

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

I. Ο ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΧΩΡΟΣ

- | | |
|------------------------------------------------|---|
| 1. Μήκος και εσωτερικό γινόμενο | 1 |
| 2. Ευκλείδεια και υψοσυνολα των \mathbb{R}^n | 3 |
| 3. Εξαρτήσεις και εσώχεια | 6 |

II. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΕ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ

- | | |
|------------------------------------------|----|
| 1. Μερικές και κατευθυνόμενοι παραγώγοι | 11 |
| 2. Η έννοια της παραγώγου | 15 |
| 3. Κανόνες παραγώγισης | 19 |
| 4. Μερικοί παραγώγοι ανώτερης τάξης | 23 |
| 5. Το θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης | 26 |
| 6. Διαφορικές πολλαπλότητες | 31 |

III. ΔΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΕ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ

- | | |
|--------------------------------------------------|----|
| 1. Δοκλήρωση σε παραλληλεπίπεδα | 42 |
| 2. Μέτρο ηξδού και περιεχόμενο ηξδού | 45 |
| 3. Δοκλήρωση σε φραγμένα σύνολα | 49 |
| 4. Διαφορίζει της μονάδας | 52 |
| 5. Γενικωμένα δοκλήρωματα | 54 |
| 6. Μέτρο ηξδού και διαφορικές συναρτήσεις | 57 |
| 7. Ο τύπος αλλαγής μεταβλητών κατά την δοκλήρωση | 60 |

IV. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

- | | |
|---------------------------------------------------------------|----|
| 1. Ταυτοίς | 72 |
| 2. Δικωμάτικα πεδία και διαφορικές μορφές στο ευκλείδειο χώρο | 78 |
| 3. Το θεώρημα του Stokes για αλυσίδες | 86 |
| 4. Διαφορικές μορφές σε πολλαπλότητες | 92 |
| 5. Δοκλήρωση σε πολλαπλότητες | 97 |

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΑΗΤΩΝ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΑΘΑΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ 1992

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

απόσταση 3	Θεώρημα Heine-Borel 6
ακρότατο 14	Θεώρημα Fubini 44
αμφιδιαφορία 26	Θεώρημα Stokes 89, 100
άλγεβρα Γινώσιμων 80	Θεώρημα αντιστροφής συναρτήσεων 27
αλυσίδα 87	Θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων 29
βάση, κανονική 2	Ιακωβιανός πίνακας 16
γραφική απεικόνιση 9	κάμψη 4
γραφήματα συναρτήσεων 7	κωνόσφαιρα της αλυσίδας 19
 	κλειστότητα συνόλου 6
διαμέριση της μονάδας 54	κύκλος, 88
διάνυσμα 1	εκφυλισμένος 91
διανυσματικό πεδίο 79, 94	
διαφορική μορφή, 71, 94	κέντρο μάζας 45
κλειστή, ακριβής 83, 97	κύβος 1
διαφορικά 80, 95, 97	κύβος 3
εικόνα συνόλου 6	Διακρίσιμα, 43
εικόνα, αντιστροφή 7	γενικευμένο 54
εσωτερικό γινόμενο 2	Διακρίσιμη σε φραγμένα σύνολα, 49
εσωτερικό σύνολο 6	σε πολλαπλότητες 97
εξωτερικό γινόμενο 74	
εξωτερική Αλγεβρα 78	παράγωγοι, 16, 93
εξωτερική παράγωγος 86	βασική, 11
εφαπτόμενη γραμμική απεικόνιση 80, 93	κατευθυνόμενη, 11
εφαπτόμενος χώρος 92	αντικείμενη τάξη, 23
	βασική 23

παράλληλες πεδίο	42
περιχόμενο κινδέν	45
πλάταπλότητα,	31
με σύνορο,	34
προβανασ διειρήνη	98
προβανασ διειρήνη	98

σημείο	1
συγκλίση	3
συνάρτηση, συνέχης,	7
διαφορικότη,	15, 92
C^1 ,	19
C^r, C^∞ ,	23
ολοκληρωσίμη	43
σύνολο, ανοιχτό,	3
κλειστό,	3
φραγμένο,	4
επιπαγές,	4
Jordan πετριώτο,	50
απομορφο	84
σύνορο, αλυσίδας,	87
συνόλου	6
σύνθημα τοπικών συντεταγμένων	34

Ταλαντώση	47
Τανυστής, κ-ελαστικός,	72
ανισομετρικός	73
Τανυστικός γινώμενο	72
Τύπος του Taylor	25
Τύπος αλλαγής της μεταβλητής	64

1. Ο ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΧΩΡΟΣ

1. Μήκος και εσωτερικά γινόμενα

Ο n -διάστατος ευκλείδειος χώρος \mathbb{R}^n είναι εφ' όψιν το n -αριθμικό γινόμενο $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ n - φορές, δηλαδή $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$ όπως $\vec{x} \in (x_1, \dots, x_n)$ ορίζεται. Ζούμε για διατεταγμένη n -άδα. Τα στοιχεία του \mathbb{R}^n αποκαλούνται διάνυσμα. Αν $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, τότε ο πραγματικός αριθμός x_i λέγεται (-επιτεταγμένη του x).

Ο χώρος \mathbb{R}^n έχει την δομή διανυσματικού χώρου, όταν $\forall \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad \text{και} \quad \lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Για τον λόγο αυτό τα διάνυσμα του \mathbb{R}^n αποκαλούνται και διανυσματά στον θεσμό να δώσουμε έμφαση στην διανυσματική δομή του \mathbb{R}^n .

Αν $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, τότε ο n -αριθμικός αριθμός

$$\|\vec{x}\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

λέγεται μήκος του \vec{x} . Σημαντική σημασία είναι η σχέση του μήκους με την διανυσματική δομή του \mathbb{R}^n .

1.1 Λήμματα Για κάθε $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$

ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) $\|\vec{x}\| \geq 0$ και $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

(β) $|\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$

(γ) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

(δ) $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$

Απόδειξη (α) προφανές

(β) Αν τα \vec{x}, \vec{y} είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε ισχύει προφανώς η ισότητα. Αν όχι τότε $t\vec{y} - \vec{x} \neq \vec{0}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και συνεπώς

$$0 < \|t\vec{y} - \vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n (ty_i - x_i)^2 = t^2 \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) - 2t \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει t που η παραπάνω έκφραση είναι αρνητική, δηλαδή

$$4 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) < 0 \iff$$

$$1 \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R} \cap \mathbb{R} y \cap \mathbb{R} x$$

$$(b) \|x+y\|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq$$

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

(δ) προφανές

Η ποσότητα $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ λέγεται σωστός γινόμενο των x, y . Έτσι το (β) τον λέμε καθώς και γράφεται $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.
3.2 Λήμμα Η $\langle, \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ένα συμμετρικό, διγραμμικό και θετικό συντελεστή. Έτσι:

$$(α) \|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^n \text{ και}$$

$$(β) \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

Απόδειξη Μόνο το (β) χρειάζεται απόδειξη. Έχουμε:

$$\frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \frac{1}{4} (\langle x+y, x+y \rangle - \langle x-y, x-y \rangle) =$$

$$\frac{1}{4} [\langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle - \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle - \langle y, y \rangle] =$$

$$\frac{1}{4} (4 \langle x, y \rangle) = \langle x, y \rangle.$$

Τα διανυσματικά $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, $1 \leq i \leq n$, με το 1 στην i -οστή θέση, αποτελούν βάση του \mathbb{R}^n , της σπινθηροειδούς κανονικής βάσης του \mathbb{R}^n . Αν $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι ένα γραμμικό συντελεστή, τότε ο πίνακας της T ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ είναι ο $m \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ όταν $T(e_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} e_j$, $1 \leq i \leq n$. Οι συντελεστές λοιπόν στην i -οστή στήλη του πίνακα A θα γράφονται συνδυασμό των στοιχείων της κανονικής βάσης του \mathbb{R}^m που παράγονται από την i -οστή του πύλη της T . Αν λοιπόν $T(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)$, τότε

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Αν $S: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι μια γραμμική απεικόνιση με πίνακα B , τότε ο πίνακας της σύνθεσης $S \circ T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ο $B \cdot A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

2. Συμπύκνωση και υποσύνολα του \mathbb{R}^n

Αν $x, y \in \mathbb{R}^n$, τότε ο n -αριθμητικός πολλαπλασιασμός $\|x-y\|$ λέγεται απόσταση των x, y . Μια ακολουθία $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ στην \mathbb{R}^n λέγεται ότι συμπύκνωση στο σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ αν $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x\| = 0$.

Αν $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$ και $x = (x_1, \dots, x_n)$ αυτό είναι ισοδύναμο με $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = x_i$ για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$. Είναι προφανές ότι $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x$, $\lim_{k \rightarrow \infty} y^k = y$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τότε $\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda x^k + \mu y^k) = \lambda x + \mu y$ και $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle x^k, y^k \rangle = \langle x, y \rangle$. Από τα θεωρήματα του Cauchy για τη πληρότητα του \mathbb{R} έχουμε αμέσως:

2.1. Θεώρημα Μια ακολουθία $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ στην \mathbb{R}^n συμπύκνωση στο \mathbb{R}^n τότε και μόνο τότε όταν

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \|x^k - x^l\| < \epsilon \quad \forall k, l \geq N$$

Μια ακολουθία $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ στο \mathbb{R}^n λέγεται φραγμένη αν υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x^k\| \leq M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Προφανώς κάθε συμπύκνωση ακολουθία είναι φραγμένη. Από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass για ακολουθίες στο \mathbb{R} έχουμε αμέσως:

2.2. Θεώρημα Κάθε φραγμένη ακολουθία στο \mathbb{R}^n έχει μία υποακολουθία που συμπύκνωση σε κάποιο σημείο του \mathbb{R}^n .

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$ το σύνολο $S(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x-y\| < r\}$ λέγεται ανοικτή μπάλα με κέντρο x και ακτίνα r . Έτσι $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x$ τότε και μόνο τότε όταν $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : x^k \in S(x, \epsilon) \quad \forall k \geq N$.

Το σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται κλειστό όταν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $S(x, \delta) \subset A$. Αν το $\mathbb{R}^n - A$ είναι ανοικτό τότε το A λέγεται κλειστό.

2.3. Λήμμα Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι κλειστό τότε και μόνο τότε όταν το ότι κάθε συμπύκνωση ακολουθία στην A συμπύκνωση στο A . Απόδειξη Έστω ότι το A είναι κλειστό και $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία

εφ' όσον τω A τω συνεπείκει ότι $x \in \mathbb{R}^n$. Αν $x \in \mathbb{R}^n - A$, τότε
 υπάρχει $\delta > 0$ τέ $S(x, \delta) \subset \mathbb{R}^n - A$. Ένωτίν, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέ
 $x^k \in S(x, \frac{1}{k}) \subset \mathbb{R}^n - A$ γι κάθε $k \in \mathbb{N}$, όττω Ανάστροφά έστω
 ότι το A έσν ένα κλειστό, ένταίν το $\mathbb{R}^n - A$ έσν ένα άνοχτό.
 Τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n - A$ τέ $S(x, \delta) \not\subset \mathbb{R}^n - A$ γι κάθε $\delta > 0$, ένταίν
 $S(x, \delta) \cap A \neq \emptyset$ γι κάθε $\delta > 0$. Ένωτίν γι κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει
 $x^k \in S(x, \frac{1}{k}) \cap A$. Τότε $\|x^k - x\| < \frac{1}{k} \rightarrow 0$. Άρα $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x \in \mathbb{R}^n - A$.

Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται φραγμένο αν υπάρχει $M > 0$
 τέ $\|x\| \leq M$ γι κάθε $x \in A$.

2.4. Πρόταση Το σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι κλειστό και φραγμένο, τότε
 και μόνο τότε όταν κάθε ακολουθία όφείλων τω A έχει ένα υποσύνολο
 τω συνεπείκει σ' ένα όφείο τω A .

Απόδειξη Το όφείο προκύπτει από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass και
 το Λήμμα 2.3. Ανάστροφά αν το A έσν ένα φραγμένο, τότε
 γι κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x^k \in A$ τέ $\|x^k\| > k$. Τότε όττω η
 ακολουθία $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ έσν ένα κλειστό συνεπείκει άποσύνολο.
 Από το Λήμμα 2.3 προκύπτει όφείκει ότι το A είναι κλειστό.

Υπάρχει και ένα άλλο, πιο άφρητερό, τρόπο γι να περιγράψει
 κανείς τα κλειστά και φραγμένα υποσύνολα τω \mathbb{R}^n . Η οικογένεια
 $\{U_i : i \in I\}$ άνοχτων υποσυνόλων τω \mathbb{R}^n λέγεται άνοχτό κάλυμμα τω
 σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ αν $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Το σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται σφικτίζ
 αν κάθε άνοχτό κάλυμμα τω A έχει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα
 τω A .

2.5. Πρόταση (α) Κάθε κλειστό υποσύνολο έσν σφικτίζ σύνολο είναι
 σφικτίζ.

(β) Κάθε σφικτίζ σύνολο είναι κλειστό και φραγμένο.

Απόδειξη έστω $B \subset A$ ένα κλειστό σύνολο, όπότε A είναι σφικτίζ
 και $\{U_i : i \in I\}$ ένα άνοχτό κάλυμμα τω B . Τότε το $\{U_i : i \in I\} \cup \{\mathbb{R}^n - B\}$
 είναι ένα άνοχτό κάλυμμα τω A . Άρα υπάρχει $i_1, \dots, i_k \in I$ τέ
 $A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k} \cup (\mathbb{R}^n - B)$. Τότε όφείκει $B \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$.

φ) Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα αλληλοξένο σύνολο και $x \in \mathbb{R}^n - A$. Για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $S(x, \delta) \cap S(\alpha, \delta) = \emptyset$. Η οικογένεια $\{S(\alpha, \delta_\alpha) : \alpha \in A\}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του A . Συνεπώς, υπάρχουν $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in A$ ώστε $A \subset S(\alpha_1, \delta_{\alpha_1}) \cup \dots \cup S(\alpha_k, \delta_{\alpha_k})$. Θετάρτε $\delta = \min\{\delta_{\alpha_1}, \dots, \delta_{\alpha_k}\}$. Τότε προφανώς $S(x, \delta) \subset \mathbb{R}^n - A$. Αυτό δείχνει ότι το A είναι κλειστό. Θεωρώντας τώρα το ανοιχτό κάλυμμα $\{S(0, \kappa) : \kappa \in \mathbb{N}\}$ του A βλέπουμε ότι υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}$ ώστε $A \subset S(0, \kappa)$, που επιτρέπει να το A είναι πεπεσμένο.

2.6. Θεώρημα Για κάθε $a < b$, το κλειστό διάστημα $[a, b]$ είναι αλληλοξένο.

Απόδειξη Έστω $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ ένα ανοιχτό κάλυμμα του $[a, b]$ και $A = \{x \in [a, b] : \text{το } [a, x] \text{ καλύπτεται από ένα πεπεσμένο υποσύνολο του } \mathcal{U}\}$. Τότε $\alpha \in A$ και συνεπώς το A είναι μη-κενό και πεπεσμένο. Υπάρχει λοιπόν το $t = \sup A$. Προφανώς $a < t \leq b$. Αρκεί να δείξουμε ότι $t \in A$ και $t = b$. Υπάρχει $i \in I$ ώστε $t \in U_i$. Αφού το U_i είναι ανοιχτό και $t = \sup A$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $x \in U_i$. Μάλιστα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $[x, t] \subset U_i$, αφού στο U_i περιέχεται ένα ανοιχτό διάστημα με κέντρο το t . Αν τώρα $[a, x] \subset U_1 \cup \dots \cup U_k$, τότε $[a, t] \subset U_1 \cup \dots \cup U_k \cup U_i$, που δείχνει ότι $t \in A$. Έστω τώρα ότι $t < b$. Τότε υπάρχει $t < y < b$ με $y \in U_i$. Τότε το $[a, y] \subset U_1 \cup \dots \cup U_k \cup U_i$ που αντιφασκεύει με τον ορισμό του t .

2.7. Λήμμα Έστω $B \subset \mathbb{R}^n$ ένα αλληλοξένο σύνολο, $x \in \mathbb{R}^n$ και $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ ένα ανοιχτό κάλυμμα του $\{x\} \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Τότε υπάρχει ένα ανοιχτό πεδίο $U \subset \mathbb{R}^n$ του x ώστε το $U \times B$ καλύπτεται από ένα πεπεσμένο υποσύνολο του \mathcal{U} .

Απόδειξη Επειδή το $\{x\} \times B$ είναι αλληλοξένο (αφού η προβολή ανοιχτού συνόλου είναι ανοιχτό σύνολο) υπάρχουν $i_1, \dots, i_k \in I$ με $\{x\} \times B \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$. Για κάθε $y \in B$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $S(x, \delta) \times S(y, \delta) \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$. Επειδή το B είναι αλληλοξένο υπάρχουν $y_1, \dots, y_k \in B$ με $B \subset S(y_1, \delta_{y_1}) \cup \dots \cup S(y_k, \delta_{y_k})$. Θετάρτε $\delta = S(x, \delta)$, όπου $\delta = \min\{\delta_{y_1}, \dots, \delta_{y_k}\}$. Αν $(x', y) \in U \times B$ τότε υπάρχει $y_i \in B$ με $y' \in S(y_i, \delta_{y_i})$, οβίδη και βεβαιώνεται $x' \in S(x, \delta_{y_i})$.

Από $(x, y) \in S(x, \delta_x) \times S(y, \delta_y) \subset U_i \cup \dots \cup U_n$ ορί.

2.8 Πρόταση Αν τα $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m$ είναι συμπαγή σύνολα, τότε το $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ είναι συμπαγές.

Απόδειξη Έστω $V = \{U_i : i \in I\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα των $A \times B$. Τότε από το Λήμμα 2.7, κάθε $x \in A$ έχει μια ανοικτή περιοχή U_x ώστε το $U_x \times B$ καλύπτεται από ένα πεπερασμένο υποσύνολο των V . Επειδή το A είναι συμπαγές υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in A$ με $A \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$. Συνεπώς $A \times B \subset (U_{x_1} \times B) \cup \dots \cup (U_{x_n} \times B)$ από που προκύπτει το επιπλέον.

2.9 Πρόταση (α) Αν τα A_1, \dots, A_n είναι συμπαγή, και το $A_1 \times \dots \times A_n$ είναι

(β) το $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές, $a_i \leq b_i, 1 \leq i \leq n$

(γ) Η ιδεώδης τρύπα $S(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq r\}$ είναι συμπαγής.

2.10 Θεώρημα (Heine-Borel) Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

- (α) Το A είναι συμπαγές
- (β) Το A είναι κλειστό και φραγμένο
- (γ) Κάθε αλληλοαποκλειόμενα υποσύνολα των A έχει ένα υποσύνολο των συσφιγμένων σε κάποιο σημείο του A .

Απόδειξη Μόνο το (β) \Rightarrow (α) χρειάζεται απόδειξη. Από το A είναι φραγμένο υπάρχει $M > 0$ ώστε $A \subset S[0, M]$. Οπότε το $S[0, M]$ είναι συμπαγές. Από το A είναι κλειστό υποσύνολο συμπαγούς συνόλου είναι το ίδιο συμπαγές.

Αν $A \subset \mathbb{R}^n$, τότε το σύνολο $A^\circ = \{x \in A : \exists \delta > 0 : S(x, \delta) \subset A\}$ λέγεται εσωτερικό του A και το $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : A \cap S(x, \delta) \neq \emptyset, (\mathbb{R}^n \setminus A) \cap S(x, \delta) \neq \emptyset \forall \delta > 0\}$ λέγεται συνοριακό του A . Το A° είναι πάντα ανοικτό σύνολο ενώ το ∂A κλειστό. Συνεπώς το ∂A είναι συμπαγές και το A είναι το σύνολο $\bar{A} = A^\circ \cup \partial A$ λέγεται κλειστότητα του A και είναι πάντα κλειστό. Αν το A είναι φραγμένο τότε το \bar{A} είναι συμπαγές.

3. Συνάρτησις και συνέχεις

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ μια συνάρτησις. Αν $B \subset A$, το σύνολο $f(B) = \{f(x) : x \in B\}$ λέγεται εικόνα του B μέσω της f . Αν $C \subset \mathbb{R}^m$,

Τότε το σύνολο $f^{-1}(C) = \{x \in A : f(x) \in C\}$ λέγεται αντίστροφη εικασία του C μέσω της f . Το σύνολο $G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : x \in A, y = f(x)\}$ λέγεται γράφη της f .

Αν $m=1$ και $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ τότε ορίζονται κατά τον επόμενο τρόπο οι $f \pm g$, $f \cdot g$ και f/g , η τελευταία στο $\{x \in A : g(x) \neq 0\}$.

Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^m$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}^k$, τότε ορίζεται η σύνθεση $g \circ f: f^{-1}(B) \rightarrow \mathbb{R}^k$. Αν η f είναι 1-1, τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: f(A) \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ έχει m -συντεταγμένες συναρτήσεις $f_1, \dots, f_m: A \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, κατ'Αντίστροφα. m συναρτήσεις $f_1, \dots, f_m: A \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζουν μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Επιπλέον $f = (f_1, \dots, f_m)$. Επίσης αν $\pi_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η i -πρόσβολη, τότε $f = (\pi_1 \circ f, \dots, \pi_m \circ f)$.

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ λέγεται συνεχής στο $x_0 \in A$ αν $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in A$ και $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$ ή ισοδύναμα $f(A \cap S(x_0, \delta)) \subset S(f(x_0), \epsilon)$. Ευνάτως αναφερόμεθα στη $f = (f_1, \dots, f_m): A \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής στο x_0 , τότε και λόγω του ότι οι $f_i: A \rightarrow \mathbb{R}$, ισίως είναι όλες συνεχείς στο x_0 . Η $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A .

3.1. Θεώρημα Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής τότε και μόνο τότε αν για κάθε ανοικτό σύνολο $V \subset \mathbb{R}^m$ υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$ ώστε $f^{-1}(V) = U \cap A$.

