικά γινόμενα** του **απειρογινομένου**. Θα λέμε ότι το απειρογινόμενο συγκλίνει αν η $\{p_n\}$ συγκλίνει.*

ΛΗΜΜΑ 5.5. *Έστω $z_1, \ldots, z_N \in \mathbb{C}$. Θέτουμε*

$$p_N = \prod_{n=1}^{N} (1 + z_n), \; p_N^* = \prod_{n=1}^{N} (1 + |z_n|).$$

Τότε

$$p_N^* \leq \exp(|z_1| + \cdots + |z_N|),$$

και

$$|p_N - 1| \leq p_N^* - 1.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε n έχουμε $1 + |z_n| \leq e^{|z_n|}$. Πολλαπλασιάζοντας τις ανισότητες αυτές κατά μέλη, παίρνουμε την πρώτη σχέση. Για τη δεύτερη σχέση, προχωράμε επαγωγικά. Προφανώς ισχύει για $N = 1$. Υποθέτουμε ότι

$$|p_k - 1| \leq p_k^* - 1.$$

Τότε

$$|p_{k+1} - 1| = |(p_k - 1)(1 + z_{k+1}) + z_{k+1}| \leq (p_k^* - 1)(1 + |z_{k+1}|) + |z_{k+1}| = p_{k+1}^* - 1.$$

$\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.18. *Έστω $S \subset \mathbb{C}$ και $f_n : S \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία φραγμένων συναρτήσεων τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ συγκλίνει ομοιόμορφα. Τότε το απειρογινόμενο*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$$

συγκλίνει ομοιόμορφα, και $f(z_0) = 0$ για κάποιο $z_0 \in S$ αν και μόνο αν $f_n(z_0) = -1$ για κάποιο n.

Επιπλέον, αν $\{n_1, n_2, \dots\}$ είναι οποιαδήποτε αναδιάταξη του $\{1, 2, \dots\}$, τότε

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + f_{n_k}(z)).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από υπόθεση, η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ είναι φραγμένη. Έστω p_N το N-οστό μερικό γινόμενο του πρώτου απειρογινομένου. Τότε, από το Λήμμα 5.5, υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $|p_N(z)| \leq C$ για κάθε N και z.

Έστω ϵ με $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Τότε υπάρχει N_0 τέτοιο ώστε

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} |f_n(z)| < \epsilon,$$

για κάθε $z \in S$.

Έστω τώρα $\{n_1, n_2, \dots\}$ μια αναδιάταξη του $\{1, 2, \dots\}$. Για $N \geq N_0$, επιλέγουμε M τέτοιο ώστε

$$\{1, 2, \dots, N\} \subset \{n_1, n_2, \dots, n_M\}.$$

Έστω q_M το M-οστό μερικό γινόμενο του δύτερου απειρογινομένου. Τότε

$$q_M - p_N = p_N \left(\prod_{n_k > N} (1 + f_{n_k}) - 1 \right).$$

Τα n_k που εμφανίζονται στην παραπάνω σχέση είναι όλα διακεκριμένα και μεγαλύτερα από N_0, επομένως από το Λήμμα 5.5 έχουμε

$$|q_M - p_N| \leq |p_N|(e^{\epsilon} - 1) \leq 2|p_N|\epsilon \leq 2C\epsilon. \tag{5.1}$$

Αν $n_k = k$ για όλα τα k, τότε $q_M = p_M$ και έτσι η παραπάνω σχέση συνεπάγεται ότι η $\{p_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση f. Επίσης, η ίδια σχέση μας δίνει

$$|p_M - p_{N_0}| \leq 2|p_{N_0}|\epsilon,$$

για $M > N_0$, επομένως $|p_M| \geq (1 - 2\epsilon)|p_{N_0}|$. Άρα

$$|f(z)| \geq (1 - 2\epsilon)|p_{N_0}|,$$

το οποίο σημαίνει ότι $f(z) = 0$ αν και μόνο αν $p_{N_0}(z) = 0$, ή ισοδύναμα, $f_n(z) = -1$ για κάποιο n.

Τέλος, η (5.1) συνεπάγεται ότι η $\{q_M\}$ συγκλίνει στο ίδιο όριο με την $\{p_N\}$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.19. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f_n \in A(U)$ μια ακολουθία τέτοια ώστε η*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του U. Τότε το απειρογινόμενο

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του U, και επομένως $f \in A(U)$.

Επιπλέον,

$$m(f, z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n, z),$$

όπου $m(f, z)$ είναι η τάξη της ρίζας z, αν $f(z) = 0$, και $m(f, z) = 0$ αν $f(z) \neq 0$.