Απόδειξη Εστω ότι η f είναι συνεχής και το $V \subset \mathbb{R}^m$ ανοικτό. Αν $x \in f^{-1}(V)$, τότε $f(x) \in V$. Υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $S(f(x), \epsilon) \subset V$, αφού το V είναι ανοικτό. Επειδή η f είναι συνεχής, υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε $f(A \cap S(x, \delta_x)) \subset S(f(x), \epsilon) \subset V$. Θετουμε $U = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} S(x, \delta_x)$. Τότε προφανώς $f^{-1}(V) = U \cap A$. Αντίστροφα: Εστω $x_0 \in A$ και $\epsilon > 0$. Το $S(f(x_0), \epsilon)$ είναι ανοικτό στο \mathbb{R}^m και συνεπώς, υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο $V \subset \mathbb{R}^m$ τέτοιο $f^{-1}(S(f(x_0), \epsilon)) = U \cap A$. Προφανώς $x_0 \in U \cap A \subset U$ συνεπώς υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $S(x_0, \delta) \subset U$. Τότε $f(A \cap S(x_0, \delta)) \subset S(f(x_0), \epsilon)$.

Ευκολά επισης αποδεικνυεται οτι η $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ειναι συνεχης στο x_0 εαν και μονα τοτε οτι $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Το επισης θεωρημα ειναι εξαρτησης αυταυτου.

3.2. Θεωρημα Εστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ για συνεχης συναρτησης. Αν το A ειναι επισφαιρις, τοτε το $f(A)$ ειναι επισφαιρις.

Αποδειξη Εστω $\{V_i : i \in I\}$ ειναι ανοιχτο καλυμμα του $f(A)$. Τοτε, για καθο $i \in I$ υπαρχει ειναι ανοιχτο συνολο $U_i \subset \mathbb{R}^m$ ωστε $f^{-1}(V_i) = U_i \cap A$.

Προφανως, η οικογενεια $\{U_i : i \in I\}$ ειναι ανοιχτο καλυμμα του A . Αρα υπαρχει $i_1, \dots, i_k \in I$ τε $A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$. Συνεπως $f(A) \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k}$.

3.3. Παρομοια Εστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ για συνεχης συναρτησης. Αν το A ειναι επισφαιρις τοτε υπαρχουν $x_0, y_0 \in A$ τε $f(x_0) = \inf f(A)$ και $f(y_0) = \sup f(A)$.

Μια σκεψη ισοτιμια των συνεχων συναρτησεων των αλτιμων εε επισφαιρις συνολα ειναι η ακολουθη:

3.4. Θεωρημα Εστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ για συνεχης συναρτησης. Αν το A ειναι επισφαιρις τοτε η f ειναι ομοιομορφως συνεχης. Συλλογισι

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : x, y \in A \text{ και } \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon$$

Αποδειξη Εστω $\epsilon > 0$. Για καθο $x \in A$ υπαρχει $\delta_x > 0$ ωστε $f(A \cap S(x, \delta_x)) \subset S(f(x), \epsilon/2)$. Επισης το A ειναι επισφαιρις και η οικογενεια $\{S(x, \delta_x/2) : x \in A\}$ ανοιχτο καλυμμα του A υπαρχουν $x_1, \dots, x_k \in A$ τε $A \subset S(x_1, \delta_{x_1}/2) \cup \dots \cup S(x_k, \delta_{x_k}/2)$. Οετοιμ $\delta = \frac{1}{2} \min\{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_k}\} > 0$.

Εστω τωρα $x, y \in A$ τε $\|x - y\| < \delta$. Τοτε υπαρχει καθοις $x_i, 1 \leq i \leq k$ ωστε $\|x - x_i\| < \delta_{x_i}/2$. Επισης $\|x_i - y\| \leq \|x - x_i\| + \|x - y\| < \delta + \frac{1}{2}\delta_{x_i} \leq \delta_{x_i}$. Αρα $\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f(x_i)\| + \|f(x_i) - f(y)\| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.

Ειναι πωρα σαφως ομοιομορφως συνεχης συναρτησεων των S_n οειδων εε επισφαιρις συνολα ειναι οι γραμμικες απεικονισεις. Εστω $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ για γραμμικη απεικονιση. Για καθο $x = (x_1, \dots, x_n)$ τε $\|x\| \leq 1$ ισχυει $|x_i| \leq 1, 1 \leq i \leq n$. Τοτε εκοιμ ϵ

$$\|Tx\| = \left\| T\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i T(e_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|T(e_i)\| \leq \sum_{i=1}^n \|T(e_i)\|$$

Συνεπως το συνολο $\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$ ειναι ανω φραγμενο. Οει, τοτε

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}.$$

Ο ημ-αριθμητικός αριθμός $\|T\|$ λέγεται νόρμα της T . Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε τότε $\|x/\|x\|\| = 1$ συνεπώς $\|T(\frac{x}{\|x\|})\| \leq \|T\| \Rightarrow \|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$.

Αυτο δείχνει ότι η T είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Η νόρμα των γραμμικών απεικονίσεων έχει αλλαγές ιδιότητες το τελεα στο \mathbb{R}^n .

3.5. Πρόταση (α) Αν οι $T, S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικές και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|$ και $\|\lambda T\| = |\lambda| \|T\|$

(β) $\|T\| = 0$ τότε και μόνο τότε όταν $T=0$.

(γ) Αν οι $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, S: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ είναι γραμμικές, τότε $\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$.

Απόδειξη. Είναι προφανές για (α), (β). Ως προς το (γ), για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε $\|S \circ T(x)\| \leq \|S\| \cdot \|T(x)\| \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$, απ' όπου προκύπτει το συμπέρασμα.

Για (α), (β) της προτάσεως 3.5. δείχνω ότι ο χώρος των γραμμικών απεικονίσεων $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ εφοδιασμένος με την $\|\cdot\|$ είναι χώρος με νόρμα. Μάλιστα είναι χώρος Banach. Πρώτα, έστω $\{T_k: k \in \mathbb{N}\}$ μια ακολουθία Cauchy στον $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Τότε $\|T_k(x) - T_\lambda(x)\| \leq \|T_k - T_\lambda\| \cdot \|x\|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, που σημαίνει ότι η $\{T_k(x); k \in \mathbb{N}\}$ είναι ακολουθία Cauchy στο \mathbb{R}^m . Αφού ο \mathbb{R}^m είναι πλήρης, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει κλειστός ενδο $T(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(x)$. Η απεικόνιση $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ που ορίζεται έτσι είναι προφανώς γραμμική. Απομένει να δείξουμε ότι $\lim_{k \rightarrow \infty} \|T_k - T\| = 0$. Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\|T_k - T_\lambda\| < \epsilon/2$, όταν $k, \lambda \geq N$. Αν $\|x\| \leq 1$, τότε $\|T_k(x) - T_\lambda(x)\| \leq \|T_k - T_\lambda\| \cdot \|x\| < \epsilon/2$, οπότε για $\lambda \rightarrow \infty$ έχουμε $\|T_k(x) - T(x)\| \leq \epsilon/2$ για κάθε $\|x\| \leq 1$. Άρα $\|T_k - T\| \leq \epsilon/2 < \epsilon, k \geq N$.

3.6. Αιτήμα Έστω $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ με πίνακα $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, τότε

$$\|T\| \leq \left(\sum_{ij} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

Απόδειξη Για κάθε $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ έχουμε από την ανισότητα Cauchy-Schwarz: $\|T(x)\|^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)^2 \leq \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right] \left[\sum_{j=1}^n x_j^2 \right] = \left(\sum_{ij} a_{ij}^2 \right) \cdot \|x\|^2$
 Αν λοιπόν $\|x\| \leq 1$ τότε

$$\|T(x)\| \leq \left(\sum_{ij} a_{ij}^2 \right)^{1/2} \cdot \|x\|$$

Επίσης, αφού $\|T(e_j)\| = \left\| \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i \right\| = \left(\sum_{i=1}^m a_{ij}^2 \right)^{1/2} \geq |a_{ij}|$ έχουμε

$$\max\{|a_{ij}| : i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}\} \leq \|T\| \leq \left(\sum_{ij} a_{ij}^2\right)^{1/2}$$

Η απόδειξη τύπου της παρακάτω πρότασης είναι τετριπτή.

3.7. Πρόταση Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και $a_{ij} : A \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις, $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$.

Για κάθε $y \in A$ θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $T(y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

με πίνακα $(a_{ij}(y)) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Η απεικόνιση $T : A \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

είναι συνεχής, τότε και είναι τότε σταθερές οι συναρτήσεις a_{ij}

είναι συνεχείς, $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$.

Λαμβανόμενου υπό όψιν ότι $\frac{1}{\sqrt{mn}} \left(\sum_{ij} a_{ij}^2\right)^{1/2} \leq \max\{|a_{ij}| : i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}\}$

από την παραπάνω ισότητα παίρνουμε την

$$\frac{1}{\sqrt{mn}} \left(\sum_{ij} a_{ij}^2\right)^{1/2} \leq \|T\| \leq \left(\sum_{ij} a_{ij}^2\right)^{1/2}$$

που δείχνει ότι η norm $\|\cdot\|$ στην περίπτωση στο $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{m \times n} \cong \mathbb{R}^{m \cdot n}$ είναι ισοδύναμη με το ευκλείδειο l_2 norm.

Έστω τώρα $GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Το σύνολο όλων των αντιστρέψιμων γραμμικών απεικονίσεων.

3.8 Θεώρημα (α) Αν $T \in GL(n, \mathbb{R})$ και $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ με $\|S-T\| \leq \delta$,

τότε $S \in GL(n, \mathbb{R})$. Ένδεκα, το $GL(n, \mathbb{R})$ είναι ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^{n^2} .

(β) Η απεικόνιση $\gamma : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ με $\gamma(T) = T^{-1}$ είναι συνεχής.

Απόδειξη (α) Θεωρούμε $\|T^{-1}\| = 1/a$ και $\|S-T\| = b$, οπότε $b < a$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε $a\|x\| = a\|T^{-1} \cdot T(x)\| \leq a\|T^{-1}\| \|T(x)\| = \|T(x)\| \leq$

$\|T(x) - S(x) + S(x)\| \leq \|(T-S)(x)\| + \|S(x)\| \leq \|T-S\| \|x\| + \|S(x)\| = b\|x\| + \|S(x)\|$.

Αντικαθιστώντας $(a-b)\|x\| \leq \|S(x)\|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Αφού $a > b$, αυτό δείχνει

ότι $S(x) \neq 0$, όταν $x \neq 0$, δηλαδή η S είναι "1-1", από ισομορφισμός

(β) Έχουμε $(a-b)\|S^{-1}y\| \leq \|S \cdot S^{-1}(y)\| = \|y\|$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$

Ένδεκα, $\|S^{-1}\| \leq \frac{1}{a-b}$. Επίσης $S^{-1} - T^{-1} = S^{-1}(T-S) \cdot T^{-1}$, και

κατά συνέπεια, από την πρόταση 3.5 (γ), $\|S^{-1} - T^{-1}\| \leq \|S^{-1}\| \|T-S\| \|T^{-1}\|$

$\leq \frac{b}{(a-b)a}$. Έτσι για κάθε $\epsilon > 0$ αν $\delta = \frac{a^2 \epsilon}{1+a}$ έχουμε

$$\|S-T\| < \delta \Rightarrow \|S^{-1} - T^{-1}\| < \epsilon \quad \text{o.e.s.}$$

II. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΕ ΒΥΚΛΕΙΑΙΕΙΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ

I. ΜΕΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΚΑΤΕΒΟΥΣΤΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΕΣ

Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$ το σύνολο $\pi_i(A)$ είναι ανοιχτό στο \mathbb{R} . Εστω $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$ και $g_i: \pi_i(A) \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση του τύπου

$$g_i(t) \equiv f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Αν η g_i είναι διαφορίσιμη στο σημείο $x_i \in \pi_i(A)$, τότε η f λέγεται

διαφορίσιμη ως προς την i -εξαρτημένη και η $\partial_i f(x) = g_i'(x_i)$

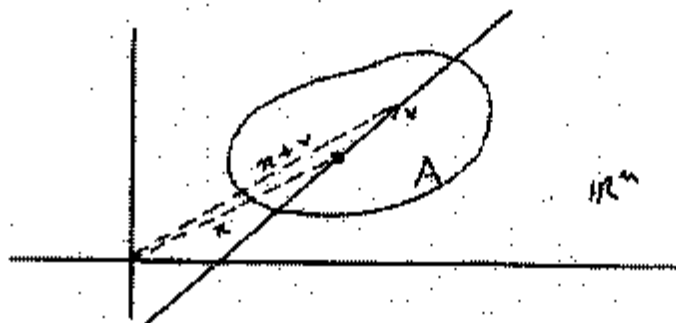
λέγεται i -εξαρτημένη παράγωγος της f στο σημείο x , οπότε

$$\partial_i f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_i(x_i + h) - g_i(x_i)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h}$$

όπου $\{e_1, \dots, e_n\}$ είναι η κανονική βάση του \mathbb{R}^n . Δηλαδή, η $\partial_i f(x)$ είναι η παράγωγος του περιεπεταίου της f πάνω στις εδρείες που περνούν από το x με κατεύθυνση e_i . Μπορούμε λοιπόν να γενικεύσουμε της έννοια της i -εξαρτημένης παράγωγος ως εξής:

1.1. Ορισμός Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Εστω ακόμα $x \in A$ και $v \in \mathbb{R}^n$. Η κατεύθυνση παράγωγος της f στο σημείο x στην κατεύθυνση v είναι το όριο

$$f'(x; v) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h}, \text{ αν υπάρχει.}$$



Επειδή το A είναι ανοιχτό, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $S(x, \delta) \subset A$. Επίσης, υπάρχει $\eta > 0$ ώστε $|h| < \eta \Rightarrow \|x + hv - x\| = |h| \|v\| < \delta$. Συνεπώς για κάθε $|h| < \eta$ το $f(x + hv)$ ορίζεται.

Γενικότερα, αμφιπλευρικές, οι $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοικτό σύνολο και $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ μια συνάρτηση με $f = (f_1, \dots, f_m)$ τότε για κάθε $x \in A$ και $v \in \mathbb{R}^n$, ορίζεται ως κατεύθυνση παράγωγο της f στο x στην κατεύθυνση v το διάνυσμα

$$f'(x; v) = \begin{pmatrix} f_1'(x; v) \\ \vdots \\ f_m'(x; v) \end{pmatrix}$$

Είναι φανερό από τους ορίσους ότι $\partial_i f(x) = f'(x; e_i)$, $1 \leq i \leq n$.

1.2 Παράδειγμα (α) Εστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \|x\|^2$, $S_n \times S_1$
 $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Τότε $\partial_i f(x) = 2x_i$, όπου $x = (x_1, \dots, x_n)$.
 Γενικότερα αν $v \in \mathbb{R}^n$, τότε θέτουμε $F(t) = f(x + tv)$, οπότε
 $F'(0) = f'(x; v)$. Όμως $F(t) = \|x + tv\|^2 = \|x\|^2 + 2t \langle x, v \rangle + t^2 \|v\|^2$,
 Άρα $f'(x; v) = 2 \langle x, v \rangle$.

(β) Αν η $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι γαλφίτης απεικόνιση και $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, τότε $F(t) = f(x + tv) = f(x) + t f'(x; v)$. Ένταυς, $f'(x; v) = F'(0) = f'(x)$.

Ενα αρκετά σημαντικό γεγονός είναι ότι η υπέρβαση από τους κατεύθυνση παράγωγο $f'(x; v)$, $v \in \mathbb{R}^n$ μια συνάρτηση f που εξαρτάται της συνέχειας της f στο σημείο x , όπως θα δείξουμε αργότερα.

1.3 Παράδειγμα Εστω $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$, αφού $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0)$.

Αν τυχόν $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ τότε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, hv) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hv_1, hv_2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + h^2 v_2^2} = \begin{cases} \frac{v_2^2}{v_1} & , v_1 \neq 0 \\ 0 & , v_1 = 0 \end{cases}$$

Άρα η $f(0, v)$ υπάρχει για κάθε $v \in \mathbb{R}^2$. Εξ ου βέβαια υπάρχουν και οι τριπλές παράγωγοι $\partial_1 f(0)$, $\partial_2 f(0)$.

Ευρέτως, η έννοια της κατεύθυνσης παράγωγου και πολύ περισσότερο της ηέριμης, δεν είναι ικανοποιητική γενίωση της παράγωγου πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής. Μια περίπτωση στην οποία η έννοια της ηέριμης παράγωγου ελπιεφύερεται ικανοποιητικά είναι η ακόλουθη:

1.4. Θεώρημα Έστω $A \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό σύνολο και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς διαφαιηγή για την οποία υπάρχει η $\partial_1 f(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in A$, και η $\partial_2 f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Αν $[a,b] \times [c,d] \subset A$ και $F: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με τύπο

$$F(y) = \int_a^b f(x,y) dx,$$

τότε η F είναι διαφαιηγή και $F'(y) = \int_a^b \partial_2 f(x,y) dx$.

Απόδειξη Επειδή f είναι διαφαιηγή ως προς την δεύτερη μεταβλητή, για $(x,y) \in A$ και $E(x,y,h) = \frac{1}{h} [f(x,y+h) - f(x,y) - h \partial_2 f(x,y)]$, $h \neq 0$, τότε $\lim_{h \rightarrow 0} E(x,y,h) = 0$. Από την άλλη μεριά επειδή η $\partial_2 f$ είναι συνεχής και το $[a,b] \times [c,d]$ συμπαγές, η $\partial_2 f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b] \times [c,d]$. Έχουμε επίσης

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} [F(y+h) - F(y)] &= \frac{1}{h} \left[\int_a^b h \partial_2 f(x,y) dx + \int_a^b h E(x,y,h) dx \right] = \\ &= \int_a^b \partial_2 f(x,y) dx + \int_a^b E(x,y,h) dx. \end{aligned}$$

Αρκεί λοιπών να δείουμε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b E(x,y,h) dx = 0$. Εστω $\epsilon > 0$. Από το την ομοιόμορφη συνέχεια της $\partial_2 f$ στο $[a,b] \times [c,d]$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$|\partial_2 f(x,z) - \partial_2 f(x,y)| < \epsilon / (b-a)$$

για κάθε $x \in [a,b]$ και $y \in [c,d]$ με $|z-y| < \delta$. Εστω περὶ $0 < |h| < \delta$. Από τη Θεώρημα της μεσης τιμής υπάρχει $|z-y| < |h|$ ώστε $f(x,y+h) - f(x,y) = h \partial_2 f(x,z)$. Αρα $E(x,y,h) = \partial_2 f(x,z) - \partial_2 f(x,y)$ και συνεπώς $|E(x,y,h)| < \epsilon / (b-a)$, για κάθε $x \in [a,b]$. Έχουμε

λοπών:

$$\left| \int_a^b E(x,y,h) dx \right| \leq \int_a^b |E(x,y,h)| dx < \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a} dx = \epsilon \quad \forall \delta.$$

Οι κατασκευασμένες και βέβαιες παραγώγους μας βοηθούν σε ορισμένες περιπτώσεις να ανιχνεύσουμε τα σημεία στα οποία μια συνάρτηση έχει ακρότητα. Αν $A \subset \mathbb{R}^n$ και $x_0 \in A$, τότε η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ παίρνει ελάχιστη τιμή στο x_0 όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$. Αντίστοιχα παίρνει τη μέγιστη τιμή όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

1.5. Θεώρημα Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο, $x_0 \in A$ και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν η f παρουσιάζει ακρότητα στο x_0 και υπάρχει η κατασκευασμένη παραγώγος $f'(x_0; v)$ όταν $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$, τότε και αμέσως $f'(x_0; v) = 0$.

Απόδειξη Επειδή το A είναι ανοιχτό, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $S(x_0, \delta) \subset A$. Για οτιδήποτε $\delta / \sqrt{n} < h < \delta$ έχουμε $\|x_0 + hv - x_0\| < \delta$ και $f(x_0 + hv) \geq f(x_0)$. Συνεπώς

$$0 \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} = f'(x_0; v) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

που συμπαίρνει ότι $f'(x_0; v) = 0$.

Είναι ενδιαφέρον $f'(x_0; v) = 0$ για κάθε $v \in \mathbb{R}^n$ αλλά η f να μη παρουσιάζει ακρότητα στο x_0 . Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ το οποίο $f(x_1, x_2) = (x_2 - x_1)^2 (x_2 - 2x_1^2)$. Τότε $f'(x_0; v) = 0$ για κάθε $v \in \mathbb{R}^2$ αλλά στην ουσία βλέπουμε η f δεν παρουσιάζει ακρότητα στο $(0, 0)$.

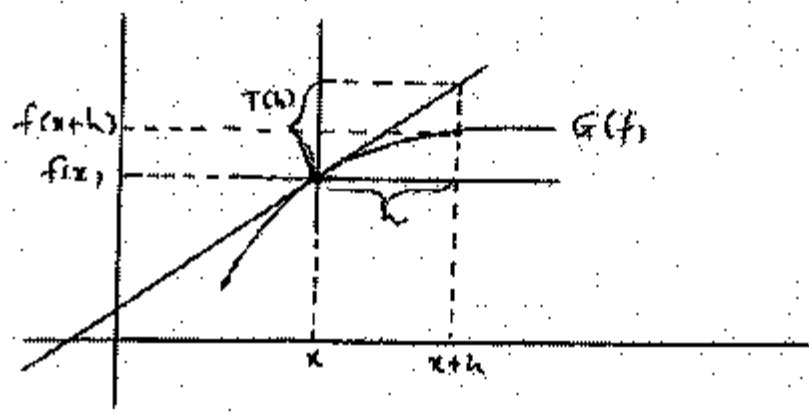
2. Η έννοια της παραγωγής

Εστω $a < b$ και $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Η f είναι διαφορίσιμη στο $x \in (a, b)$ όταν υπάρχει το όριο

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

στο \mathbb{R} η ισότητα αν υπάρχει είναι ταυτόσημος ορισμός $f'(x)$ ώστε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|} = 0$$



Ορισμός αζώνας Το άζωνο $(x, f(x))$ χαρακτηρίζεται ως η διαφορά $f(x+h) - f(x)$ είναι η τιμή της f στο άζωνο h με την αφαίρεση του αζώνας και η ποσότητα $f'(x)h$ είναι η τιμή της γραμμικής απεικόνισης $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $T(h) = f'(x)h$. Η παραπάνω ισότητα λέει ότι η τιμή της συνάρτησης f κοντά στο 0 (πιο είναι το x των παλιών άζωνων) προσεγγίζονται από τις τιμές της γραμμικής απεικόνισης T και φαίνεται η προσέγγιση γίνεται πιο γρήγορα από ότι το h (που είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή στους νέους άζώνας) προσεγγίζει το 0.

Ο ορισμός αυτός γενικεύεται τόσο και σε συναρτήσεις εκτεταμένων χώρων

2.1. Ορισμός Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ μια συνάρτηση. Η f λέγεται διαφορίσιμη στο άζωνο $x \in A$ αν υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ώστε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - T(h)\|}{\|h\|} = 0$$

2.2. Θεώρημα Αν η $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη στο $x \in A$, όπως το $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό, τότε η γραμμική απεικόνιση T είναι φωνητική.

Απόδειξη Εστω $T, S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ δύο γραμμικές απεικόνισης για τις οποίες

καυνοποιείται ο ορίσμος 2.1. Έχουμε:

$$\|T(h) - S(h)\| = \|T(h) - f(x+h) + f(x) + f(x+h) - f(x) - S(h)\| \leq$$

$$\|f(x+h) - f(x) - T(h)\| + \|f(x+h) - f(x) - S(h)\| \quad \text{Αρα}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|T(h) - S(h)\|}{\|h\|} = 0. \quad \text{Για κάθε } y \in \mathbb{R}^n \text{ έχουμε } \lim_{t \rightarrow 0} ty = 0. \text{ Έτσι για}$$

$$\text{κάθε } y \neq 0 \quad 0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|T(ty) - S(ty)\|}{\|ty\|} = \frac{1}{\|y\|} \|T(y) - S(y)\| \quad \text{παιν συμπεραίνει ότι}$$

$T(y) = S(y)$ οφεί

Αν η f είναι διαφορίσιμη στο x , τότε η μονογενής αριθμητική γραμμική απεικόνιση T λέγεται παράγωγος της f στο x και συμβολίζεται με $Df(x)$. Μερικές ιδιότητες των διαφορίσιμων συναρτήσεων είναι οι ακόλουθες:

2.3. Πρόταση Αν η f είναι διαφορίσιμη στο x , τότε είναι συνεχής στο x .

Απόδειξη Αν $E(h) = \frac{1}{\|h\|} [f(x+h) - f(x) - Df(x)h]$, τότε $\lim_{h \rightarrow 0} E(h) = 0$

$$\text{Οπώς, } f(x+h) - f(x) = Df(x)h + \|h\|E(h). \quad \text{Αρα}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} Df(x)h + \lim_{h \rightarrow 0} \|h\|E(h) = 0 + 0 = 0. \quad \text{οφεί.}$$

2.4. Πρόταση Αν η f είναι διαφορίσιμη στο x , τότε για κάθε $v \in \mathbb{R}^n$

υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $f'(x;v)$ και $f'(x;v) = Df(x)v$.

Απόδειξη Αν $v=0$, τότε προφανώς $f'(x;v) = 0$. Έστω ότι $v \neq 0$.

Θέτουμε $E(h) = \frac{1}{\|h\|} [f(x+h) - f(x) - Df(x)h]$ και έχουμε:

$$\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \frac{Df(x)(tv) + \|tv\|E(tv)}{t} = Df(x)v + \frac{\|t\|}{t} \|v\|E(tv)$$

$$\text{Από } \lim_{h \rightarrow 0} E(h) = 0, \text{ έχουμε αμέσως } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = Df(x)v \text{ οφεί.}$$

Αν λοιπόν η f είναι διαφορίσιμη στο x , τότε υπάρχει η i -θέση

$$\text{παράγωγος } \partial_i f(x) = Df(x)e_i, \quad 1 \leq i \leq n. \text{ Συνεπώς, οι } i\text{-θέτες}$$

των πινάκων της παράγωγου $Df(x)$ της f στο x είναι ακριβώς η

i -θέση παράγωγος της f . Αν $f = (f_1, \dots, f_m)$, τότε στοιχεία

της $Df(x)$ είναι ο $(\partial_i f_j(x))_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i \leq n}}$ που λέγεται ιακωβιανός

πίνακας της f στο x (ο πίνακας του Jacobi της f στο x).

Ειδικά όταν $m=1$, δηλαδή $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, τότε ο ιακωβιανός πίνακας

της f στο $x \in A$ είναι η γραμμή $(\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x)) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. Το διάνυσμα

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

λεγεται gradient της f στο σημείο x και είναι το τανυσμα για το οποίο ισχύει $Df(x)h = \langle \nabla f(x), h \rangle$ για κάθε $h \in \mathbb{R}^n$.

2.5. Λήμμα Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $f = (f_1, \dots, f_m): A \rightarrow \mathbb{R}^m$ μια συνάρτηση. Η f είναι διαφορίσιμη στο $x \in A$ τότε και μόνο τότε όταν οι $f_1, \dots, f_m: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες στο x . Επιπλέον

$$Df(x) = \begin{pmatrix} Df_1(x) \\ \vdots \\ Df_m(x) \end{pmatrix}$$

Απόδειξη Έστω ότι η f είναι διαφορίσιμη στο x . Αν $\pi_j: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η j -προβολή, $1 \leq j \leq m$, τότε

$$\|f_j(x+h) - f_j(x) - \pi_j \circ Df(x)h\| \leq \|f(x+h) - f(x) - Df(x)h\|$$

από όπου προκύπτει ότι η f_j είναι διαφορίσιμη στο x .

Αν οι f_1, \dots, f_m είναι διαφορίσιμες στο x και $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι η γραμμή αποτελούμενη με τμήμα $T(h) = (Df_1(x)h, \dots, Df_m(x)h)$, $h \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\|f(x+h) - f(x) - T(h)\| = \left[\sum_{j=1}^m |f_j(x+h) - f_j(x) - Df_j(x)h|^2 \right]^{1/2}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - T(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Όπως προκύπτει από το Παράδειγμα 1.3 για μια συνάρτηση f ποσά να υπάρχει ε' ένα σημείο $A \in \mathbb{R}^n$ οι μερικές παραγώγους αλλά η συνάρτηση να μην είναι διαφορίσιμη στο σημείο αυτό (ακόμα και συνεχώς). Η επιπλέον συνθήκη που χρειάζονται και οι οποίες μαζί με την ύπαρξη των μερικών παραγώγων εξασφαλίζουν διαφορισιμότητα δίνονται από το ακόλουθο:

2.6. Θεώρημα. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο, $f = (f_1, \dots, f_m): A \rightarrow \mathbb{R}^m$ μια συνάρτηση και $x \in A$. Αν οι μερικές παραγώγους $\partial_i f_j(y)$ υπάρχουν για κάθε $y \in A$ και είναι συνεχείς στο x , τότε οι συναρτήσεις $\partial_i f_j: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς

στο x , $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq n$, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο x με κωλύσιμους πίνακα $(\partial_i f_j(x))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Απόδειξη Λόγω του Λήμματος 2.5 προβάλλει να υποθέσουμε ότι $n=1$. Έστω $\epsilon > 0$.

Από την συνέχεια των $\partial_i f$ στο x , υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$y \in S(x, \delta) \implies |\partial_i f(x) - \partial_i f(y)| < \epsilon/n, \quad 1 \leq i \leq n$$

Έστω ότι $h = (h_1, \dots, h_n)$ και $h = (h_1, \dots, h_n) \in S(0, \delta)$, $h \neq 0$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) &= f(x_1+h_1, \dots, x_n+h_n) - f(x_1, \dots, x_n) \\
&= f(x_1+h_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n) \\
&\quad + f(x_1+h_1, x_2+h_2, x_3, \dots, x_n) - f(x_1+h_1, x_2, \dots, x_n) \\
&\quad \dots \dots \dots \\
&\quad + f(x_1+h_1, \dots, x_n+h_n) - f(x_1+h_1, \dots, x_n+h_{n-1}, x_n) \\
&= \sum_{i=1}^n [f(x+v_i) - f(x+v_{i-1})]
\end{aligned}$$

όπου $v_0 = 0$ και $v_i = h_1 e_1 + \dots + h_i e_i$, δηλαδή $v_i = v_{i-1} + h_i e_i$, $1 \leq i \leq n$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $g_i: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ το τυπο

$$g_i(t) = f(x_1+h_1, \dots, x_n+h_n, t+h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x+v_{i-1} + t h_i e_i), \quad 1 \leq i \leq n$$

Η g_i είναι προφανώς διαφορίσιμη στο $(0,1)$ και συνεπώς από το

Θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει $\theta_i \in (0,1)$ ώστε

$$f(x+v_i) - f(x+v_{i-1}) = h_i \cdot \partial_i f(x+v_{i-1} + \theta_i h_i e_i), \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\text{Άρα } f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(x+v_{i-1} + \theta_i h_i e_i)$$

Από την άλλη μεριά $\|x+v_{i-1} + \theta_i h_i e_i - x\| = \|v_{i-1} + \theta_i h_i e_i\| \leq \|v_{i-1}\| + \|h_i\| \leq \|h\| < \delta$.

Και συνεπώς

$$\frac{1}{\|h\|} |f(x+h) - f(x) - \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(x)| = \frac{1}{\|h\|} \left| \sum_{i=1}^n h_i (\partial_i f(x) - \partial_i f(x+v_{i-1} + \theta_i h_i e_i)) \right|$$

$$\leq \frac{1}{\|h\|} \sum_{i=1}^n \|h_i\| |\partial_i f(x) - \partial_i f(x+v_{i-1} + \theta_i h_i e_i)| < \frac{1}{\|h\|} \sum_{i=1}^n \|h_i\| \frac{\epsilon}{n} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\|h\|} \sum_{i=1}^n \|h_i\| \frac{\epsilon}{n} = \frac{1}{\|h\|} n \cdot \|h\| \frac{\epsilon}{n} = \epsilon$$

Αυτό δείχνει ότι η f είναι διαφορίσιμη στο x και $Df(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x))$.

Από την πρόταση 3.7 του κεφαλαίου 1 προκύπτει τώρα ότι επαρκούν

η συνάρτηση $Df: A \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ είναι συνεχής.

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ορίζεται σε ένα ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται C^1 αν υπάρχουν όλες οι πρώτες παράγωγοι $\partial_i f_j$ στο A , ισχύει, ισχύει και είναι συνεχής στο A . Ισχύει, λόγω της προτάσης 3.7 του κεφαλαίου I, όταν η $Df: A \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ είναι συνεχής.

3. Κανόνες Παράγωγιμης

3.1. Θεωρήματα (κανόνες της αλυσίδας) Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^m$ ένα ανοικτό σύνολο με $f(A) \subset B$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}^k$. Αν $x \in A$, η f είναι διαφορίσιμη στο x και η g είναι διαφορίσιμη στο $f(x)$, τότε η σύνθεση $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ είναι διαφορίσιμη στο x και

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x)$$

Απόδειξη Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|g(f(x+h)) - g(f(x)) - (Dg(f(x)) \circ Df(x))h\|}{\|h\|} = 0$$

Επειδή η f είναι διαφορίσιμη στο x και η g στο $f(x)$ έχουμε $f(x+h) - f(x) = Df(x)h + \|h\|E(h)$ και

$$g(f(x)+y) - g(f(x)) = Dg(f(x))y + \|y\|\Delta(y)$$

όπου $\lim_{h \rightarrow 0} E(h) = 0$ και $\lim_{y \rightarrow 0} \Delta(y) = 0$.

Παίρνουμε $y = f(x+h) - f(x)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) - g(f(x)) &= g(f(x) + f(x+h) - f(x)) - g(f(x)) = \\ &= Dg(f(x)) \cdot [f(x+h) - f(x)] + \|f(x+h) - f(x)\| \cdot \Delta(f(x+h) - f(x)) = \\ &= Dg(f(x)) [Df(x)h + \|h\|E(h)] + \|f(x+h) - f(x)\| \Delta(f(x+h) - f(x)) = \\ &= Dg(f(x)) \cdot Df(x)h + \|h\| Dg(f(x))E(h) + \|f(x+h) - f(x)\| \Delta(f(x+h) - f(x)). \text{ Άρα} \\ \frac{\|g(f(x+h)) - g(f(x)) - (Dg(f(x)) \circ Df(x))h\|}{\|h\|} &= Dg(f(x))E(h) + \frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} \Delta(f(x+h) - f(x)) \end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{h \rightarrow 0} E(h) = 0$, έχουμε $\lim_{h \rightarrow 0} Dg(f(x))E(h) = 0$.

Επίσης $\lim_{h \rightarrow 0} \Delta(f(x+h) - f(x)) = 0$, αφού $\lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x)) = 0$, επειδή η f

είναι συνεχής. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι ο υπόλοιπος
 $\frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|}$ είναι φραγμένος όταν $h \rightarrow 0$. Έχουμε:

$$\frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} = \frac{\|Df(x)h + \|h\| E(h)\|}{\|h\|} = \frac{1}{\|h\|} \|Df(x)h\| + \|E(h)\| \leq$$

$$\frac{1}{\|h\|} \|Df(x)\| \cdot \|h\| + \|E(h)\| = \|Df(x)\| + \|E(h)\|. \text{ Άρα λοιπόν}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} \|E(h)\| = 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\frac{\|f(x+h) - f(x)\|}{\|h\|} \leq 1 + \|Df(x)\|, \text{ όταν } 0 < \|h\| < \delta. \text{ ο.ε.δ.}$$

3.2. Παράδειγμα Έστω $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : I \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$ για διαδοχικά
κλειστά στο ανοικτό σύνολο A , όπου το I είναι κάποιο ανοικτό
διάστημα και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ για διαδοχικά συναρτήσεις. Τότε η
 $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διαδοχική και

$$(f \circ \gamma)'(t) = D(f \circ \gamma)(t) = Df(\gamma(t)) \cdot D\gamma(t) =$$

$$\left(\partial_1 f(\gamma(t)), \dots, \partial_n f(\gamma(t)) \right) \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \partial_i f(\gamma(t)) \gamma_i'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

3.3. Πρόταση Αν γ και $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, τότε
η $f \circ \gamma$ είναι διαδοχική και $D(f \circ \gamma) = f$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη Έχουμε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - f(h)\|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - f(h)\|}{\|h\|} = 0$$

3.4. Πρόταση (α) Η συνάρτηση $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $\pi(x, y) = x + y$
είναι διαδοχική και $D\pi(x, y) = \pi$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(β) Η συνάρτηση $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $\tau(x, y) = x \cdot y$ είναι διαδοχική
και $D\tau(x, y)(h_1, h_2) = y h_1 + x h_2$

Απόδειξη Το (α) είναι προφανές αφού η π είναι γραμμική

(β) Έστω $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $\tau(h_1, h_2) = y h_1 + x h_2$ τότε έχουμε

$$E(h_1, h_2) = \frac{\tau(x+h_1, y+h_2) - \tau(x, y) - \tau(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

Από $|E(h_1, h_2)| \leq \frac{1}{2} \frac{|h_1|^3 + |h_2|^3}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \rightarrow 0$, αν $(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)$.

3.5. Πρόταση Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο, $x \in A$ και $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ δύο διαφορίσιμες συναρτήσεις. Τότε οι $f+g, f \cdot g$ είναι διαφορίσιμες και

$$D(f+g)(x) = Df(x) + Dg(x)$$
$$D(f \cdot g)(x) = g(x)Df(x) + f(x)Dg(x)$$

Αν επιπλέον $g(x) \neq 0$, τότε η f/g είναι διαφορίσιμη στο x και

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{(g(x))^2} (g(x)Df(x) - f(x)Dg(x))$$

Απόδειξη Από τον κανόνα της αλυσίδας και την πρόταση 3.4 έχουμε

(α) $f+g = \pi \circ (f, g)$, συνεπώς $D(f+g)(x) = D\pi(f(x), g(x)) \circ D(f, g)(x) = \pi(Df(x), Dg(x)) = Df(x) + Dg(x)$

(β) $f \cdot g = \tau \circ (f, g)$, άρα $D(f \cdot g)(x) = D\tau(f(x), g(x)) \circ D(f, g)(x) = D\tau(f(x), g(x))(Df(x), Dg(x)) = g(x)Df(x) + f(x)Dg(x)$.

(γ) $\frac{f}{g} = \tau \circ (f, \frac{1}{g})$. Άρα $D\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)} Df(x) + f(x)D\left(\frac{1}{g}\right)(x)$

όπου $\frac{1}{g} = F \circ g$, όπου $F: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $F(t) = \frac{1}{t}$. Συνεπώς από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε $D\left(\frac{1}{g}\right)(x) = -\frac{1}{(g(x))^2} Dg(x)$, απ' όπου το συμπέρασμα.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας μπορούμε τώρα να αποδείξουμε τον επόμενο κανόνα παραγώγισης ενός ολοκληρώματος ως προς ένα παράμετρο που εμφανίζεται και στον ολοκληρωτέο και στα όρια ολοκλήρωσης.

3.6. Θεώρημα Εστω $A \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοιχτό σύνολο, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία υπάρχει η $\partial_2 f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και είναι συνεχής. Εστω $[\alpha, \beta] \times [c, d] \subset A$ και $\varphi, \psi: [c, d] \rightarrow [\alpha, \beta]$ δύο διαφορίσιμες συναρτήσεις. Τότε η συνάρτηση $F: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(\gamma) = \int_{\varphi(\gamma)}^{\psi(\gamma)} f(x, y) dx$$

είναι διαφορίσιμη και

$$F'(y) = \int_{q(y)}^{p(y)} \partial_2 f(x, y) dx + f(p(y), y) \cdot p'(y) - f(q(y), y) \cdot q'(y)$$

Απόδειξη θεωρούμε την συνάρτηση $G: [a, b] \times [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$G(x_1, x_2, x_3) = \int_{x_1}^{x_2} f(t, x_3) dt$$

Η G είναι συνεχώς (καθιστά C^1) από τα θεωρήματα 1.4 και 2.6.

Αν $F(y) = G(q(y), p(y), y)$, από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$F'(y) = (\partial_1 G(q(y), p(y), y), \partial_2 G(q(y), p(y), y), \partial_3 G(q(y), p(y), y)) \begin{pmatrix} q'(y) \\ p'(y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{δηλαδή } F'(y) = \partial_1 G(q(y), p(y), y) \cdot q'(y) + \partial_2 G(q(y), p(y), y) \cdot p'(y) + \partial_3 G(q(y), p(y), y)$$

Από τα θεμελιώδεις θεωρήματα της απειροστικού λογισμού έχουμε

$$\partial_1 G(x_1, x_2, x_3) = -f(x_1, x_3) \text{ και } \partial_2 G(x_1, x_2, x_3) = f(x_2, x_3), \text{ ενώ από}$$

$$\text{το θεώρημα 1.4 έχουμε } \partial_3 G(x_1, x_2, x_3) = \int_{x_1}^{x_2} \partial_2 f(t, x_3) dt$$

Το συμπέρασμα είναι τώρα προφανές.

3.7 Θεώρημα Η απεικόνιση $\gamma: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ με $\gamma(T) = T^{-1}$ είναι C^1 και $D\gamma(T)h = -T^{-1} \circ h \circ T^{-1}$ για κάθε $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^{n \times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$

Απόδειξη Έστω $T \in GL(n, \mathbb{R})$. Τότε για κάθε $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ έχουμε

$$\gamma(T+h) - \gamma(T) = (T+h)^{-1} - T^{-1} = (T+h)^{-1} \cdot (T - (T+h)) \cdot T^{-1} = - (T+h)^{-1} \circ h \circ T^{-1} \text{ Συνεπώς}$$

$$\frac{\|\gamma(T+h) - \gamma(T) + T^{-1} \circ h \circ T^{-1}\|}{\|h\|} = \frac{\|(T+h)^{-1} \circ h \circ T^{-1} - (T^{-1} \circ h \circ T^{-1})\|}{\|h\|} =$$

$$\frac{\| (T^{-1} - (T+h)^{-1}) \circ h \circ T^{-1} \|}{\|h\|} \leq \frac{\|T^{-1} - (T+h)^{-1}\| \|h\| \|T^{-1}\|}{\|h\|} =$$

$\|T^{-1}\| \cdot \|T^{-1} - (T+h)^{-1}\| \rightarrow 0$ όταν $h \rightarrow 0$, γιατί η γ είναι συνεχής, από το θεώρημα 3.8 (β) του κεφαλαίου I. Από το ίδιο

θεώρημα προκύπτει ότι η $D\gamma: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)) \cong \mathbb{R}^{n^4}$ είναι συνεχής ως εφ' όσον. Η απεικόνιση $\varphi: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

με τους $\varphi(T) = (T^{-1}, T^{-1})$ είναι συνεχής. θεωρούμε την απεικόνιση

$$\psi: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$$

με $\psi(u, w)(h) = -u \circ h \circ w$ για κάθε $u, w, h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Η ψ είναι προφανώς διφαστική και $D\gamma = \psi \circ \varphi$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε

ότι η ψ είναι συνεχής. Για κάθε $u, w, h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ έχουμε:

$$\|\psi(u, w)(h)\| = \|u \cdot h \cdot w\| \leq \|u\| \|w\| \|h\|$$

Συνεπώς $\|\psi(u, w)\| \leq \|u\| \|w\|$ για κάθε $u, w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Έτσι
 $\|\psi(u, w) - \psi(u', w')\| = \|\psi(u, w) - \psi(u', w) + \psi(u', w') - \psi(u', w')\| \leq$
 $\|\psi(u, w) - \psi(u', w)\| + \|\psi(u', w) - \psi(u', w')\| = \|\psi(u - u', w)\| + \|\psi(u', w - w')\| \leq$
 $\|w\| \|u - u'\| + \|u'\| \|w - w'\| \rightarrow 0$, όταν $(u', w') \rightarrow (u, w)$. ο.δ.β.

4. Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης

Όπως είδαμε στο Θεώρημα 2.6 η ύπαρξη και συνέχεια των μερικών παραγώγων εξασφαλίζει την διαφορισιμότητα. Εμπνευσμένα μπορούμε τώρα να ορίσουμε τις έννοιες της C^r συναρτήσεων $r \in \mathbb{N}$. Αν $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο τότε η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται C^r αν οι $\partial_i f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ είναι C^{r-1} συναρτήσεις. Παράδειγμα: αν f είναι C^2 αν οι $\partial_i f$, $1 \leq i \leq n$ ορίζονται στο A και είναι C^1 συναρτήσεις. Ισοδύναμα η f είναι C^2 αν η συνάρτηση $Df: A \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ορίζεται και είναι C^1 . Η f λέγεται C^∞ συνάρτηση αν είναι C^r για κάθε $r \in \mathbb{N}$. Τέλος για συνάρτηση $f = (f_1, \dots, f_m): A \rightarrow \mathbb{R}^m$ λέγεται C^r , $1 \leq r \leq \infty$, αν οι $f_1, \dots, f_m: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^r .

Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια C^2 συνάρτηση, όταν το $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό τότε η $\partial_{ij}^2 f = \partial_i(\partial_j f)$ λέγεται η δευτέρης τάξης (ij) - μικτή μερική παράγωγος της f . Εμπνευσμένα αν η f είναι C^r τότε ορίζεται η r-τάξης (i_1, \dots, i_r) - μικτή μερική παράγωγος $\partial_{i_1, \dots, i_r}^r f$ της f για $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n$. Μια σημαντική ιδιότητα των μικτών παραγώγων των C^r συναρτήσεων είναι το γεγονός ότι δεν εξαρτώνται από την διατάξη των i_1, \dots, i_r . Λόγω του επαναγωγικού ορισμού είναι προφανές ότι αρκεί να αποδείξουμε την ιδιότητα αυτή για C^2 συναρτήσεις ορίζοντας ο ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 .

4.1. Λήμμα Έστω $A \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση. Έστω $[\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \subset A$. Τότε
 (α) Υπάρχουν $\alpha_1 < \xi < \beta_1$, $\alpha_2 < \eta < \beta_2$ ώστε
 $\Delta f = f(\alpha_1, \alpha_2) + f(\beta_1, \beta_2) - f(\alpha_1, \beta_2) - f(\beta_1, \alpha_2) = (\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2) \partial_{2,2}^2 f(\xi, \eta)$

(γ) Υποθέτουμε $a_1 < \xi < b_1$, $a_2 < \eta < b_2$ ώστε $\Delta f = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \partial_{1,2}^2 f(\xi, \eta)$

Απόδειξη (α) θεωρούμε την συνάρτηση $g: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$ το ίδιο $g(x) = f(x, b_2) - f(x, a_2)$. Τότε η g είναι C^2 και $\Delta f = g(b_1) - g(a_1)$.

Απ' το θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει $a_1 < \xi < b_1$ ώστε

$$\Delta f = g(b_1) - g(a_1) = g'(\xi)(b_1 - a_1) = (\partial_1 f(\xi, b_2) - \partial_1 f(\xi, a_2))(b_1 - a_1)$$

Η συνάρτηση $\partial_1 f(\xi, \cdot): [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^1 , αφού η f είναι C^2

και συνεπώς απ' το θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει $a_2 < \eta < b_2$

$$\text{ώστε } \partial_1 f(\xi, b_2) - \partial_1 f(\xi, a_2) = \partial_{2,1} f(\xi, \eta)(b_2 - a_2)$$

$$\Delta f = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \partial_{2,1} f(\xi, \eta)$$

(β) Η απόδειξη είναι ομοία με τον ως θεωρήματα της συνάρτησης

$$g: [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R} \text{ το } g(y) = f(b_1, y) - f(a_1, y)$$

4.2. Θεώρημα Έστω $A \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση. Τότε $\partial_{1,2} f = \partial_{2,1} f$ στο A .

Απόδειξη Έστω $(x, y) \in A$. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 4.1 με κάθε ορθογώνιο της μορφής $[x, x + \frac{1}{k}] \times [y, y + \frac{1}{k}]$, κενό. Επειδή το A είναι ανοιχτό άρα τα ορθογώνια αυτά είναι τελικά μέσα στο A , δηλαδή εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος υπάρχουν άπειροι ίδιοι ακολουθίες $((z_k, \eta_k))_{k \in \mathbb{N}}$, $((z'_k, \eta'_k))_{k \in \mathbb{N}}$ που συγκλίνουν στο (x, y)

$$\text{ώστε } \Delta_k f = \frac{1}{k^2} \partial_{2,1} f(z_k, \eta_k) = \frac{1}{k^2} \partial_{1,2} f(z'_k, \eta'_k)$$

Επειδή τώρα οι $\partial_{2,1} f, \partial_{1,2} f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγώγιμα τότε όμοια έχουμε $\partial_{2,1} f(x, y) = \partial_{1,2} f(x, y)$ ο.π.σ.

4.3. Πρόταση Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση. Τότε $\partial_{ij} f = \partial_{ji} f$ στο A για κάθε $1 \leq i, j \leq n$

4.4. Πρόταση Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^r συνάρτηση. Τότε $\partial_{i_1, \dots, i_r}^r f = \partial_{j_1, \dots, j_r}^r f$ για κάθε $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n$ και για κάθε μεταθέση π των i_1, \dots, i_r .

Απόδειξη Αφού από το θεώρημα 4.2 και το γεγονός ότι κάθε μεταθέση είναι το γινόμενο μεταθέσεων.

Ευφραδιά με το πρόταση 4.3 η $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια C^1 συνάρτηση

αριστέμ στο ανοιχτό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$, τότε ο πίνακας $Hf(x) = (\partial_{ij}^2 f(x))$ είναι ένας συμμετρικός $n \times n$ πίνακας. Ο $Hf(x)$ λέγεται εξέλιξις πίνακας (Hessian matrix) της f στο $x \in A$.

4.5. Θεώρημα (Τύπος του Taylor) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση. Έστω $x, y \in A$ ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[x, y] = \{x + t(y-x) : 0 \leq t \leq 1\}$ να περιέχεται στο A . Τότε υπάρχει $\theta \in (0, 1)$ ώστε

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle + \frac{1}{2} \langle y-x, Hf(x+\theta(y-x))(y-x) \rangle$$

Απόδειξη Επειδή το A είναι ανοιχτό υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $x+t(y-x) \in A$ για $- \delta < t < 1+\delta$. Ορίζουμε την συνάρτηση $g: (-\delta, 1+\delta) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(t) = f(x+t(y-x))$. Τότε $g(1) - g(0) = f(y) - f(x)$ και η g είναι C^1 , αφού η f είναι C^2 . Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$g'(t) = Df(x+t(y-x)) \cdot (y-x) = \langle \nabla f(x+t(y-x)), y-x \rangle = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x+t(y-x)) \cdot (y_i - x_i)$$

όπου $x = (x_1, \dots, x_n)$ και $y = (y_1, \dots, y_n)$. Παραγωγίζοντας ακόμη μία φορά

$$g''(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_{ij}^2 f(x+t(y-x)) \cdot (y_i - x_i) \cdot (y_j - x_j) = \langle y-x, Hf(x+t(y-x))(y-x) \rangle$$

Από το Θεώρημα του Taylor για την g έχουμε τώρα το επιθυμητό.

4.6. Παράδειγμα Η απεικόνιση $\gamma: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ με $\gamma(T) = T^{-1}$

είναι C^∞ . Αν $T = (a_{ij})$, τότε $\gamma(T) = \gamma(a_{ij}) = \frac{1}{\det T} \cdot (\tilde{a}_{ij})$

όπου $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det T_j^i$ και T_j^i είναι ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που προκύπτει από τον T αν διαγράφουμε την j -στήλη και την i -γραμμή.

Επειδή οι συνιστάμενες συναρτήσεις της γ $\frac{\tilde{a}_{ij}}{\det T}$, $1 \leq i, j \leq n$ είναι αυτές συναρτήσεις των μεταβλητών a_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$ στο $GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ με τετραγωνικό Jacobian που αντιστρέφεται στο $GL(n, \mathbb{R})$. Άρα η γ είναι C^∞

από το Θεώρημα 3.5. Ένδεχομώς μπορεί επίσης να καν η απεικόνιση των μετασχηματισμών $f: GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ με $f(T, S) = T \cdot S$ είναι C^∞ .

5. Το Θεώρημα της αντιστροφής σωστής

Το Θεώρημα της αντιστροφής σωστής είναι ένας από τους κεντρικούς λίθους της Διφορμικής Τοπολογίας και Γεωμετρίας. Σίφωναί τ' αυτό, η επίλυση $y = f(x)$ έχει τοπικά μονοσήμαντη λύση αν η γραμμικοποίηση της λύνεται μονοσήμαντα. Τροχαιτέρως να διατυπώσουμε κριτήρια το Θεώρημα θα εισάγαμε κάποια ορολογία που θα χρησιμοποιήσουμε και αργότερα.

5.1. Ορισμός Έστω $U, V \subset \mathbb{R}^n$ δύο ανοιχτά σύνολα. Μια συνάρτηση $f: U \rightarrow V$ λέγεται C^r αμφιδρόσημη, $1 \leq r \leq \infty$, αν η f είναι C^r , έπι, C^r και η αντιστροφή της $f^{-1}: V \rightarrow U$ είναι επίσης C^r . Τίποτα τυρούτε αν τότε η παραγώγος $Df(x)$ είναι αναστρέψιμη για κάθε $x \in U$ και $(Df(x))^{-1} = Df^{-1}(f(x))$.

5.2. Παράδειγμα (α) Αν $\alpha \in \mathbb{R}^n$, τότε η μεταφορά κατά α , δηλαδή η συνάρτηση $f_\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $f_\alpha(x) = x + \alpha$ είναι C^∞ αμφιδρόσημη.

(β) Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ για γρήγορη απεικόνιση. Η f τότε στις είναι γινωστό είναι C^∞ . Αν η f είναι αναστρέψιμη, τότε είναι C^∞ αμφιδρόσημη, αφού η $f^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι επίσης γρήγορη.

(γ) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^3$. Η f είναι C^∞ , 1^{-1} και έπι. Η $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει τύπο $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ και δεν είναι διαφορίσιμη στο 0. Έμενως η f δεν είναι αμφιδρόσημη.

5.3. Λήμμα Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο, $I \subset \mathbb{R}$ ένα κλειστό αραγμένο και $f = (f_1, \dots, f_n): A \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια C^1 συνάρτηση. Αν $M > 0$ είναι τέτοιο ώστε $|Df_j(x)| \leq M$ για κάθε $x \in I$, $1 \leq j \leq n$, τότε

$$\|f(x) - f(y)\| \leq nM \|x - y\|$$

για κάθε $x, y \in I$.

Απόδειξη Έστω $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in I$. Βρείση το I είναι αραγμένο, $(y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \in I$ για κάθε $1 \leq i \leq n-1$, και

$$f_j(y) - f_j(x) = \sum_{i=1}^n [f_j(y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f_j(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, \dots, x_n)], \quad 1 \leq j \leq n$$

Από το Θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει $\xi_{ij} \in I$, $1 \leq i, j \leq n$ ώστε

(4) $\|x_1 - x_2\| \leq 2\|f(x_1) - f(x_2)\|$ για κάθε $x_1, x_2 \in I$.

Γνωρίζουμε ότι $f|I$ είναι "1-1".

Το σύνολο ∂I του I είναι συμπαγές και ομοίως και το $f(\partial I)$ είναι συμπαγές. Λόγω του (3), $f(x_0) \notin f(\partial I)$. Υπάρχει λοιπόν $d > 0$ ώστε $\|f(x) - f(x_0)\| \geq d$ για κάθε $x \in \partial I$. Εστω $V = S(f(x_0), \frac{d}{2})$. Τότε

(5) $\|y - f(x_0)\| < \frac{d}{2} \leq \|y - f(x)\|$ για κάθε $y \in V$ και $x \in \partial I$.

Ισχυρισμός: Για κάθε $y \in V$ υπάρχει ακριβώς ένα $x \in I$ ώστε $f(x) = y$.

Απόδειξη του ισχυρισμού: Εστω $y = (y_1, \dots, y_n) \in V$. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$\varphi: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } \varphi(x) = \|y - f(x)\|^2 = \sum_{j=1}^n (y_j - f_j(x))^2, \text{ που είναι}$$

προφανώς συνεχής. Επειδή το I είναι συμπαγές, η φ παίρνει για ελάχιστη τιμή στο I , υπάρχει δηλαδή $x \in I$ ώστε $\varphi(x) = \inf \varphi(I)$.

Επειδή $\varphi(x) > \varphi(x_0)$ για κάθε $x \in \partial I$, από το (5), αναγκαστικά

$x \in I^\circ$. Από το θεώρημα λοιπόν 1.5 έχουμε για κάθε $t \in \mathbb{R}^n$,

$$0 = \partial_t \varphi(x) = \sum_{j=1}^n 2(y_j - f_j(x)) \partial_t f_j(x) \text{ ή με τη βοήθεια των άκρων} \\ (Df(x))^t (y - f(x)) = 0.$$

Επειδή όμως λόγω του (1) ο $(Df(x))^t$ είναι μη-μηδενικός ισομορφισμός, αυτό σημαίνει ότι $y = f(x)$. Η μοναδικότητα τμήμα του x προκύπτει από το (4). Ο ισχυρισμός αποδείχτηκε.

Θεωρούμε τώρα $U = I^\circ \cap f^{-1}(V)$. Σύμφωνα με τον ισχυρισμό η

$f|U: U \rightarrow V$ είναι "1-1" και επί. Γνωρίζουμε επίσης η αντιστροφή

$(f|U)^{-1}$ που για απλότητα συμβολίζουμε με $f^{-1}: V \rightarrow U$. Η (4)

πάλι γράφεται

(6) $\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\| \leq 2\|y_1 - y_2\|$ για κάθε $y_1, y_2 \in V$, από όπου προκύπτει ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

Θα δείξουμε τώρα ότι η f^{-1} είναι διαφορίσιμη, με $Df^{-1}(y) = (Df(f^{-1}(y)))^{-1}$

για κάθε $y \in V$. Εστω $x \in U$ με $y = f(x)$. Για κάθε $\theta \in \mathbb{R}^n$ με $y + \theta \in V$

υπάρχει ακριβώς ένα $h = h(\theta) \in \mathbb{R}^n$ ώστε $y + \theta = f(x+h)$ και

$\lim_{\theta \rightarrow 0} h(\theta) = 0$, αφού $h(\theta) = f^{-1}(y + \theta) - f^{-1}(y)$ και η f^{-1} είναι συνεχής.

Εστω $E(h) = \frac{1}{\|h\|} [f(x+h) - f(x) - Df(x)h]$, κτλ. Τότε

$\lim_{h \rightarrow 0} E(h) = 0$ και $f(x+h) - f(x) = Df(x)h + \|h\|E(h)$, οπότε

$$(Df(x))^{-1}(f(x+h) - f(x)) = h + \|h\| (Df(x))^{-1} E(h), \quad \delta_1 \lambda \alpha \delta_2 \mu$$

$$(Df(f^{-1}(y)))^{-1} \theta = f^{-1}(y+\theta) - f^{-1}(y) + \|h(\theta)\| (Df(f^{-1}(y)))^{-1} E(h(\theta)).$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{\|\theta\|} \|f^{-1}(y+\theta) - f^{-1}(y) - (Df(f^{-1}(y)))^{-1} \theta\| =$$

$$\frac{1}{\|\theta\|} \|h(\theta)\| \| (Df(f^{-1}(y)))^{-1} E(h(\theta)) \| \leq$$

$$\frac{1}{\|\theta\|} \|h(\theta)\| \| (Df(f^{-1}(y)))^{-1} \| \| E(h(\theta)) \| \leq$$

$$\frac{1}{\|\theta\|} 2\|\theta\| \| (Df(f^{-1}(y)))^{-1} \| \| E(h(\theta)) \| \quad (\text{λόγω της (6)})$$

που τείνει στο 0 όταν $\theta \rightarrow 0$, αφού $\lim_{\theta \rightarrow 0} E(h(\theta)) = 0$.

Απομένει να δείξουμε ότι η f^{-1} είναι C^r . Θα δείξουμε πρώτα ότι η f^{-1} είναι C^1 , δηλαδή ότι η $Df^{-1}: V \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ είναι συνεχής.

Η απεικόνιση $\gamma: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ με $\gamma(S) = S^{-1}$ είναι C^∞ όπως είδατε στο Παράδειγμα 4.6. και όπως δείξατε παραπάνω

$Df^{-1} = \gamma \circ Df \circ f^{-1}$ που είναι σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον τμήμα είναι ότι το θεώρημα ισχύει για C^{r-1} συναρτήσεις, $r \geq 1$, και η f είναι C^r . Τότε η Df είναι C^{r-1} και βέβαια και η f . Η f^{-1} είναι λοιπόν C^{r-1} απ' την υπόθεση της επαγωγής. Άρα η $Df^{-1} = \gamma \circ Df \circ f^{-1}$ είναι σύνθεση C^{r-1} συναρτήσεων είναι C^{r-1} , δηλαδή η f^{-1} είναι C^r .

5.5 Πρόταση Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια C^r συνάρτηση $r \geq 1$. Αν $\det Df(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε το $f(U)$ είναι ανοιχτό σύνολο για κάθε ανοιχτό σύνολο $U \subset A$.

5.6 Πρόταση Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια C^r συνάρτηση. Αν η f είναι "1-1" και $\det Df(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η f είναι C^r αμφιδιαφόρηση, $1 \leq r < \infty$.

Για επαγωγή του Θεωρήματος της αντιστροφής συναρτήσεων παραούτε την να αναζητούμε το Θεώρημα των τεταγμένων συναρτήσεων.

5.7 Θεώρημα (των τεταγμένων συναρτήσεων) Έστω $A \subset \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f = (f_1, \dots, f_m): A \rightarrow \mathbb{R}^m$ μια C^r συνάρτηση, $1 \leq r < \infty$.

Εστω $(x_0, y_0) \in A$ με $f(x_0, y_0) = 0$ ώστε $\det \partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$, όπου $\partial_y f(x_0, y_0) = (\partial_{y_i} f_j(x_0, y_0))_{i,j \in m}$. Τότε υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή U του x_0 και μια C^r συνάρτηση $g: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ με $g(x_0) = y_0$ ώστε $f(x, g(x)) = 0$ για κάθε $x \in U$.

Απόδειξη θεωρούμε την συνάρτηση $F: A \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ με $F(x, y) = (x, f(x, y))$. Η F είναι προφανώς C^r και

$$DF(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ * & \partial_y f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Αρα $\det DF(x_0, y_0) = \det \partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$. Από το Θεώρημα της αντιστροφής συνάρτησης υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή της μορφής $U_1 \times V_1 \subset A$ του (x_0, y_0) , όπου τα $U_1 \subset \mathbb{R}^n$, $V_1 \subset \mathbb{R}^m$ είναι ανοιχτά, μια ανοιχτή περιοχή W του $F(x_0, y_0) = (x_0, 0)$, ώστε η $F: U_1 \times V_1 \rightarrow W$ να είναι C^r αμφιδιακφόρηση. Εστω $G = (G_1, G_2) = F^{-1}: W \rightarrow U_1 \times V_1$.

Αν $(u, v) = F(x, y) \in W$, όπου $(x, y) \in U_1 \times V_1$, τότε $u = x$ και $v = f(x, y)$.

Αρα $(G_1(u, v), G_2(u, v)) = F^{-1}(u, v) = (x, y) = (u, y)$, δηλαδή

$$G_1(u, v) = u \text{ και } G_2(u, v) = y, \text{ οπότε } f(u, G_2(u, v)) = f(x, y) = v.$$

Επίσης $f(x, G_2(x, 0)) = 0$ για κάθε $x \in U_1$ με $(x, 0) \in W$. Το σύνολο $U = \{x \in U_1; (x, 0) \in W\}$ είναι ανοιχτό αφού τα U_1, W είναι ανοιχτά.

Η συνάρτηση $g: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ με τύπο $g(x) = G_2(x, 0)$ είναι C^r και $f(x, g(x)) = 0$ για κάθε $x \in U$. Τέλος $g(x_0) = G_2(x_0, 0) = y_0$ γιατί $F(x_0, y_0) = (x_0, 0)$.

Το βασικό στοιχείο της απόδειξης του Θεωρήματος των τελεσφένων συναρτήσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την απόδειξη της παρακάτω χρήσιμης πρότασης.