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός έπεται άμεσα από το Θεώρημα 5.18. Για τον δεύτερο ισχυρισμό, σταθεροποιούμε $z_0 \in U$ και παρατηρούμε ότι το πολύ πεπερασμένο πλήθος από τις f_n έχουν ρίζα στο z_0. Τότε

$$f(z) = \prod_{n: f_n(z_0)=0} f_n(z) \cdot \prod_{n: f_n(z_0)\neq 0} f_n(z).$$

Το πρώτο γινόμενο έχει ρίζα στο z_0 με τάξη

$$\sum_{n: f_n(z_0)=0} m(f_n, z).$$

Το δεύτερο γινόμενο ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση η οποία δεν έχει ρίζα στο z_0 από το Θεώρημα 5.18, και το συμπέρασμα έπεται. □

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα Παραγοντοποίησης του Weierstraß θα χρειαστούμε κάποιες βοηθητικές συναρτήσεις. Θέτουμε $E_0(z) = 1 - z$ και για $p = 1, 2, 3, \ldots$,

$$E_p(z) = (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right).$$

Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται **στοιχειώδεις παράγοντες**.

Λήμμα 5.6. *Για κάθε $|z| \leq 1$ και $p = 0, 1, 2, \ldots$, έχουμε*

$$|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}.$$

Απόδειξη. Για $p = 0$ είναι προφανές. Για $p \geq 1$ έχουμε

$$-E_p'(z) = z^p \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right).$$

Επομένως η $-E_p'$ έχει μια ρίζα τάξης p στο 0, και το ανάπτυγμα Taylor της $-E_p'$ στο 0 έχει μη αρνητικούς πραγματικούς συντελεστές. Συνεπώς η $1 - E_p$ έχει ρίζα τάξης $p + 1$ στο 0, και αν θέσουμε

$$\phi(z) = \frac{1 - E_p(z)}{z^{p+1}},$$

τότε $\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, με όλα τα a_n μη αρνητικά. Άρα, για $|z| \leq 1$ έχουμε $|\phi(z)| \leq \phi(1) = 1$ και το συμπέρασμα έπεται. □

Θεώρημα 5.20. *Έστω z_n μια ακολουθία μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε $|z_n| \to \infty$. Θέτουμε $r_n = |z_n|$. Αν p_n είναι μια ακολουθία μη αρνητικών ακεραίων τέτοια ώστε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n} < \infty,$$

για κάθε $r > 0$, τότε το απειρογινόμενο

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

ορίζει μια ακέραιη συνάρτηση η οποία έχει μια ρίζα σε κάθε z_n και η οποία δεν έχει άλλες ρίζες στο $\mathbb{C}$.

Ακριβέστερα, αν το α εμφανίζεται m φορές στην ακολουθία z_n, τότε η P έχει μια ρίζα τάξης m στο α.

Απόδειξη. Κατ'αρχήν παρατηρούμε ότι είναι πάντα δυνατό να βρούμε μια ακολουθία p_n όπως στη διατύπωση του θεωρήματος. Πράγματι, για κάθε $r > 0$ έχουμε $r_n > 2r$ για όλα εκτός από πεπερασμένα το πλήθος n, επομένως $r/r_n < 1/2$ για αυτά τα n. Άρα μπορούμε να επιλέξουμε, για παράδειγμα, $p_n = n - 1$.

Σταθεροποιούμε τώρα ένα r. Τότε για όλα εκτός από πεπερασμένο πλήθος n ισχύει $r_n \geq r$. Επομένως αν $|z| \leq r$, τότε από το Λήμμα 5.6 έχουμε ότι

$$\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \leq \left|\frac{z}{z_n}\right|^{1+p_n} \leq \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n}.$$

Συνεπώς η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στον δίσκο $\overline{D}(0, r)$. Αφού το r ήταν αυθαίρετο, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{C}$, και το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα 5.19. □

Θεώρημα 5.21 (**Το Θεώρημα Παραγοντοποίησης του Weierstraß**). *Έστω f μια ακέραιη συνάρτηση με $f(0) \neq 0$, και έστω $z_1, z_2, \ldots$ οι ρίζες της f επαναλμβανόμενες σύμφωνα με την πολλαπλότητά τους. Τότε υπάρχει μια ακέραιη συνάρτηση g και μια ακολουθία p_n μη αρνητικών ακεραίων τέτοια ώστε*

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right).$$

Απόδειξη. Σχηματίζουμε το απειρογινόμενο P του Θεωρήματος 5.20 χρησιμοποιώντας την ακολουθία των ριζών της f. Τότε η συνάρτηση f/P έχει μόνο επουσιώδεις ανωμαλίες και επομένως μπορεί να επεκταθεί σε μια ακέραιη συνάρτηση. Επίσης, η f/P δεν μηδενίζεται και επομένως, εφόσον το $\mathbb{C}$ είναι απλά συνεκτικό, έχει αναλυτικό λογάριθμο, δηλαδή υπάρχει μια ακέραιη συνάρτηση g τέτοια ώστε $f/P = e^g$. □