Σ.8. Θεώρημα Εστω $m \leq n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f = (f_1, \dots, f_m): A \rightarrow \mathbb{R}^m$ μια C^r συνάρτηση, $f \in \mathcal{E} \leq \omega$. Εστω $x_0 \in A$ με $f(x_0) = 0$. Αν η $Df(x_0)$ έχει τάξη m (δηλαδή τη μέγιστη δυνατή), τότε υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή $U \subset A$ του x_0 , ένα ανοιχτό σύνολο $V \subset \mathbb{R}^m$ και μια C^r αμφιδιακφόρηση $h: U \rightarrow V$ ώστε

$$f \circ h(x_1, \dots, x_n) = (x_{n-m+1}, \dots, x_n) \text{ για κάθε } (x_1, \dots, x_n) \in U.$$

Απόδειξη Επειδή η $Df(x_0)$ έχει τάξη m , υπάρχει ένας $m \times m$ υποπίνακας $(\partial_i f_j(x_0))_{\substack{i,j \in \{1, \dots, m\}}}^{-1}$ ταυτισμένος με το $m \times m$ υποπίνακα της f στο x_0 με μη-μηδενική ορίζουσα. Εστω $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ο γνήθιος ισομορφισμός $g(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m)$. Η συνάρτηση $\tilde{f} = f \circ g: g^{-1}(A) \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι C^1 και $\partial_{x_{i+k}} \tilde{f}_j(g^{-1}(x_0)) = \partial_{x_i} f_j(x_0)$, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq j \leq m$. Συνεπώς για την συνάρτηση $\tilde{f}: g^{-1}(A) \rightarrow \mathbb{R}^m$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 5.7, όπως $g^{-1}(A) \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$. Θεωρούμε τώρα την $F: g^{-1}(A) \rightarrow \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ με $F(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-m}, \tilde{f}(x_1, \dots, x_n))$. Υπάρχουν μία ανοιχτή περιοχή $V \subset g^{-1}(A)$ του $g^{-1}(x_0)$ και μία ανοιχτή περιοχή U του $F(g^{-1}(x_0))$ στο \mathbb{R}^n ώστε η $F: V \rightarrow U$ να είναι C^1 αμφιδιαφορισμός. Εστω $F^{-1} = G = (G_1, G_2)$. Οπότε και στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.7 έχουμε:

$G_1(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-m})$ και $\tilde{f}(x_1, \dots, x_{n-m}, G_2(x_1, \dots, x_n)) = (x_{n-m+1}, \dots, x_n)$ για κάθε $(x_1, \dots, x_n) \in U$. Η συνάρτηση $h = g \circ G: U \rightarrow g(V_1) = V$ είναι C^1 αμφιδιαφορισμός, το V ανοιχτή περιοχή του x_0 και $f \circ h(x_1, \dots, x_n) = f \circ g \circ G(x_1, \dots, x_n) = \tilde{f}(G_1(x_1, \dots, x_n), G_2(x_1, \dots, x_n)) = \tilde{f}(x_1, \dots, x_{n-m}, G_2(x_1, \dots, x_n)) = (x_{n-m+1}, \dots, x_n)$ για κάθε $(x_1, \dots, x_n) \in U$. ο.ε.δ.

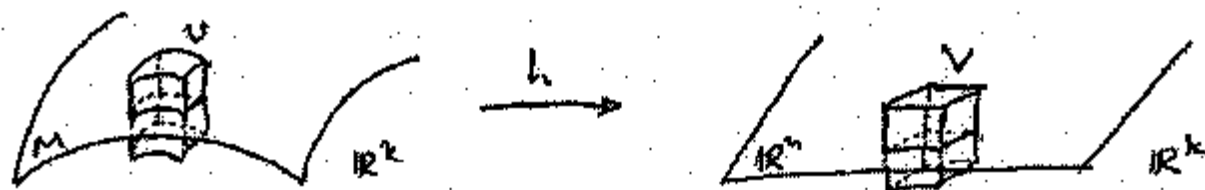
6. Διαφορίσιμες πολλαπλότητες

Μία n -πολλαπλότητα είναι ένας τοπικός χώρος Hausdorff με αριθμητική βάση ο οποίος τοπικά είναι όπως ο \mathbb{R}^n . Παραδείγματα χώρων, ο κύκλος είναι 1-πολλαπλότητα, ενώ ένα ελλειψοειδές ή ένας κύβος στο \mathbb{R}^3 είναι 2-πολλαπλότητες. Ένας κύβος δεν είναι πολλαπλότητα γιατί δεν είναι τοπικά ευκλείδειος χώρος κοντά στις κορυφές του. Η θεωρία των διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων τείνει να θεμελιωθεί και αναπτυχθεί αφηρημένα. Η δική μας προσέγγιση της έννοιας της πολλαπλότητας θα είναι αφηρημένη. Για μας μία πολλαπλότητα θα είναι υποσύνολο κάποιου ευκλείδειου χώρου. Αποδεικνύεται σε αυτό δεν αποτελεί περιορισμό της γενικότητας (Θεώρημα του H. Whitney).

6.1. Ορισμός Ένα σύνολο $M \subset \mathbb{R}^k$ λέγεται διαφορίσιμη n -πολλαπλότητα ή

αλλάς πολλαπλότητας, οπότε, αν για κάθε $x \in M$ υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή U του x στο \mathbb{R}^k , ένα ανοιχτό σύνολο $V \subset \mathbb{R}^k$ και μια C^∞ αμφιδιαφορέα $h: U \rightarrow V$ ώστε

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \{(y_1, \dots, y_n, \dots, y_k) \in V : y_{n+1} = \dots = y_k = 0\}$$



Ό, δύο ακραίες περιπτώσεις του αριστερού είναι ασφαλώς ένα επίπεδο του \mathbb{R}^2 που είναι 0-πολλαπλότητα και ένα ανοιχτό σύνολο στο \mathbb{R}^k που είναι k -πολλαπλότητα. Η παρακάτω πρόταση δίνει πληθώρα παραδειγμάτων διαφορετικών πολλαπλότητας.

6.2. Πρόταση Έστω $A \subset \mathbb{R}^k$ ένα ανοιχτό σύνολο, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$ μια C^∞ συνάρτηση, όπου $0 \leq n \leq k$, και $M = f^{-1}(0)$. Αν η $Df(x)$ έχει την μέγιστη δυνατή τάξη (δηλαδή $k-n$) για κάθε $x \in M$, τότε το M είναι n -πολλαπλότητα.

Απόδειξη Έστω $x_0 \in M$. Επειδή $\text{rank } Df(x_0) = k-n$, σύμφωνα με το θεώρημα 5.8, υπάρχουν μια ανοιχτή περιοχή $U \subset A$ του x_0 , ένα ανοιχτό σύνολο $V \subset \mathbb{R}^k$ και μια C^∞ αμφιδιαφορέα $\varphi: U \rightarrow V$ ώστε

$$(\varphi \circ f)(y_1, \dots, y_k) = (y_{n+1}, \dots, y_k) \text{ για κάθε } (y_1, \dots, y_k) \in U.$$

Τότε έχουμε $\varphi^{-1}(V \cap M) = \{(y_1, \dots, y_k) \in U : f(\varphi(y_1, \dots, y_k)) = 0 \in \mathbb{R}^{k-n}\} = \{(y_1, \dots, y_k) \in U : y_{n+1} = \dots = y_k = 0\}$ α.ε.

6.3. Παραδείγματα και Η n -σφαίρα $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ είναι n -πολλαπλότητα.

(β) Κάθε γραμμικός υπόχωρος του \mathbb{R}^k είναι πολλαπλότητα

(γ) Το σύνολο όλων των πρωταρίων διακυβερνήσεων στο \mathbb{R}^2 με επίπεδα εφαστογής αποτελεί τα επίπεδα του \mathbb{R}^2 είναι 3-πολλαπλότητα (στο \mathbb{R}^4).

(δ) Το σύνολο $SL(n; \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det A = 1\}$ είναι (n^2-1) -πολλαπλότητα.

6.4. Θεώρημα Ένα σύνολο $M \subset \mathbb{R}^k$ είναι n -πολλαπλότητα, οπότε, τότε και

βουν τότε αν για κάθε σημείο ισχύει η συνθήκη

(C) Υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο $U \subset \mathbb{R}^k$ που περιέχει το κ , ένα ανοικτό σύνολο $W \subset \mathbb{R}^n$ και μια $(k-1)$, C^∞ απεικόνιση $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^k$ ώστε:

(i) $\varphi(W) = U \cap M$

(ii) η $D\varphi(y)$ έχει τάξη n για κάθε $y \in W$ και

(iii) η $\varphi^{-1}: U \cap M \rightarrow W$ είναι συνεχής.

Απόδειξη Εστω ότι το M είναι n -πολυακρότητα, κενό και U, V, h είναι στον φάση G . Θετότε $W = \{y \in \mathbb{R}^k : (y, 0) \in h(U \cap M)\}$. Το W είναι προφανώς ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^k . Ορίζουμε την $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^k$ με τύπο $\varphi(y) = h^{-1}(y, 0)$. Τότε προφανώς η φ είναι C^∞ και $\varphi(W) = h^{-1}(W) \subset U \cap M$. Εστω τώρα ότι $h = (h_1, \dots, h_k)$. Αν $H = (h_1, \dots, h_k): U \rightarrow \mathbb{R}^k$, τότε $H(\varphi(y)) = H(h^{-1}(y, 0)) = y$. Συνεπώς, από τον κανόνα της αλυσίδας $DH(\varphi(y)) \cdot D\varphi(y) = I_k$. Από η $D\varphi(y)$ είναι $(k-1)$ γνηθιακή απεικόνιση, συνεπώς έχει τάξη n .

Αντίστροφα: εστω ότι υπάρχει η $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^k$ που ικανοποιεί την (C). Εστω ότι $x = \varphi(y)$. Από τον κανόνα $D\varphi(y) = n$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\det(\partial_i \varphi_j(y))_{1 \leq i, j \leq k} \neq 0$, όπου $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$. Θετουμε την συνάρτηση $g: W \times \mathbb{R}^{k-n} \rightarrow \mathbb{R}^k$ με τύπο $g(t, s) = \varphi(t) + (t, s)$. Τότε

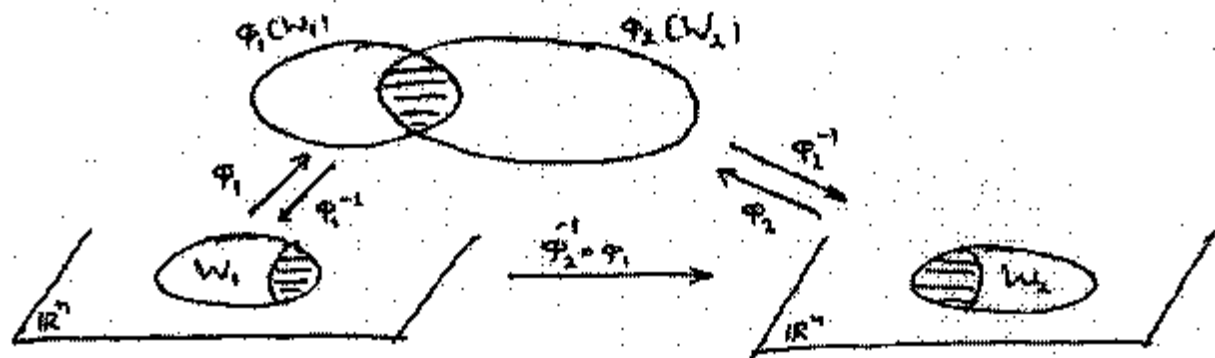
$$Dg(t, s) = \begin{pmatrix} D\varphi(t) & 0 \\ 0 & I_{k-n} \end{pmatrix}$$

και συνεπώς $\det Dg(y, 0) = \det(\partial_i \varphi_j(y))_{1 \leq i, j \leq k} \neq 0$. Από το θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης υπάρχει μια ανοικτή περιοχή V_1' του $(y, 0)$ και μια ανοικτή περιοχή V_2' του $g(y, 0) = x$ ώστε η $g: V_1' \rightarrow V_2'$ να είναι C^∞ αμφιδιακρότητα. Εστω $h = g^{-1}$. Επίσης η $\varphi^{-1}: \varphi(W) \rightarrow W$ είναι συνεχής και το $\{t \in W : (t, 0) \in V_1'\}$ ανοικτό υποσύνολο του W , υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο $U \subset V$ ώστε $\{\varphi(t) : (t, 0) \in V_1'\} = U \cap \varphi(W) = U \cap M$. Εστω $V_2 = V_2' \cap U$ και $V_1 = g^{-1}(V_2) = h(V_2)$. Τότε $V_2 \cap M = g(V_1') \cap U \cap M = g(V_1') \cap U \cap M = \{g(t, 0) : (t, 0) \in V_1'\}$. Από $h(V_2 \cap M) = g^{-1}(V_2 \cap M) = g^{-1}(\{g(t, 0) : (t, 0) \in V_1'\}) = \{(t, 0) : (t, 0) \in V_1'\} = V_1 \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. ο.π.δ.

Η συνάρτηση $\varphi: W \rightarrow U \cap M$ λέγεται ευσταθία τοπικών συντεταγμένων γύρω από το x . Αν $\varphi_i: W_i \rightarrow U_i \cap M$, $i=1,2$, είναι δύο ευστάθια τοπικών συντεταγμένων με $\varphi(W_1) \cap \varphi(W_2) = U_1 \cap U_2 \cap M \neq \emptyset$ τότε ο τοπικός μετασχηματισμός

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1: \varphi_1^{-1}(\varphi_1(W_1) \cap \varphi_2(W_2)) \rightarrow \varphi_2^{-1}(\varphi_1(W_1) \cap \varphi_2(W_2))$$

είναι C^∞ αμφιδιαφορισμός όπως προκύπτει απευθείας από το εθν. της απαδείξης του θεωρήματος 6.4.

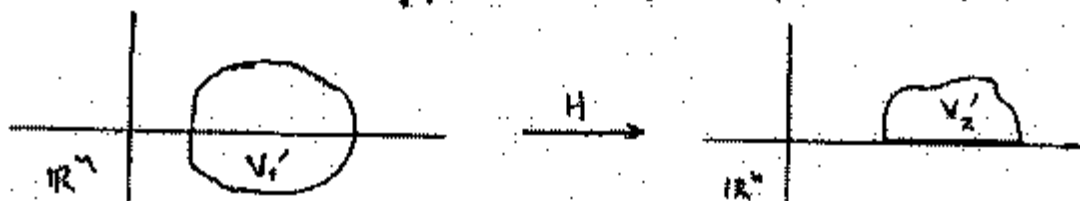


Τελειώνοντας την παράγραφο αυτή, θα γενικεύσουμε την έννοια της διαφοριακής πολλαπλότητας. Εστω $H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$ 6.5. Ορισμός Ένα συνδυασμός $M \subset \mathbb{R}^k$ λέγεται η-πολλαπλότητα με συνορό, οπότε, αν για κάθε $x \in M$ υπάρχει ανοικτή περιοχή U του x στο \mathbb{R}^k , ένα ανοικτό συνδυασμό $V \subset \mathbb{R}^k$ και μια C^∞ αμφιδιαφορισμό $h: U \rightarrow V$ ώστε

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \quad \text{ή}$$

$$h(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \quad \text{και} \quad h(U \cap M) \subseteq V \cap (H^n \times \{0\})$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο συνδυασμοί του ορισμού 6.5 δεν είναι δυνατόν να ισχύουν ταυτόχρονα. Εστω ότι οι $h_1: U_1 \rightarrow V_1$, $h_2: U_2 \rightarrow V_2$ είναι τέτοιες ώστε $h_1(U_1 \cap M) = V_1 \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ και $h_2(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ με $h_2(U_2 \cap M) = V_2 \cap (H^n \times \{0\})$. Εστω ακόμα $V'_1 = V_1 \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ και $V'_2 = V_2 \cap (H^n \times \{0\})$. Το V'_1 είναι ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , ενώ το V'_2 δεν είναι, αφού $h_2(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Η απεικόνιση όπως $H = h_2 \circ h_1^{-1}: V'_1 \rightarrow V'_2$ είναι C^∞ αμφιδιαφορισμός, πρώτα που αντιφασίσει με το τοπικό 6.5.



Το σύνολο $\text{Int} M$ των εηφείων της M που ικανοποιούν την πρώτη συνθήκη λέγεται εσωτερικό της M και το σύνολο ∂M των εηφείων της M που ικανοποιούν την δεύτερη σύνολο της M (και δεν πρέπει να συχέεται με το τοπολογικό σύνολο). Σύμφωνα με τα προηγουμένα $\text{Int} M \cap \partial M = \emptyset$.

Αν M είναι μια n -πλάκωτη με σύνολο τότε σύμφωνα με ταυ πρώτους το $\text{Int} M$ είναι n -πλάκωτη (χωρίς σύνολο). Επίσης το ∂M είναι $(n-1)$ -πλάκωτη (χωρίς σύνολο). Πράγματι, έστω $x \in \partial M$ και $h: U \rightarrow V$ με $h(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ και $h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$. Τότε, προφανώς $V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \subset h(U \cap \partial M)$. Αν τώρα $y \in U \cap \partial M$ και $h(y) \notin \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ τότε υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή $V' \subset V$ του $h(y)$ στο \mathbb{R}^n ώστε η n -συντεταγμένη κάθε στοιχείου της V' να είναι θετική. Συνεπώς, $h(h^{-1}(V' \cap M)) = V' \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$, που σημαίνει ότι $y \in \text{Int} M$, αντίφαση. Άρα $h(U \cap \partial M) = V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$. Αυτό δείχνει ότι το ∂M είναι $(n-1)$ -πλάκωτη.

Παραδείγματα πλάκωτων με σύνολο δίνονται παρακάτω γενίκεση της Πρότασης 6.2.

6.6. Πρόταση. Έστω $A \subset \mathbb{R}^k$ ένα ανοιχτό σύνολο $f = (f_1, \dots, f_{k-n}): A \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$, $0 \leq n \leq k$, μια C^∞ συνάρτηση και

$$M = \{x \in A: f_1(x) = \dots = f_{k-n}(x) = 0 \text{ και } f_{k-n}(x) \geq 0\}, \quad M_0 = f^{-1}(0).$$

Αν η $Df(x)$ έχει μέγιστη τάξη για κάθε $x \in M_0$ και η $D(f_1, \dots, f_{k-n})(x)$ έχει μέγιστη τάξη για κάθε $x \in M$, τότε το M είναι $(n+1)$ -πλάκωτη με σύνολο και $\partial M = M_0$.

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in M - M_0$. Αφού η $D(f_1, \dots, f_{k-n})(x_0)$ έχει μέγιστη τάξη και $f_{k-n}(x_0) > 0$, από το θεώρημα 5.8 υπάρχουν μια ανοιχτή περιοχή U του x_0 ώστε $U \subset f_{k-n}^{-1}(0, +\infty)$, ένα ανοιχτό σύνολο $V \subset \mathbb{R}^k$ και μια C^∞ κηφιδιαφορίση $\varphi: V \rightarrow U$ ώστε

$$(f_1, \dots, f_{k-n}) \circ \varphi(x_1, \dots, x_n) = (y_{n+2}, \dots, y_n), \quad (y_1, \dots, y_n) \in V.$$

Τότε $\varphi^{-1}(U \cap M) = \{(y_1, \dots, y_n) \in V: y_{n+2} = \dots = y_n = 0\} = V \cap (\mathbb{R}^{n+1} \times \{0\})$.

Έστω τώρα ότι $x_0 \in M_0$. Επειδή η $Df(x_0)$ έχει μέγιστη τάξη, το ίδιο ισχύει και για την $D(f_{k-n}, \dots, f_1)(x_0)$. Από την πρόταση 5.8 πάλι,

υπάρχουν μια ανοικτή περιοχή V του x_0 στο \mathbb{R}^n και ανοικτό σύνολο $V \subset \mathbb{R}^n$ και μια C^m κλειδιάφορη $\psi: V \rightarrow U$ ώστε

$$(f_{k+1}, \dots, f_n) \circ \psi(y_1, \dots, y_k) = (y_{k+1}, \dots, y_n), \quad (y_1, \dots, y_k) \in V.$$

Τότε $\psi^{-1}(U \cap M) = \{(y_1, \dots, y_k) \in V: y_{k+1} = \dots = y_{n-1} = 0 \text{ και } y_n = 0\} = V \cap (M^{n-k} \times \{0\})$, ενώ $\psi^{-1}(x_0) \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$. ο.ε.δ.

6.7. Παραδείγματα (α) Ο n -δίσκος $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x\| \leq 1\}$ είναι n -πολλαπλότητα με σύνορο.

(β) Ο "δακτύλιος" $A = \{x \in \mathbb{R}^2: 1 \leq \|x\| \leq 2\}$ είναι 2-πολλαπλότητα με σύνορο.

(γ) Το διάστημα $[0,1]$ είναι 1-πολλαπλότητα με σύνορο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστούν οι κατευθυνόμενες παράγωγοι της συνάρτησης $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \|x\|^4$

2. Εστω A ένας συμμετρικός $n \times n$ πίνακας. Να υπολογιστούν οι κατευθυνόμενες παράγωγοι της συνάρτησης $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \langle x, Ax \rangle$.

3. Εστω $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

α) Να δείξει ότι η f δεν είναι συνεχής στο σημείο $(0, 0)$.

β) Ν' αποδείξει ότι οι $\partial_1 f(0, 0)$, $\partial_2 f(0, 0)$ υπάρχουν.

4. Εστω $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x, y) = (xy)^{1/3}$.

α) Ν' αποδείξει ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\partial_1 f(0, 0)$, $\partial_2 f(0, 0)$.

β) Αν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι η συνάρτηση $g(x) = (x, x)$, ν' αποδείξει ότι η σύνθεση $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι διαφορίσιμη στο 0.

5. Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $x \in A$. Ν' αποδείξει ότι δεν υπάρχει καμία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f'(x, v) > 0$ για κάθε $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

6. Εστω $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

α) Ν' αποδείξει ότι υπάρχει η $f'(x, v)$ για κάθε $v \in \mathbb{R}^2$.

β) Ν' αποδείξει ότι υπάρχουν $v, u \in \mathbb{R}^2$ ώστε $f'(x, v+u) \neq f'(x, v) + f'(x, u)$.

7. Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \int_0^1 (e^{xt} + t \sin(xyt)) dt$$

8. Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο, $x \in A$ και $v \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

το ενδιάμεσο τιμήα $[x, x+tv] = \{x+tv : 0 \leq t \leq 1\}$ να περιέχεται

στο A . Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση για την οποία υπάρχει η

κατευθυνόμενη παράγωγος $f'(x+tv, v)$ για κάθε $0 \leq t \leq 1$, ν' αποδείξει

ότι υπάρχει $\theta \in (0, 1)$ ώστε $f(x+v) - f(x) = f'(x+\theta v, v)$.

9. Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση ώστε $f'(x, y) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $y \in \mathbb{R}^n$. Ν' αποδειχθεί ότι η f είναι σταθερή.

10. Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και $v \in \mathbb{R}^n$ ώστε $f'(x, y) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Τι συμπεραίνεται για την f ;

11. Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο $f(x, y) = (\sin x \cos y, \sin x \sin y, \cos x \cos y)$ σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

12. Είναι η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ διαφορίσιμη στο $(0, 0)$;

13. Έστω $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε $|f(x)| \in \|x\|^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$. Ν' αποδειχθεί ότι η f είναι διαφορίσιμη στο 0 .

14. Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση και $x \in A$, όταν το $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό. Δείξτε ότι $\mathbb{R}^n = \langle \nabla f(x) \rangle \oplus \ker Df(x)$.

15. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση διαφορίσιμη στο $x \in A$ ώστε $\nabla f(x) \neq 0$. Ν' αποδειχθεί ότι υπάρχει ακριβώς ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$|f'(x, y)| = \|\nabla f(x)\| = \max\{|f'(x, u)| : u \in \mathbb{R}^n \text{ και } \|u\| = 1\}$$

16. Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση διαφορίσιμη στο σημείο $x \in A$, όταν το $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό. Να δείξει ότι

$$f'(x, v+u) = f'(x, v) + f'(x, u)$$

για κάθε $v, u \in \mathbb{R}^n$.

17. Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων.

(α) $f(x, y, z) = (x^y, z)$

(β) $f(x, y, z) = x^{y+z}$

(γ) $f(x, y) = (\sin(\pi y), \sin(\pi x \sin y), \pi^y)$

18. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση και $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Αν $h = f \circ g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, ν' αποδειχθεί ότι $\|\nabla h(x, y, z)\|^2 = 4g(x, y, z) \cdot (f'(g(x, y, z)))^2$ για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

19. Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μια ομογενής συνάρτηση βαθμού p , δηλαδή $f(tx) = t^p f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $t \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $x \in \mathbb{R}^n$, ν' αποδειχθεί ότι $\langle x, \nabla f(x) \rangle = pf(x)$. (Θεώρημα του Euler)

20. Αν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση και $x \in \mathbb{R}$, να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ο όσον

(α) $f(x, y) = \int_x^{x+y} g(t) dt$ (β) $f(x, y) = \int_x^{xy} g(t) dt$

21. Εστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μια αλτιμ συνάρτηση, δηλαδή $f(x) = f(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο 0, τότε $Df(0) = 0$.

22. Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ δύο συναρτήσεις.

Εστω ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $x_0 \in A$ και $f(x_0) = 0$, ενώ η g είναι συνεχής στο x_0 . Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\phi: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ με τύπο $\phi(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$ είναι διαφορίσιμη στο x_0 και

$D\phi(x_0)h = \langle g(x_0), Df(x_0)h \rangle$ για κάθε $h \in \mathbb{R}^n$.

23. Εστω $A, B \subset \mathbb{R}^n$ δύο ανοιχτά σύνολα και $f: A \rightarrow B$ είναι διαφορίσιμος. Εστω $x_0 \in A$ ώστε η f είναι διαφορίσιμη στο x_0 .

Να αποδειχθεί ότι η $f^{-1}: B \rightarrow A$ είναι διαφορίσιμη στο $f(x_0)$ τότε και πόσω τότε είναι η $Df(x_0)$ είναι γνηθιμός ισομορφισμός

24. Εστω $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(α) Να υπολογιστούν οι $\partial_1 f(x, y), \partial_2 f(x, y)$, όταν $(x, y) \neq (0, 0)$.

(β) Να δείξει ότι $\partial_1 f(0, 0) = \partial_2 f(0, 0) = 0$

(γ) Να δείξει ότι $\partial_{1,2}^2 f(0, 0) = 1$ και $\partial_{3,1}^2 f(0, 0) = -1$. Πως εξηγείται αυτό;

25. Εστω $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο $f(x) = -\frac{1}{\|x\|}$. Να δείξει ότι $\partial_{1,1}^2 f + \partial_{2,2}^2 f + \partial_{3,3}^2 f = 0$.

26. Εστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο C^2 συναρτήσεις και $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση $F(x, y) = f(x + g(y))$. Να δείξει ότι $\partial_1 F \cdot \partial_{1,1}^2 F = \partial_2 F \cdot \partial_{1,1}^2 F$.

27. Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $x_0 \in A$. Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση τότε $Df(x)(x - x_0) > 0$ για κάθε $x \in A \setminus \{x_0\}$.

γ) αποδειχθεί ότι η f έχει τοστικό γνήθιο ελάχιστο στο x_0

24. Εστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

- (α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι πάλιν διαφορίσιμη και $f'(0) = 1$
 (β) Δείξτε ότι η f' είναι αβέβαιη στο 0, αλλά $\lim_{x \rightarrow 0} f$ δεν είναι C^1 .
 (γ) Να αποδειχθεί ότι η f δεν αντιστρέφεται διαφορετικά σε καμία περιοχή του 0.
 Έντονος το θέμα της αντιστροφής συνάρτησης δεν έχει με διαφορετικές
 βιολογίες.

25. Δείξτε ότι δεν υπάρχει καμία (-1) και C^1 συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

26. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μία ανώτερη περιοχή της ταυτοτικής
 γραμμής απεικόνισης $I_n \in GL(n, \mathbb{R})$ ώστε για κάθε $T \in V$ υπάρχει
 τετραγωνική είδη, αλλά δεν υπάρχει $S \in GL(n, \mathbb{R})$ με $S^2 = T$.

27. Εστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία C^1 συνάρτηση για την οποία υπάρχει
 $0 < c < 1$ ώστε $|f'(t)| \leq c$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι
 η απεικόνιση $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$F(t, s) = (t + f(s), s + f(t))$$

είναι C^1 αμφιδιαφορίσιμη.

(Υπόδειξη: Για το "επί" της F θεωρήστε την συνάρτηση φ της στην
 απόδειξη του θεωρήματος της αντιστροφής συνάρτησης και αποδείξτε ότι
 παίρνει ελάχιστη τιμή σε κάποιο σημείο. Για το "κάτω" θεωρήστε την
 συνάρτηση g στην στην απόδειξη του θεωρήματος της αντιστροφής συνάρτησης
 και επαναλάβετε την απόδειξη του λήμματος S.3 για την ειδική αυτή περίπτωση).

28. Εστω $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση ώστε ο $DF(x)$
 είναι θετικά ορισμένος για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Να αποδειχθεί ότι η F είναι "1-1".

(Υπόδειξη: θεωρήστε την συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \langle x - F(x), x_2 - x_1 \rangle$
 για δεδομένα $x_1 + x_2$ ώστε και χρησιμοποιήστε την άσκηση 8.)

29. Εστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ μία C^∞ συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι το γραμμάτιο
 $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : y = f(x)\}$ της f είναι m -παραπλοτύτα.

30. Να δείξει ότι το $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ είναι 1-παραπλοτύτα.

31. Να δείξει ότι το σύνολο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$ δεν είναι παραπλοτύτα.

32. Να εξεταστεί για ποιες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ το σύνολο $M_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exp(xy) = c\}$

είναι 1-παραπλοήτητα.

33. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας αντισυμμετρικός, μη-επίστροφος πίνακας. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, Ax \rangle = 1\}$ είναι $(n-1)$ -παραπλοήτητα.

34. Δείξτε ότι το σύνολο $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ είναι 2-παραπλοήτητα.

35. Έστω M μια κλειστή n -παραπλοήτητα με σύνορο στο \mathbb{R}^n . Δείξτε ότι το ∂M είναι ακριβώς το τοπολογικό σύνορο της M στο \mathbb{R}^n . Να αποδειχθεί επίσης ότι το εσωτερικό του M δεν ισχύει στον n M δεν είναι κλειστή.

III. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΕ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ

1. Ολοκλήρωση σε παραλληλεπίπεδα

Ένα παραλληλεπίπεδο στον \mathbb{R}^n είναι ένα σύνολο της μορφής

$$I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

όπου $a_i < b_i$, $1 \leq i \leq n$. Οι πλευρές του I είναι τα σύνολα $I_i = \{x_i \in \mathbb{R}^n : x_i = a_i\}$ και $I_i = \{x_i \in \mathbb{R}^n : x_i = b_i\}$, $1 \leq i \leq n$. Ο αριθμός

$\mu(I) = (b_n - a_n) \dots (b_1 - a_1)$ λέγεται όγκος ή όγκος του I . Μια διαμέριση

του I είναι το καρτεσιανό γινόμενο $P = P_1 \times \dots \times P_n$, όπου η

$P_i = \{a_i = x_i^0 < \dots < x_i^{r_i} = b_i\}$ είναι διαμέριση του $[a_i, b_i]$, $1 \leq i \leq n$.

Αντικαθιστώντας η P είναι μια διαμέριση του I στα σύνολα (παραλληλεπίπεδα)

$[x_1^{j_1-1}, x_1^{j_1}] \times \dots \times [x_n^{j_n-1}, x_n^{j_n}]$, όπου $1 \leq j_1 \leq r_1, \dots, 1 \leq j_n \leq r_n$.

Η διαδικασία των ορίσμων της ολοκληρωσιμότητας φραγμένων συναρτήσεων οριζόντιων σε παραλληλεπίπεδα είναι ίδια όπως αυτή για συναρτήσεις οριζόντιες σε κλειστά διαστήματα στο \mathbb{R} .

Έστω $I \subset \mathbb{R}^n$ ένα παραλληλεπίπεδο και $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Για κάθε διαμέριση $P = P_1 \times \dots \times P_n$ του I σε παραλληλεπίπεδα

I_1, \dots, I_r , όπου $r = r_1 \dots r_n$, ορίζουμε

$$m_j = \inf \{f(x) : x \in I_j\}, \quad M_j = \sup \{f(x) : x \in I_j\}, \quad 1 \leq j \leq r \text{ και}$$

$$L(f, P) = \sum_{j=1}^r m_j \mu(I_j), \quad U(f, P) = \sum_{j=1}^r M_j \mu(I_j).$$

Οι ορίσμων το $L(f, P)$ λέγεται κάτω ορίσμων και το $U(f, P)$ άνω ορίσμων.

Προφανώς $L(f, P) \leq U(f, P)$ για κάθε διαμέριση P .

1.1. Λήμμα Έστω P' μια υπερίσμων της διαμέρισης P , δηλαδή $P \subset P'$.

Τότε: $L(f, P) \leq L(f, P')$ και $U(f, P') \leq U(f, P)$.

Απόδειξη Αφού $P \subset P'$, κάθε παραλληλεπίπεδο $I_j \in P$ υποδιαιρείται σε

παραλληλεπίπεδα $S_{j_1}, \dots, S_{j_{k_j}} \in P'$ και $\mu(I_j) = \mu(S_{j_1}) + \dots + \mu(S_{j_{k_j}})$.

Επίσης $m(I_j) \leq m(S_{j_i})$ και $M(I_j) \geq M(S_{j_i})$, $1 \leq i \leq k_j$. Από

$$m(I_j) \mu(I_j) = m(I_j) \mu(S_{j_1}) + \dots + m(I_j) \mu(S_{j_{k_j}})$$

$$\leq m(S_{j_1}) \mu(S_{j_1}) + \dots + m(S_{j_{k_j}}) \mu(S_{j_{k_j}})$$

που δείχνει ότι $L(f, P) \leq L(f, P')$. Ομοίως $U(f, P') \leq U(f, P)$.

1.2. Λήμμα Αν P, P' είναι δυο διαμερίσεις του I , τότε $L(f, P') \in U(f, P)$

Απόδειξη Υπάρχει μια διαμερίση $P'' = P \cup P'$ που είναι ενδεκτικώς της P και της P' . Τότε από το Λήμμα 1.1 έχουμε:

$$L(f, P') \in L(f, P'') \in U(f, P'') \in U(f, P).$$

Θεωρούμε τώρα

$$\int_I f = \sup \{ L(f, P) : P \text{ διαμερίση του } I \} \quad \text{και}$$

$$\int_I f = \inf \{ U(f, P) : P \text{ διαμερίση του } I \}. \quad \text{Τότε} \quad \int_I f \leq \int_I f.$$

1.3. Ορισμός Η πραγματική συνάρτηση $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται δοκληρωμένη αν $\int_I f = \int_I f$. Το δοκληρωμένο της f στο I είναι ο πραγματικός αριθμός

$$\int_I f = \int_I f(x) dx = \int_I f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_I f = \int_I f.$$

1.4. Θεώρημα Η πραγματική συνάρτηση $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δοκληρωμένη τότε και μόνο τότε αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει μια διαμερίση P του I ώστε

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$$

Απόδειξη Έστω ότι η f είναι δοκληρωμένη και $\epsilon > 0$. Υπάρχουν διαμερίσεις P', P'' του I ώστε $U(f, P') - \int_I f < \epsilon/2$ και $\int_I f - L(f, P'') < \epsilon/2$.

Αν τώρα $P = P' \cup P''$, τότε έχουμε $U(f, P) - L(f, P) \leq U(f, P') - L(f, P'') < \epsilon$.

Το αντίστροφο είναι προφανές αφού $\int_I f - \int_I f \leq U(f, P) - L(f, P)$.

Όπως ακριβώς και στην θεωρία δοκληρωμένης συμμετρικών μιας μεταβλητής αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες:

Αν οι $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δοκληρωμένες συναρτήσεις τότε

(i) η $|f|$ είναι δοκληρωμένη και $|\int_I f| \leq \int_I |f|$

(ii) η $\lambda f + \mu g$ είναι δοκληρωμένη και $\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g$

(iii) Αν $f \geq 0$, τότε $\int_I f \geq 0$. (iv) η $f \cdot g$ είναι δοκληρωμένη

Αν $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}^n$ είναι δυο παραλληλεπίπεδα με $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ που έχουν κοινή μια πλευρά τότε το $I = I_1 \cup I_2$ είναι παραλληλεπίπεδο. Αν $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια πραγματική συνάρτηση ώστε οι $f|_{I_1}, f|_{I_2}$ να είναι δοκληρωμένες τότε η f είναι δοκληρωμένη και $\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f$.

1.5. Θεώρημα Κάθε συνεχής συνάρτηση $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δοκληρωμένη.

Απόδειξη Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή τα I είναι συμπαγείς και γ, f συνεχώς, γf είναι ομοιόμορφα συνεχής. Συνεπώς υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon / 2k(\mathbb{C}) \quad \text{όταν } x, y \in I \text{ και } \|x - y\| < \delta.$$

Θεωρούμε μια διαμέριση $P = [I_1, \dots, I_r]$ του I ώστε

$$\Delta(P) = \max \{ d(I_j) : 1 \leq j \leq r \} < \delta,$$

όπου $d(I_j)$ είναι το μέγιστο της τετραγωνικής διαμέτρου του I_j . Τότε για κάθε $x, y \in I_j$ έχουμε $\|x - y\| < \delta$, οπότε $f(x) < f(y) + \epsilon / 2k(\mathbb{C})$.

Αρα $M_j \leq m_j + (\epsilon / 2k(\mathbb{C}))$ για κάθε $1 \leq j \leq r$. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &= \sum_{j=1}^r (M_j - m_j) k(\mathbb{C}_j) \leq \sum_{j=1}^r \frac{\epsilon}{2k(\mathbb{C})} k(\mathbb{C}_j) \\ &= \frac{\epsilon}{2k(\mathbb{C})} \sum_{j=1}^r k(\mathbb{C}_j) = \frac{\epsilon}{2k(\mathbb{C})} k(\mathbb{C}) = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \quad \text{ο.ε.δ.} \end{aligned}$$

Το πρόβλημα των υπολογισμού ολοκληρωμάτων πάνω σε παραλληλόγραμπα του \mathbb{R}^n , λύνεται από το επόμενο θεώρημα που θα αναφέρει και διδαχτικό υπολογιστικό ολοκληρωμάτων πάνω σε κλειστά διαστήματα στο \mathbb{R} .

1.6. Θεώρημα (Fubini) Έστω $I \subset \mathbb{R}^n, J \subset \mathbb{R}^m$ δύο παραλληλόγραμπα και

$f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε οι συναρτήσεις

$\varphi, \psi: J \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες

$$\varphi(y) = \int_I f(x, y) dx \quad \text{και} \quad \psi(y) = \int_I f(x, y) dx$$

είναι ολοκληρώσιμες στο J και

$$\int_J \left(\int_I f(x, y) dx \right) dy = \int_{I \times J} f = \int_J \left(\int_I f(x, y) dx \right) dy.$$

Απόδειξη Έστω P μια διαμέριση του $I \times J$. Τότε υπάρχουν διαμερίσεις P_I του I

και P_J του J ώστε $P = P_I \times P_J$. Έστω οπότε $P_I = \{I_1, \dots, I_r\}$ και $P_J = \{J_1, \dots, J_s\}$,

οπότε $D = \{I_i \times J_j : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\}$. Θεωρούμε

$$M_{ij} = \sup \{ f(x, y) : (x, y) \in I_i \times J_j \}, \quad N_j = \sup \{ \varphi(y) : y \in J_j \}$$

και για κάθε $y \in J$, $M_i(y) = \sup \{ f(x, y) : x \in I_i \}$.

Αν $y \in J_j$, έχουμε: $\sum_{i=1}^r M_{ij} k(\mathbb{C}_i) \geq \sum_{i=1}^r M_i(y) k(\mathbb{C}_i) \geq \int_I f(x, y) dx = \varphi(y)$.

Συνεπώς $\sum_{i=1}^r M_{ij} k(\mathbb{C}_i) \geq N_j$. Από την άλλη μεριά $k(I_i \times J_j) = k(I_i) k(J_j)$

και έχουμε: $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s M_{ij} k(\mathbb{C}_i \times \mathbb{C}_j) \geq \sum_{j=1}^s N_j k(\mathbb{C}_j) \geq \int_J \varphi$. Αξιώστε λοιπόν

ση $U(f, P) \geq \bar{J}_J \psi$ για κάθε διαίρεση P του $I \times J$. Προκύπτει έτσι
 ση $\int_{I \times J} f \geq \bar{J}_J \psi = \bar{J}_J \left(\int_I f(x, y) dx \right) dy$. Ομοίως αποδεικνύεται ση και

$$\int_{I \times J} f \leq \underline{J}_J \phi = \underline{J}_J \left(\int_I f(x, y) dx \right) dy.$$

Οπως $\phi \in \Psi$ και και αντιστρόφως έχουμε

$$\int_J \phi \in \int_J \psi \leq \bar{J}_J \psi \text{ αφού από το προηγούμενο προκύπτει}$$

$$\int_{I \times J} f \leq \int_J \psi \leq \bar{J}_J \psi \leq \int_{I \times J} f \text{ που δείχνει ση η } \psi \text{ είναι ολοκληρώσιμη}$$

και $\int_J \psi = \int_{I \times J} f$. Ομοίως αποδεικνύεται ση η ϕ είναι ολοκληρώσιμη
 και $\int_I \phi = \int_{I \times J} f$.

1.7. Πρόταση Εστω $I \subset \mathbb{R}^n, J \subset \mathbb{R}^m$ δύο παραλληλόγραμπα και $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$
 μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν τα ολοκληρώματα $\int_I f(x, y_0) dx$ και
 $\int_J f(x_0, y) dy$ υπάρχουν για κάθε $x_0 \in I$ και $y_0 \in J$, τότε υπάρχουν και τα
 $\int_J \left(\int_I f(x, y) dx \right) dy, \int_I \left(\int_J f(x, y) dy \right) dx$ και είναι ίσα με $\int_{I \times J} f$.

Οι υποθέσεις του προηγούμενου 1.7 ισχύουν πάντα όταν η f είναι συνεχής,
 όπως προκύπτει από το Θεώρημα 1.5.

1.8. Πρόταση Εστω $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ και $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής
 συνάρτηση. Τότε

$$\int_I f = \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \dots \right) dx_n$$

Επιπλέον το δεξί μέρος της ισότητας μπορεί να αναδιατάξει από το

$$\int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \dots \right) dx_n$$

όταν (i_1, \dots, i_n) είναι οποιαδήποτε μεταθέση των $(1, 2, \dots, n)$.

2. Μέτρο μνδέν και περιεχόμενο μνδέν

Ενν παραγράφου αυτή θα διατυκώσουμε και αποδείξουμε το βασικό κριτήριο
 ολοκληρώσιμης συνάρτησης σε παραλληλόγραμπα. Η βασική έννοια που
 είναι η ακόλουθη

2.1. Ορισμός Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ έχει (n-διάστατο) μέτρο 0 αν για κάθε $\epsilon > 0$

υπάρχει ένα αριθμητικό κάλυμα $\{I_j; j \in \mathbb{N}\}$ του A από παραλληλεπίπεδα
ώστε $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) < \varepsilon$

Ετσι αριθμό αυτο μπορούμε να θεωρήσουμε τα $\{I_j^0; j \in \mathbb{N}\}$ είναι
κάλυμα του A . Προσχηματικά, έστω ότι $I_j, j \in \mathbb{N}$ καλύπτουν το A ώστε
 $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) < \varepsilon/2$. Κάθε I_j περιέχεται στο εσωτερικό ενός μεγαλύτερου παραλλη-
λεπίπεδου J_j ώστε $\mu(J_j) \leq \mu(I_j) + \varepsilon/2^{j+1}$. Τότε τα $J_j^0, j \in \mathbb{N}$
καλύπτουν το A και $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(J_j) < \varepsilon$.

2.2 Παράδειγμα (α) Κάθε αριθμητικό σύνολο στο \mathbb{R}^n έχει μέτρο 0.

(β) Αν το A έχει μέτρο 0 και $B \subset A$, τότε το B έχει μέτρο 0.

(γ) Κάθε ευθύγραμμο τμήμα στο $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, έχει μέτρο 0.

(δ) Αν το Γ είναι ένα παραλληλεπίπεδο στο \mathbb{R}^n , τότε το $\partial\Gamma$ έχει μέτρο 0.

Γιατί αρκεί να δείξουμε ότι το $S = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times \{0\}$ έχει
μέτρο 0 στο \mathbb{R}^n . Έστω P μια διάμετρο του $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]$.

Τότε τα παραλληλεπίπεδα $J \times [-\frac{\varepsilon}{4\mu(Q)}, \frac{\varepsilon}{4\mu(Q)}]$, $J \in P$, καλύπτουν το S και κάθε
 $\varepsilon > 0$ και $\sum_{J \in P} \mu(J \times [-\frac{\varepsilon}{4\mu(Q)}, \frac{\varepsilon}{4\mu(Q)}]) = \sum_{J \in P} \mu(J) \cdot \frac{\varepsilon}{2\mu(Q)} = \mu(Q) \cdot \frac{\varepsilon}{2\mu(Q)} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

2.3 Θεώρημα Έστω $\{A_i; i \in \mathbb{N}\}$ μια ακολουθία συνόλων με μέτρο 0 στο \mathbb{R}^n .
Τότε το $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ έχει μέτρο 0.