Παρατήρηση:

Αν η f έχει ρίζα τάξης m στο 0, τότε η παραγοντοποίηση της f παίρνει τη μορφή

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right).$$

Θα επεκτείνουμε τώρα το Θεώρημα 5.20: Σ'ένα αυθαίρετο ανοιχτό σύνολο μπορούμε να κατασκευάσουμε μια αναλυτική συνάρτηση με προδιαγεγραμμένο σύνολο ριζών (κάτω, φυσικά, από τον περιορισμό που θέτει το Θεώρημα Ταυτότητας).

Θεωρημα 5.22. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $A \subset U$. Υποθέτουμε ότι το A δεν έχει σημεία συσσώρευσης στο U. Σε κάθε $a \in A$ αντιστοιχούμε ένα θετικό ακέραιο $m(a)$. Τότε υπάρχει $f \in A(U)$ της οποίας οι ρίζες είναι τα σημεία του συνόλου A και τέτοια ώστε η f έχει ρίζα ταξης $m(a)$ για κάθε $a \in A$.*

Αποδειξη. Αν το A είναι πεπερασμένο τότε παίρνουμε για f ένα πολυώνυμο. Αν το A είναι άπειρο τότε είναι αριθμήσιμο διαφορετικά θα είχε σημείο συσσώρευσης στο U. Επιλέγουμε $w_0 \in U$, $r > 0$ τέτοια ώστε $D(w_0, r) \subset U$ και $A \cap D(w_0, r) = \emptyset$. Θέτουμε $T(z) = (z - w_0)^{-1}$, $V = T(U \setminus \{w_0\})$, $S = T(A)$. Το V είναι ανοιχτό και περιέχει μια περιοχή του ∞ άρα το $\mathbb{C} \setminus V$ είναι συμπαγές. Επίσης το S είναι φραγμένο και δεν έχει σημεία συσσώρευσης στο V. Έστω $\{a_n\}$ μια ακολουθία της οποίας οι όροι είναι στο S και στην οποία κάθε σημείο $T(a) \in S$ εμφανίζεται ακριβώς $m(a)$ φορές. Λόγω συμπάγειας του $\mathbb{C} \setminus V$, για κάθε a_n υπάρχει ένα σημείο $b_n \in \mathbb{C} \setminus V$ τέτοιο ώστε $|b_n - a_n| = \operatorname{dist}(a_n, \mathbb{C} \setminus V)$. Τότε $|b_n - a_n| \to 0$, διαφορετικά το S θα είχε σημεία συσσώρευσης στο V. Επομένως αν K είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του V, τότε υπάρχει N τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq N$ και για κάθε $z \in K$ έχουμε

$$\left| \frac{a_n - b_n}{z - b_n} \right| \leq \frac{1}{2},$$

το οποίο, από το Λήμμα 5.6, συνεπάγεται ότι

$$\left| 1 - E_n \left(\frac{a_n - b_n}{z - b_n} \right) \right| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}.$$

Άρα, από το Θεώρημα 5.19, η

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n \left(\frac{a_n - b_n}{z - b_n} \right)$$

είναι μια αναλυτική συνάρτηση στο V με ρίζα τάξης $m(a)$ σε κάθε $T(a) \in S$ και η οποία δεν έχει άλλες ρίζες. Ισχυριζόμαστε ότι η g είναι φραγμένη σε μια περιοχή του απείρου. Πράγματι, επιλέγουμε $R > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $|z| > R$ και για κάθε n να ισχύει

$$\left| \frac{a_n - b_n}{z - b_n} \right| \leq \frac{1}{2},$$

και άρα

$$\left| 1 - E_n \left(\frac{a_n - b_n}{z - b_n} \right) \right| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}.$$

Ιδιαίτερα,

$$\operatorname{Re} E_n \left(\frac{a_n - b_n}{z - b_n} \right) > 0.$$

Επομένως

$$g(z) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \log E_n \left(\frac{a_n - b_n}{z - b_n} \right) \right).$$

Αλλά

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \log E_n \left(\frac{a_n - b_n}{z - b_n} \right) \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \log E_n \left(\frac{a_n - b_n}{z - b_n} \right) \right| \\ &\leq \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left| E_n \left(\frac{a_n - b_n}{z - b_n} \right) - 1 \right| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = c.$$

Άρα $e^{-c} \leq |g(z)| \leq e^{c}$ για $|z| > R$. Συνεπώς η g έχει επουσιώδη ανωμαλία στο άπειρο και επιπλέον $g(\infty) \neq 0$. Επομένως η $f := g \circ T$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο w_0 και $f(w_0) \neq 0$. Συμπεραίνουμε ότι η f ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση στο U με ρίζα τάξης $m(a)$ για κάθε $a \in A$ και η οποία δεν έχει άλλες ρίζες. □

Σαν συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος, θα αποδείξουμε ένα χαρακτηρισμό των μερόμορφων συναρτήσεων.