Απόδειξη Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα αριθμητικό κάλυμα $\{I_{ij}; j \in \mathbb{N}\}$
από παραλληλεπίπεδα του A_i ώστε $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_{ij}) < \varepsilon/2^i$. Τότε τα αριθμητικά
το πλήθος παραλληλεπίπεδα $I_{ij}, (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ καλύπτουν το A και
 $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_{ij}) < \varepsilon$.

2.4 Ορισμός Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ έχει (μ-διάστατο) περιεχόμενο 0 αν για
κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα πεπερασμένο κάλυμα $\{I_1, \dots, I_k\}$ του A από
παραλληλεπίπεδα ώστε $\sum_{j=1}^k \mu(I_j) < \varepsilon$.

Όπως και προηγουμένως μπορούμε να θεωρήσουμε ισοδύναμα ότι τα I_1^0, \dots, I_k^0
καλύπτουν το A . Είναι προφανές ότι κάθε σύνολο με περιεχόμενο 0 έχει μέτρο 0.
Το αντίστροφο δεν ισχύει. Παράδειγμα, χωρίς το \mathbb{N} έχει μέτρο 0 στο \mathbb{R}
αλλά δεν έχει περιεχόμενο 0.

2.5 Θεώρημα Ένα παραλληλεπίπεδο $I \subset \mathbb{R}^n$ δεν έχει περιεχόμενο 0.

Απόδειξη Εστω ότι τα παραλληλεπίπεδα I_1, \dots, I_n καλύπτουν το I . Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $I_i \subset I$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Υπάρχει μια διαμέριση P του I ώστε για κάθε $J \in P$ υπάρχει κάποιο $i \in \mathbb{N}$ τέτοιο $J \subset I_i$ και κάθε I_i διαμερίζεται από κάποια $J \in P$. Συνεπώς, $\sum_{i=1}^n \mu(I_i) \leq \sum_{J \in P} \mu(J) = \mu(I)$. Αυτό δείχνει ότι το I δεν μπορεί να έχει μέτρο 0.

2.6. Πρόταση Ένα συμπαγές σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ έχει μέτρο 0 τότε και μόνο τότε όταν έχει περιεχόμενο 0.

Απόδειξη Εστω ότι το A έχει μέτρο 0 και $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχουν παραλληλεπίπεδα I_j , $j \in \mathbb{N}$ ώστε $A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$ και $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) < \epsilon$. Αφού το A είναι συμπαγές, υπάρχουν $j_1, \dots, j_k \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $A \subset I_{j_1} \cup \dots \cup I_{j_k}$. Αφού $\sum_{i=1}^k \mu(I_{j_i}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) < \epsilon$, το A έχει περιεχόμενο 0.

Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Για κάθε $x \in A$ και $\delta > 0$ ορίζουμε:

$$M(x, f, \delta) = \sup \{ f(y) : y \in A \text{ και } \|x - y\| < \delta \}$$

$$m(x, f, \delta) = \inf \{ f(y) : y \in A \text{ και } \|x - y\| < \delta \}$$

Ο δ -αριθμητικός αριθμός $O(f, x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (M(x, f, \delta) - m(x, f, \delta))$ λέγεται ταλάντωμα της f στο σημείο x . Το όριο υπάρχει πάντα αφού φθινονεί του δ , η διαφορά $M(x, f, \delta) - m(x, f, \delta)$ φθίνει. Είναι προφανές ότι η f είναι συνεχής στο x , τότε και μόνο τότε όταν $O(f, x) = 0$. Η ταλάντωση της f στο x αποτελεί "μέτρο" της ασυνεχίας της f στο x .

2.7. Πρόταση Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Αν το A είναι κλειστό σύνολο, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ το $D_\epsilon = \{x \in A : O(f, x) \geq \epsilon\}$ είναι επίσης κλειστό σύνολο.

Απόδειξη Εστω $x \in \mathbb{R}^n \setminus D_\epsilon$. Τότε είτε $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ είτε $x \in A$ και $O(f, x) < \epsilon$. Στην πρώτη περίπτωση το x ανήκει στο εσωτερικό του $\mathbb{R}^n \setminus D_\epsilon$, αφού το A είναι κλειστό. Στην δεύτερη περίπτωση, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $M(x, f, \delta) - m(x, f, \delta) < \epsilon$. Αν τότε $y \in S(x, \delta)$, τότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε $S(y, \delta') \subset S(x, \delta)$. Συνεπώς $M(y, f, \delta') - m(y, f, \delta') \leq M(x, f, \delta) - m(x, f, \delta) < \epsilon$. Αρα $O(f, y) < \epsilon$ για κάθε $y \in S(x, \delta)$ ο.ε.δ.

2.8. Λήμμα Εστω $I \subset \mathbb{R}^n$ ένα παραλληλεπίπεδο, $\epsilon > 0$ και $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ μια

φραγμένη συνάρτηση ώστε $0(f, \eta) < \epsilon$ για κάθε $\eta \in I$. Τότε υπάρχει μια διαμέριση P του I ώστε $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon \cdot |CI|$.

Απόδειξη Από την νηδεύση προκύπτει ότι κάθε $\eta \in I$ περιέχεται στο εσωτερικό ενός παραλληλεπίπεδου I_η ώστε $M_{I_\eta} - m_{I_\eta} < \epsilon$. Επειδή το I είναι ορθογώνιο, υπάρχουν πεπερασμένα τέτοια παραλληλεπίπεδα I_1, \dots, I_n που καλύπτουν το I . Υπάρχει μια διαμέριση P του I κάθε παραλληλεπίπεδο, της οποίας περιέχεται σε κάποιο I_{η_i} . Συνεπώς έχουμε $M_J - m_J < \epsilon$ για κάθε $J \in P$. Άρα $U(f, P) - L(f, P) = \sum_{J \in P} (M_J - m_J) |J| < \epsilon \sum_{J \in P} |J| = \epsilon |CI|$.

2.9. Θεώρημα Έστω $I \subset \mathbb{R}^n$ ένα παραλληλεπίπεδο, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση και $D = \{x \in I : f \text{ είναι ασυνεχής στο } x\}$. Η f είναι ολοκληρώσιμη τότε και μόνο τότε όταν το D έχει μέτρο 0.

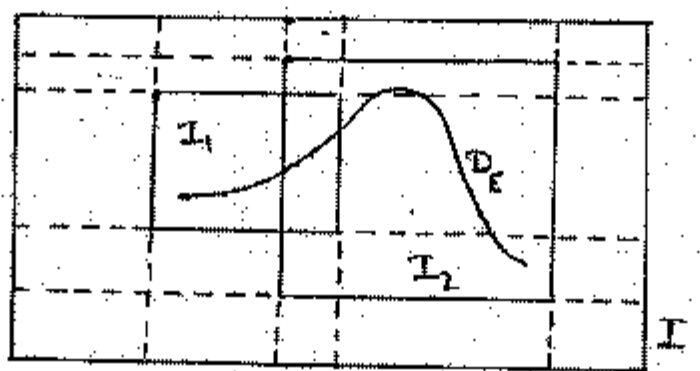
Απόδειξη Έστω ότι το D έχει μέτρο 0. Έστω $\epsilon > 0$. Θεωρούμε το σύνολο $D_\epsilon = \{x \in I : 0(f, x) \geq \epsilon\}$. Τότε $D_\epsilon \subset D$ και συνεπώς το D_ϵ έχει μέτρο 0. Από την πρόταση 2.7 προκύπτει ότι το D_ϵ είναι ορθογώνιο και συνεπώς έχει περιεχόμενο 0, από την πρόταση 2.6. Άρα, υπάρχουν παραλληλεπίπεδα I_1, \dots, I_k ώστε $D_\epsilon \subset I_1 \cup \dots \cup I_k$ και $\sum_{i=1}^k |I_i| < \epsilon$.

Έστω P μια διαμέριση του I ώστε κάθε παραλληλεπίπεδο $J \in P$ να κείται σε μια από τις ακόλουθες δύο κλάσεις:

- (α) $J \in P_1$ αν υπάρχει $1 \leq i \leq k$ ώστε $J \subset I_i$
- (β) $J \in P_2$ αν $J \cap D_\epsilon = \emptyset$.

Επειδή η f είναι φραγμένη, υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| < M$ για κάθε $x \in I$, οπότε $M_J - m_J < 2M$ για κάθε $J \in P$. Συνεπώς έχουμε:

$$\sum_{J \in P_1} (M_J - m_J) |J| < 2M \sum_{i=1}^k |I_i| < 2M\epsilon.$$



Αν τιμω $J \in P_2$, τότε $0 \leq f(x) \leq \epsilon$ για κάθε $x \in J$. Από το Λήμμα 2.8 προκύπτει ότι υπάρχει μια εσλιέριση P' της P ώστε

$$\sum_{J' \in P'} (M_{J'} - m_{J'}) \cdot \mu(J') \leq \epsilon \cdot \mu(I)$$

Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} U(f, P') - L(f, P') &\leq \sum_{J' \in P'} (M_{J'} - m_{J'}) \cdot \mu(J') + \sum_{J' \in P_2} (M_{J'} - m_{J'}) \cdot \mu(J') \\ &\leq 2M\epsilon + \sum_{J \in P} \epsilon \cdot \mu(J) \leq (2M + \mu(I))\epsilon \end{aligned}$$

Αφού τα $M, \mu(I)$ είναι σταθερά, αυτό δείχνει ότι f είναι ολοκληρώσιμη. Αντίστροφα: εστω ότι f είναι ολοκληρώσιμη. Επειδή $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{1/k}$, αρκεί να δείξουμε ότι το $D_{1/k}$ έχει μέτρο 0 για κάθε $k \in \mathbb{N}$, λόγω του θεωρήματος 2.3. Εστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει μια εσλιέριση P του I με $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon/2k$.

Επίσης $D_{1/k} = B_1 \cup B_2$, όπου $B_1 = \{x \in D_{1/k} : x \in J^\circ \text{ για κάποιο } J \in P\}$ και $B_2 = D_{1/k} \setminus B_1$. Αφού $B_2 \subset \bigcup_{J \in P} \partial J$, το B_2 έχει μέτρο 0. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το B_1 έχει μέτρο 0. Θετουμε $\mathcal{B} = \{J \in P : J^\circ \cap D_{1/k} \neq \emptyset\}$

Τότε προφανώς $B_1 \subset \bigcup_{J \in \mathcal{B}} J^\circ$. Επίσης από τον ορισμό έχουμε $M_J - m_J \geq 1/2k$ για κάθε $J \in \mathcal{B}$. Άρα

$$\frac{1}{2k} \sum_{J \in \mathcal{B}} \mu(J) \leq \sum_{J \in \mathcal{B}} (M_J - m_J) \cdot \mu(J) \leq \sum_{J \in P} (M_J - m_J) \cdot \mu(J) < \frac{\epsilon}{2k}$$

Αυτό δείχνει ότι το B_1 έχει μέτρο 0. ο.ε.λ.

3: Ολοκλήρωση σε φραγμένα σύνολα

Εστω $B \subset \mathbb{R}^n$ ένα φραγμένο σύνολο και $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Επειδή το B είναι φραγμένο υπάρχει ένα παραλληλόπαιδο $I \subset \mathbb{R}^n$ με $B \subset I$.

3.1. Ορισμός. Η f λέγεται ολοκληρώσιμη στο B αν η $f \cdot \chi_B$ είναι ολοκληρώσιμη στο I , όπου $\chi_B: \mathbb{R}^n \rightarrow \{0,1\}$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του B . Σ' αυτή την περίπτωση ορίζουμε

$$\int_B f = \int_I f \cdot \chi_B$$

Ο ορισμός είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του παραλληλοπίπεδου I . Αν I' είναι άλλο ένα παραλληλόπαιδο που περιέχει το B , τότε το $I \cap I'$

είναι παραλληλεπίπεδα και τα $I \times (I \cap I')$, $I' \times (I \cap I')$ αποτελούνται από παραλληλεπίπεδα με τονλάχιστον μία κοινή πλευρά. Επειδή $f \cdot \chi_B |_{I \times (I \cap I')} = 0$ και $f \cdot \chi_B |_{I' \times (I \cap I')} = 0$, έχουμε $\int_I f \cdot \chi_B = \int_{I \cap I'} f \cdot \chi_B = \int_{I'} f \cdot \chi_B$.

3.2. Θεώρημα Ένα φραγμένο σύνολο B έχει περιεχόμενο 0 τότε και μόνο τότε όταν $\int_B 1 = 0$.

Απόδειξη Έστω I ένα παραλληλεπίπεδο που περιέχει το B ώστε $\int_I \chi_B = 0$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει μια διαμέριση P του I ώστε $V(\chi_B, P) < \epsilon$. Έστω $Q = \{J \in P : J \cap B \neq \emptyset\}$. Το Q είναι ένα πεπερασμένο σύνολο παραλληλεπίπεδων που καλύπτει το B και $\sum_{J \in Q} t(J) = \sum_{J \in Q} M_J t(J) \leq V(\chi_B, P) < \epsilon$.

Αντίστροφα: Έστω ότι το B έχει περιεχόμενο 0 και $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχουν παραλληλεπίπεδα I_1, \dots, I_k με $B \subset I_1 \cup \dots \cup I_k$ και $\sum_{i=1}^k t(I_i) < \epsilon$. Προφανώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $I_i \subset I$, $1 \leq i \leq k$. Υπάρχει μια διαμέριση P του I που διαμερίζεται και κάθε I_i , $1 \leq i \leq k$. Αν πάρουμε $J \in P$ είναι τέτοιο ώστε $J \not\subset I_i$, $1 \leq i \leq k$, τότε $\chi_B |_J = 0$. Συνεπώς, $0 \leq L(\chi_B, P) \leq V(\chi_B, P) \leq \sum_{i=1}^k t(I_i) < \epsilon$. Αυτό δείχνει ότι $\int_B 1 = 0$.

3.3. Θεώρημα. Έστω $B \subset \mathbb{R}^n$ ένα φραγμένο σύνολο. Το ολοκλήρωμα $\int_B 1$ υπάρχει τότε και μόνο τότε όταν το ∂B έχει μέτρο 0.

Απόδειξη Έστω I ένα παραλληλεπίπεδο με $B \subset I$. Η $\chi_B: I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής σχεδόν στα σημεία του ∂B . Το αθροίσμα λοιπόν είναι αβέβαιο από το Θεώρημα 2.9.

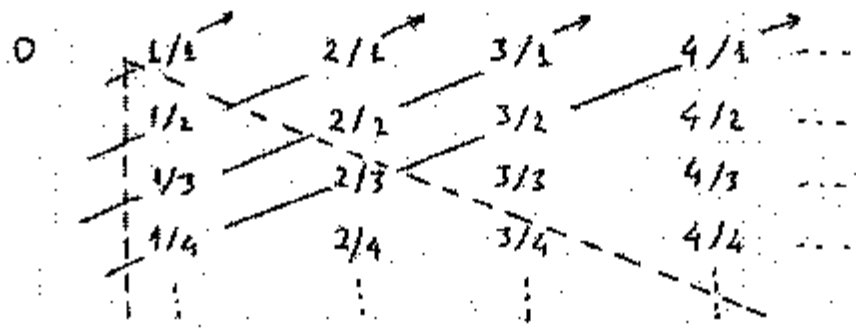
3.4. Ορισμός Ένα φραγμένο σύνολο $B \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται μετρήσιμο κατά Jordan αν το ∂B έχει μέτρο 0. Στην περίπτωση αυτή το ολοκλήρωμα $t(B) = \int_B 1$ λέγεται (n -διάστατος) περιεχόμενο ή όγκος του B .

3.5. Πρόταση Έστω $B \subset \mathbb{R}^n$ ένα Jordan μετρήσιμο σύνολο και $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Αν το σύνολο $D = \{x \in B : \eta \text{ f είναι συνεχής στο } x\}$ έχει μέτρο 0, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο B .

Απόδειξη Έστω I ένα παραλληλεπίπεδο με $B \subset I$. Τότε η συνάρτηση $f \cdot \chi_B: I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής το πολύ στα σημεία του συνόλου $D \cup \partial B$, που έχει μέτρο 0. Από το Θεώρημα 2.9, είναι λοιπόν ολοκληρώσιμη στο I ο.ε.δ.

Είναι ενδεχόμενο ένα φραγμένο ανοιχτό σύνολο A να μην είναι Jordan τετρίσιτο, οπότε το $\int_A f$ μπορεί να μην ορίζεται ακόμα και όταν f είναι συνεχής.

3.6 Παράδειγμα Εστω $\mathbb{Q} \cap (0,1) = \{q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$ όπως η αριθμηση γίνεται όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα.



Εστω $I_n = (q_n - \frac{1}{2^{n+2}}, q_n + \frac{1}{2^{n+2}})$, $n \in \mathbb{N}$ και $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Το A είναι ανοιχτό υποσύνολο του $(0,1)$ και $\partial A = [0,1] \setminus A$, αφού οι ριζοί είναι παντού πυκνοί στο $[0,1]$. Θα δείξουμε ότι το ∂A δεν έχει μέτρο 0, δηλαδή το A δεν είναι Jordan τετρίσιτο, με απώγαυη στο άνω. Επειδή το ∂A είναι εφιαγές αρκεί να δείξουμε ότι δεν έχει περιεχόμενο 0. Αν το ∂A είχε περιεχόμενο 0, θα μπορούσε να καλυφθεί από πεπερασμένα το πλήθος ανοιχτά διαστήματα J_1, \dots, J_k με $\sum_{i=1}^k l(J_i) < 1/4$. Επειδή $A \cup \partial A = [0,1]$ και

$$[0,1] = \left(\bigcup_{i=1}^k J_i \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right)$$

υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $[0,1] \subseteq J_1 \cup \dots \cup J_k \cup I_1 \cup \dots \cup I_{n_0}$, αφού το $[0,1]$ είναι εφιαγές. Τότε όμως έχουμε:

$$l \llcorner ([0,1]) \leq \sum_{i=1}^k l(J_i) + \sum_{n=1}^{n_0} l(I_n) \leq \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$

άτοπο!

Ετσι αν $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, τότε η $f \chi_A$ είναι ενδεχόμενο να είναι κ συνεχής ακριβώς στο ∂A , που δεν έχει μέτρο 0. Έπειτα $f \chi_A$ δεν θα είναι ολοκληρώσιμη στο A , σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε. Το συμπέρασμα αυτό γεννιέται υπερπυδίζεται με τον ορισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος για συναρτήσεις που ορίζονται σε ανοιχτά υποσύνολα του \mathbb{R}^n , που δεν είναι κατ' ανάγκη φραγμένα ή Jordan τετρίσιτα. Απαραίτητο εργαλείο για αυτό είναι η ύπαρξη διαμερίσεων της μονάδας για ανοιχτά καλύφματα.

4. Διακρίσεις της μονάδας

Στην παράγραφο αυτή θα κατασκευάσουμε C^∞ διακρίσεις της μονάδας για υποσύνολα του \mathbb{R}^n . Οι διακρίσεις της μονάδας αποτελούν βασικό εργαλείο στην Διαφορική Τοπολογία και ιδιαίτερα στην Θεωρία Δομολογίας. Κυρίως χρησιμοποιούνται για την σύνδεση δικών αντικειμένων (π.χ. συναρτήσεων) που καθ' αρχήν ορίζονται στον τοπικό. Επίσης πολλές φορές χρησιμοποιούνται για την αναγωγή δικών προβλημάτων σε τοπικά.

4.1. Λήμμα Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια C^∞ συνάρτηση $\varphi_\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]$ ώστε

$$\varphi_\varepsilon(x) = 1, \text{ για κάθε } \|x\| \leq \varepsilon, \text{ και}$$

$$\varphi_\varepsilon(x) = 0, \text{ για κάθε } \|x\| \geq 2\varepsilon$$

Απόδειξη Όπως είναι γνωστό, η συνάρτηση $\chi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t}} & , t > 0 \end{cases}$$

είναι C^∞ . Έστω και η συνάρτηση $\tilde{\chi}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$\tilde{\chi}(t) = \frac{\chi(4-t)}{\chi(4-t) + \chi(t-1)}$$

είναι C^∞ . Επιπλέον $\tilde{\chi}(t) = 1$, όταν $t \leq 1$ και $\tilde{\chi}(t) = 0$, όταν $t \geq 4$. Ορίζουμε τώρα την $\varphi_\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]$ με τύπο $\varphi_\varepsilon(x) = \tilde{\chi}(\|x\|^2/\varepsilon^2)$. Η φ_ε είναι C^∞ και από τις ιδιότητες της χ προκύπτει ότι $\varphi_\varepsilon(x) = 1$, όταν $\|x\| \leq \varepsilon$ και $\varphi_\varepsilon(x) = 0$, όταν $\|x\| \geq 2\varepsilon$.

4.2. Πρόταση Έστω $X \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές σύνολο και \mathcal{U} ένα κάλυμμα του X από ανοιχτά υποσύνολα του \mathbb{R}^n . Τότε υπάρχουν $V_1, \dots, V_k \in \mathcal{U}$ που καλύπτουν το X και C^∞ συναρτήσεις $\psi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]$, $1 \leq i \leq k$ ώστε:

(i) $\text{supp } \psi_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \psi_i(x) \neq 0\} \subset V_i$, $1 \leq i \leq k$ και

(ii) Υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$ με $X \subset U$ ώστε

$$\psi_1(x) + \dots + \psi_k(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in U.$$

Απόδειξη Για κάθε $x \in X$ υπάρχει ένα $V_x \in \mathcal{U}$ και $\varepsilon_x > 0$ ώστε $S(x, 2\varepsilon_x) \subset V_x$.

Επειδή το X είναι συμπαγές, υπάρχουν $x_1, \dots, x_k \in X$ ώστε $X \subset S(x_1, \varepsilon_{x_1}) \cup \dots \cup S(x_k, \varepsilon_{x_k})$.