Θεωρημα 5.23. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και f μερόμορφη στο U. Τότε υπάρχουν $g, h \in A(U)$ τέτοιες ώστε $f = g/h$.*

Αποδειξη. Έστω A το σύνολο των πόλων της f, και για κάθε $a \in A$ έστω $m(a)$ η τάξη του πόλου στο a. Από το Θεώρημα 5.22, υπάρχει $h \in A(U)$ τέτοια ώστε η h έχει ρίζα τάξης $m(a)$ σε κάθε $a \in A$, και επίσης η h δεν έχει άλλες ρίζες. Θέτουμε $g = fh$. Τότε η g έχει επουσιώδεις ανωμαλίες στο A και επομένως μπορεί να επεκταθεί σε μια ολόμορφη συνάρτηση στο U. Προφανώς $f = g/h$ στο $U \setminus A$.

□

Θα συνδυάσουμε τέλος το Θεώρημα Mittag-Leffler με το Θεώρημα 5.22 για να αποδείξουμε ένα αποτέλεσμα «παρεμβολής»: Μπορούμε να κατασκευάσουμε αναλυτικές συναρτήσεις με «προδιαγεγραμμένες τιμές» πάνω σε αυθαίρετα σύνολα χωρίς σημεία συσσώρευσης.

Θεωρημα 5.24. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $A \subset U$. Υποθέτουμε ότι το A δεν έχει σημεία συσσώρευσης στο U. Σε κάθε $a \in A$ αντιστοιχούμε ένα μη αρνητικό ακέραιο $m(a)$ και μιγαδικούς αριθμούς $w_{n,a}$, $0 \leq n \leq m(a)$. Τότε υπάρχει $f \in A(U)$ τέτοια ώστε $f^{(n)}(a)/n! = w_{n,a}$, $a \in A$, $0 \leq n \leq m(a)$.*

Αποδειξη. Από το Θεώρημα 5.22, υπάρχει $g \in A(U)$, τέτοια ώστε η g έχει ρίζα τάξης $m(a)+1$ σε κάθε $a \in A$, και τέτοια ώστε η g δεν έχει άλλες ρίζες. Ισχυριζόμαστε ότι σε κάθε $a \in A$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μια συνάρτηση

$$P_a(z) = \sum_{j=1}^{m(a)+1} c_{j,a}(z-a)^{-j},$$

έτσι ώστε το ανάπτυγμα Taylor της gP_a γύρω από το a να είναι

$$g(z)P_a(z) = w_{0,a} + w_{1,a}(z-a) + \cdots + w_{m(a),a}(z-a)^{m(a)} + \cdots .$$

Πράγματι, για z κοντά στο a έχουμε

$$g(z) = b_1(z-a)^{m(a)+1} + b_2(z-a)^{m(a)+2} + \cdots.,$$

όπου $b_1 \neq 0$. Αν τώρα

$$P_a(z) = c_{1,a}(z-a)^{-1} + \cdots + c_{m(a)+1,a}z^{-m(a)-1},$$

τότε

$$g(z)P_a(z) = (c_{m(a)+1,a} + c_{m(a),a}(z-a) + \cdots + c_{1,a}(z-a)^{m(a)}) \\ \cdot (b_1 + b_2(z-a) + b_3(z-a)^2 + \cdots).$$

Επιλέγουμε τα $c_{m(a)+1,a}, c_{m(a)a}, \dots, c_{1,a}$ διαδοχικά έτσι ώστε

$$g(z)P_a(z) = w_{0,a} + w_{1,a}(z-a) + \cdots + w_{m(a),a}(z-a)^{m(a)} + \cdots .$$

Δηλαδή εξισώνουμε συντελεστές και λύνουμε ως προς $c_{m(a)+1,a}, c_{m(a),a}, \dots, c_{1,a}$. Αυτό είναι δυνατό διότι $b_1 \neq 0$. Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε τις P_a. Τώρα από το Θεώρημα Mittag-Leffler, υπάρχει μια μερόμορφη συνάρτηση h στο U, της οποίας τα κύρια μέρη των αναπτυγμάτων Laurent είναι ακριβώς οι P_a. Η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $f := gh$. $\square$