Το σύνολο $U = S(x_1, \varepsilon_{x_1}) \cup \dots \cup S(x_k, \varepsilon_{x_k})$ είναι ανοιχτή περιοχή του X . Για κάθε

$1 \leq i \leq k$ ορίζεται η C^∞ συνάρτηση $\varphi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]$ με τύπο $\varphi_i(x) = \varphi_{\varepsilon_{x_i}}(x - x_i)$,

όπου $\varphi_{\varepsilon_k} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]$ είναι η C^∞ συνάρτηση που κατασκευάστηκε στο Λήμμα 4.1 και αντιστοιχεί στο $\varepsilon_k > 0$. Τότε $\varphi_i(x) = 1$, όταν $x \in S(x_i, \varepsilon_k)$, ενώ $\varphi_i(x) = 0$, όταν $\|x - x_i\| \geq 2\varepsilon_k$. Η συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]$ με τύπο

$$\varphi(x) = (1 - \varphi_1(x)) \dots (1 - \varphi_k(x))$$

είναι C^∞ και $\varphi(x) = 0$ για κάθε $x \in U$. Αν τώρα $V_i = V_{\varepsilon_k}$, $1 \leq i \leq k$, τότε $X \subset U \subset V_1 \cup \dots \cup V_k$. Θεωρούμε τις C^∞ συναρτήσεις $\psi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]$ με τύπους

$$\psi_i = \frac{\varphi_i}{\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_k}, \quad 1 \leq i \leq k$$

Αν $x \in \mathbb{R}^n - S(x_i, 2\varepsilon_k) \supset \mathbb{R}^n - V_i$, τότε $\psi_i(x) = 0$, αφού $\varphi_i(x) = 0$. Άρα $\text{supp } \psi_i \subset V_i$. Από την άλλη πλευρά, αν $x \in U$, τότε $\varphi(x) = 0$, οπότε

$$\psi_i(x) = \frac{\varphi_i(x)}{\varphi_1(x) + \dots + \varphi_k(x)}, \quad 1 \leq i \leq k$$

και λοιπά συνάγεται $\psi_1(x) + \dots + \psi_k(x) = 1$

4.3. Θεώρημα Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και \mathcal{U} ένα κάλυμμα του A από ανοιχτά υποσύνολα του. Τότε υπάρχει μια αριθμητική οικογένεια C^∞ συναρτήσεων $\Phi = \{\varphi : A \rightarrow [0,1]\}$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

- (i) κάθε $x \in A$ έχει μια ανοιχτή περιοχή V_x ώστε $\varphi|_{V_x} = 0$ για όλα τα $\varphi \in \Phi$ εκτός από πεπερασμένα το πλήθος.
- (ii) $\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) = 1$ για κάθε $x \in A$ (το άθροισμα είναι πεπερασμένο λόγω του (i)).
- (iii) για κάθε $\varphi \in \Phi$ υπάρχει κάποιο $V \in \mathcal{U}$ ώστε $\text{supp } \varphi \subset V$.

Απόδειξη Εστω $A_i = \{x \in A : \|x\| \leq i \text{ και } d(x, \partial A) \geq 1/i\}$, $i \in \mathbb{N}$, όπου $d(x, \partial A) = \inf \{\|x - y\| : y \in \partial A\}$. Τότε $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, κάθε A_i είναι συμπαγές και $A_i \subset A_{i+1}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ το $\mathcal{U}_i = \{V \cap (A_{i+1} - A_{i-2}) : V \in \mathcal{U}\}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του συμπαγούς συνόλου $X_i = A_i - A_{i-2}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.2 υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο C^∞ συναρτήσεων $\Phi_i = \{\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]\}$ με (α) για κάθε $\psi \in \Phi_i$ υπάρχει $W \in \mathcal{U}_i$ με $\text{supp } \psi \subset W$ και (β) υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή V_i του X_i ώστε $\sum_{\psi \in \Phi_i} \psi(x) = 1$ για κάθε $x \in V_i$. Για κάθε $x \in A$ δευτέρως

$$\psi(x) = \sum_{\substack{\psi \in \Phi_i \\ i \geq 3}} \psi(x)$$

Το άθροισμα είναι πεπερασμένο σε μια περιοχή του x , γιατί αν $x \in A_i$, τότε λόγω του (α) έχουμε $\psi_i(x) = 0$ για κάθε $\psi \in \Phi_j$ και $j \neq i+2$. Για κάθε $i \in \mathbb{Z}$ και $\psi \in \Phi_i$ ορίστε την συνάρτηση $\varphi: A \rightarrow [0,1]$ με τύπο

$$\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{\delta(x)}$$

Η φ είναι C^∞ και η οικογένεια Φ όλων των φ στις οριστικές είναι αριθμητική, αφού κάθε Φ_i είναι πεπερασμένη. Είναι προφανές ότι $\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) = 1$ για κάθε $x \in A$, ενώ τα (i) και (ii) προκύπτουν άμεσα από τις ιδιότητες των ψ .

4.4 Θεώρημα Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και U ένα κάλυμμα του A από ανοίχτα υποσύνολα του \mathbb{R}^n . Τότε υπάρχει μια αριθμητική οικογένεια C^∞ συναρτήσεων $\Phi = \{\varphi: U \rightarrow [0,1]\}_{\varphi \in \Phi}$ που ικανοποιεί τα (i), (ii) και (iii) του θεωρήματος 4.3.

Απόδειξη Το σύνολο $\bigcup_{V \in U} V$ είναι ανοιχτή περιοχή του A . Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.3 για το $\bigcup_{V \in U} V$ και το κάλυμμα U παίρνουμε το υπέρσπασμα.

Η οικογένεια Φ των προηγούμενων θεωρημάτων λέγεται C^∞ διαίρεση της μονάδας που υποκείται στο κάλυμμα U του A . Μια αξιοπρόσεκτη συνέπεια της ιδιότητας (ii) του θεωρήματος 4.3 είναι η ακόλουθη. Έστω $C \subset A$ ένα αθροισματικό σύνολο. Κάθε $x \in C$ έχει σύμφωνα με το (iii) για ανοιχτή περιοχή V_x ώστε $\varphi|_{V_x} = 0$, για όλα τα $\varphi \in \Phi$ εκτός από πεπερασμένα το πλήθος. Επειδή τα C είναι αθροισματικά, υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in C$ ώστε $C \subset V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}$. Συνεπώς $\varphi|_C = 0$ για όλα τα $\varphi \in \Phi$ εκτός από πεπερασμένα το πλήθος.

5. Γενικευμένα Διοκληρήματα

Στην παράγραφο αυτή θα χρησιμοποιηθούν τις διαίρεσεις της μονάδας για να ορίσουμε το γενικευμένο διοκληρέμα μιας συνάρτησης πάνω σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , που ενδεχομένως δεν είναι Jordan μετρήσιμο η ακέραιο και φραγμένο.

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια τοπικά φραγμένη συνάρτηση ώστε το σύνολο $D = \{x \in A: \eta \text{ } f \text{ είναι συνεχής στο } x\}$ έχει μέτρο 0. Ο άριστος τοπικά φραγμένη συνάρτηση ότι για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε $S(x, \delta_x) \subset A$ και $\eta \text{ } f|_{S(x, \delta_x)}$ είναι φραγμένη. Δηλαδή υπάρχει ένα

ανοιχτό κάλυμα \mathcal{U} του A από Jordan τετραγώνια υποσύνολα του ω με η fIV είναι φραγμένη για κάθε $V \in \mathcal{U}$. Έστω Φ μια αριθμητική διαμέριση της μονάδας υποκείμενη στο κάλυμα \mathcal{U} . Τότε για κάθε $\varphi \in \Phi$ το ολοκλήρωμα

$$\int_A \varphi |f| = \int_V \varphi |f|$$

υπάρχει, σύμφωνα με το παρίετα 3.5, όπου $\text{supp } \varphi \subset V$. Η f λέγεται γενικευμένο ολοκλήρωσιμο στο A αν η σειρά $\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi |f|$ σходимεί. Τότε βέβαια η $\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi f$ σходимεί απόλυτως και το όριο της λέγεται γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο A .

Σ.1. Λήμμα Ο προηγούμενος ορισμός του γενικευμένου ολοκληρώματος δεν εξαρτάται από το κάλυμα \mathcal{U} ούτε από την υποκείμενη διαμέριση της μονάδας Φ .

Απόδειξη Έστω Ψ μια διαμέριση της μονάδας υποκείμενη σε κάποιο άλλο ανοιχτό κάλυμα του A από Jordan τετραγώνια υποσύνολα του. Για κάθε $\varphi \in \Phi$ υπάρχει $V \in \mathcal{U}$ ώστε $\text{supp } \varphi \subset V$. Επειδή το V είναι φραγμένο και το $\text{supp } \varphi$ κλειστό, το $\text{supp } \varphi$ είναι συμπαγές. Συνεπώς $\Psi|_{\text{supp } (\varphi f)} \neq \emptyset$ που σημαίνει πεπερασμένα το πλήθος $\Psi \in \Psi$. Έτσι έχουμε:

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi f = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \left(\sum_{\psi \in \Psi} \psi \right) \varphi f = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \sum_{\psi \in \Psi} \psi \varphi f = \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\psi \in \Psi} \int_A \psi \varphi f$$

Το ίδιο ισχύει αν στην θέση της f θεωρήσουμε την $|f|$. Συνεπώς η σειρά

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\psi \in \Psi} \int_A \psi \varphi f$$

σходимεί απόλυτως. Για τον λόγο αυτό μπορούμε να αλλάξουμε την σειρά της άθροισης, οπότε έχουμε

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi f = \sum_{\psi \in \Psi} \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \psi \varphi f = \sum_{\psi \in \Psi} \int_A \psi f$$

και το ίδιο ισχύει και για την $|f|$ στην θέση της f . Κατά συνέπεια η $\sum_{\psi \in \Psi} \int_A \psi |f|$ σходимεί και $\sum_{\psi \in \Psi} \int_A \psi f = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi f$.

Σ.2 Πρόταση Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα φραγμένο ανοιχτό σύνολο και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Αν το $D = \{x \in A; \eta f \text{ είναι ασυμμετρής στο } x\}$ έχει μέτρο 0,

τότε υπάρχει το γενικευμένο άσκήματά της f στο A .

Απόδειξη Έστω $M > 0$ ένα φράγμα της f , δηλαδή $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$.

Επειδή το A είναι φραγμένο, περιέχεται στο εσωτερικό ενός παραλληλεπίπεδου I . Για κάθε πεπερασμένο σύνολο $F \subset \Phi$ έχουμε

$$\sum_{T \in F} \int_A \varphi |f| = \sum_{T \in F} \int_L \varphi |f| \cdot \chi_A \in \sum_{T \in F} M \int_1 \varphi \chi_A = M \int_L (\sum_{T \in F} \varphi) \chi_A \leq M \int_L 1 = M |L| \quad (1)$$

Αρα η σειρά $\sum_{T \in \Phi} \int_A \varphi |f|$ συγκλίνει και η f είναι γενικευμένο άσκήματά της.

Γινη συνέχεια θ αποδεικνύεται ότι το γενικευμένο άσκήματά μιας φραγμένης συναρτησης f είναι Jordan τετρήσιμο ανοιχτό σύνολο A παύεται με το $\int_A f$ όπως ορίζεται στη παράγραφο 3. Γιαντί θ χρειαζόμαστε το επόμενο

Σ. 3. Λήμμα Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα Jordan τετρήσιμο ανοιχτό σύνολο. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα Jordan τετρήσιμο υπάγατες σύνολο $K \subset A$ ώστε $\mu(A \setminus K) = \int_{A \setminus K} 1 < \varepsilon$.

Απόδειξη Έστω I ένα παραλληλεπίπεδο που περιέχει το A στο εσωτερικό του. Αφού το A είναι Jordan τετρήσιμο, υπάρχει μια διαίρεση P του I ώστε $U(\chi_A, P) - L(\chi_A, P) < \varepsilon$. Έστω $S = \{J \in P : J \subset A\}$. Επειδή το A είναι ανοιχτό, ελευθεύοντας αν κωρυφή των P , έχουμε $S \neq \emptyset$. Προφανώς $m_J = 1$, όταν $J \in S$ και $m_J = 0$, όταν $J \in P \setminus S$. Θετούμε $K = \bigcup_{J \in S} J$. Το K είναι Jordan τετρήσιμο υπάγατες υποσύνολο του A . Επιπλέον

$$L(\chi_A, P) = \sum_{J \in P} m_J \mu(J) = \sum_{J \in S} m_J \mu(J) = \sum_{J \in S} \mu(J) = \mu(K)$$

Αρα $U(\chi_A, P) - \mu(K) < \varepsilon$. Επειδή τώρα $\partial(A \setminus K) = \partial A \cup \partial K$ και

$\mu(\partial A) = \mu(\partial K) = 0$, το $A \setminus K$ είναι Jordan τετρήσιμο και

$$\begin{aligned} \mu(A \setminus K) &= \int_{A \setminus K} 1 = \int_I \chi_{A \setminus K} \in U(\chi_{A \setminus K}, P) = \sum_{J \in P \setminus S} M_J \mu(J) = \\ &= \sum_{J \in P} M_J \mu(J) - \sum_{J \in S} M_J \mu(J) = U(\chi_A, P) - \mu(K) < \varepsilon \end{aligned}$$

όπου το M_J αναφέρεται στην χ_A .

Σ. 4. Θεώρημα Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα Jordan τετρήσιμο ανοιχτό σύνολο και

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση ώστε το $D = \{x \in A : f \text{ είναι ασυνεχής στο } x\}$ έχει μέτρο 0. Αν \mathcal{U} είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του A από Jordan τετράγωνα υποσύνολα του, και Φ μια υποκείμενη διαμέριση της φοράδας, τότε

$$\int_A f = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi f$$

Απόδειξη Εστω $M > 0$ ένα φράγμα της f . Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα Jordan τετράγωνο επιπλέον σύνολο $K \subset A$ ώστε $\mu(A \setminus K) < \varepsilon/M$, από το Λήμμα 5.3. Υπάρχουν λοιπόν πεπερασμένα το πλήθος $\varphi \in \Phi$ με $\varphi|_K \neq 0$. Εστω $F \subset \bar{\Phi}$ ένα πεπερασμένο σύνολο που περιέχει κι αυτά τα φ . Τότε έχουμε:

$$\left| \int_A f - \sum_{\varphi \in F} \int_A \varphi f \right| \leq \int_A \left| f - \sum_{\varphi \in F} \varphi f \right| = \int_A |f| \left(1 - \sum_{\varphi \in F} \varphi \right) \leq$$

$$M \int_A \sum_{\varphi \in F^c} \varphi = M \int_{A \setminus K} \sum_{\varphi \in F^c} \varphi \leq M \int_{A \setminus K} 1 = M \mu(A \setminus K) < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \quad \text{ο.ε.π.}$$

Μεταφορικά λοιπόν στην συνέχεια να χρησιμοποιούμε τον ορισμό $\int_A f$ και να το γενικεύσουμε ολοκληρώματα της f πάνω στο A .

6. ΜΕΤΡΟ 0 και ΔΙΑΦΕΡΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε το εικονικό των συνόλων μέτρου 0 και Jordan τετράγωνο συνόλων από C^1 συναρτήσεις. Η βασική πρόταση που θα χρησιμοποιήσουμε είναι το θεώρημα της μέσης τιμής.

6.1. Πρόταση Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο, $C \subset A$ ένα κλειστό σύνολο και $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση. Αν υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|Df(x)\| \leq M$ για κάθε $x \in C$, τότε $\|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\|$ για κάθε $x, y \in C$.

Απόδειξη Εστω $x, y \in C$ και $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ με τύπο $\gamma(t) = tx + (1-t)y$.

Επειδή το C είναι κλειστό, $\gamma([0, 1]) \subset C$. Η συνάρτηση $f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη και από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$(f \circ \gamma)'(t) = Df(\gamma(t)) \cdot (x - y).$$

Από το θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει $\alpha \in]0, 1[$ ώστε $f(x) - f(y) = (f \circ \gamma)'(\alpha)$.

Άρα $\|f(x) - f(y)\| = \|Df(\gamma(\alpha)) \cdot (x - y)\| \leq \|Df(\gamma(\alpha))\| \|x - y\| \leq M \|x - y\|$.

THEOREM Für jede offene Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ existiert für jeden
 zusammenh. F Zusammenhang von A ein Weg γ

es $A = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} J$

(b) $J \subset A$ ist kein $J \in \mathcal{J}$

(c) $I \cap J \neq \emptyset \Rightarrow I = J$

Ansatz: Beschränke zu definieren $[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}]$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$.

0. A ist offen, daher, für $F_m = \{ [\frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1+1}{2^m}] \times \dots \times [\frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n+1}{2^m}] : k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z} \}$

konstruiere zu (a), (b), (c) $\forall x \in A$

1. Wähle zu F_m Intervalle J aus F_m die x enthalten und $J \cap I = \emptyset$.
 2. In A ist $J \cap I$ kein $J \in \mathcal{J}$ und $J \cap I \neq \emptyset \Rightarrow J \cap I = \emptyset$.

Daher $G_1 = \{ J \in F_1 : J \subset A \}$ und analog $G_m = \{ J \in F_m : J \subset A \}$ und
 $J \cap I \neq \emptyset \Rightarrow I \in G_1 \cup \dots \cup G_{m-1}$. T sei $T = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{J \in G_m} J$ und
 dann ist $T \subset A$. Aber es gilt $T = A$.

3. Sei $x \in A$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ und wähle $\delta > 0$: $(x_1 - \delta, x_1 + \delta) \times \dots \times (x_n - \delta, x_n + \delta) \subset A$.
 Wähle $m \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{2^m} < \delta$, dann $x_1 - \delta < x_1 - \frac{1}{2^m} < x_1 < x_1 + \frac{1}{2^m} < x_1 + \delta$.

Wähle $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ so $\frac{k_1}{2^m} < x_1 < \frac{k_1+1}{2^m}$ und

$J = [\frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1+1}{2^m}] \times \dots \times [\frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n+1}{2^m}]$, dann $x \in J \subset A$ und $J \cap I = \emptyset$.

4. Sei $N = \{ m \in \mathbb{N} : \exists J \in F_m \text{ mit } x \in J \subset A \}$. N ist nicht leer
 $m_0 = \min N$. Dann $\exists J \in F_{m_0}$ mit $x \in J \subset A$ und $J \cap I = \emptyset$ und
 $J \in F_{m_0}$ ist ein $J \in G_{m_0}$. Aber $x \in T$ ist.

~~Wähle $\epsilon > 0$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ ist offen und kompakt.~~

Lemma: Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und gegeben sei $\bar{A} \subset \mathbb{R}^n$ mit $\bar{A} \cap A = \emptyset$
 und $\forall \epsilon > 0 \exists$ U_1, \dots, U_n $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ und $\bar{U}_1 \cap \dots \cap \bar{U}_n \subset \bar{A}$

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. $\exists I_1, \dots, I_n$ $\bar{A} \subset \bigcup_{i=1}^n I_i$ und $\bar{I}_1 \cap \dots \cap \bar{I}_n \subset \bar{A}$
 und \bar{A} ist kompakt. Dann $A \cap \bar{I}_1 \cap \dots \cap \bar{I}_n = \emptyset$ und daher
 gibt es $\delta > 0$ so dass $A \cap \bar{I}_1 \cap \dots \cap \bar{I}_n \cap \bar{B}(x, \delta) = \emptyset$ für jedes $x \in A$.

Wähle $\delta > 0$ so dass $A \cap \bar{I}_1 \cap \dots \cap \bar{I}_n \cap \bar{B}(x, \delta) = \emptyset$ für jedes $x \in A$.
 Dann $\exists U_1, \dots, U_n$ $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ und $\bar{U}_1 \cap \dots \cap \bar{U}_n \subset \bar{A}$
 und $\bar{U}_1 \cap \dots \cap \bar{U}_n \cap \bar{B}(x, \delta) = \emptyset$ für jedes $x \in A$.

6.2. Πρόταση Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ μια C^1 συνάρτηση. Τότε για κάθε κλειστό συμπαγεί σύνολο $K \subset A$ υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\| \quad \text{για κάθε } x, y \in K$$

Για διαδοχικούς λόγους και όχι ανάστρος παρατηρούμε στο σύστημα αυτό ότι επειδή κάθε παραλληλεπίπεδο μπορεί να διαφεριστεί προσεγγιστικά σε κύβους, δηλαδή παραλληλεπίπεδα με κλειστές ακμές, στον ορίθο του τμήτου O η περιεχομένου O τα παραλληλεπίπεδα μπορούν να αντικατασταθούν ισοδύναμα από κύβους.

6.3. Θεώρημα Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f = (f_1, \dots, f_m): A \rightarrow \mathbb{R}^m$ μια C^1 συνάρτηση. Αν το σύνολο E έχει περιεχόμενο O και $\bar{E} \subset A$, τότε το $f(E)$ έχει περιεχόμενο O .

Απόδειξη Αφού το E έχει περιεχόμενο O , το ίδιο ισχύει και για το \bar{E} . Επειδή $f(E) \subset f(\bar{E})$, αρκεί να δείξουμε ότι το $f(\bar{E})$ έχει περιεχόμενο O . Επειδή το \bar{E} είναι συμπαγές, υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο H ώστε το \bar{H} να είναι συμπαγές και $\bar{E} \subset H \subset \bar{H} \subset A$. Επειδή τυχόν g ή f είναι C^1
 $M = \sup \{ \|Df(x)\| : x \in \bar{H} \} < +\infty$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν κύβους I_1, \dots, I_k ώστε $\bar{E} \subset I_1 \cup \dots \cup I_k$ με $\ell(I_1) + \dots + \ell(I_k) < \varepsilon$. Επειδή το \bar{E} είναι συμπαγές μπορούμε να υποθέσουμε ότι $I_i \subset H$, $\forall i \in k$. Τότε

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\| \quad \text{για κάθε } x, y \in I_i, \quad \forall i \in k$$

από το πρόταση 6.2. Αν a_i είναι το μήκος της ακμής του κύβου I_i , τότε

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M \sqrt{n} a_i \quad \text{για κάθε } x, y \in I_i, \quad \forall i \in k.$$

Αρκεί το $f(I_i)$ περιέχεται σε έναν κύβο J_i ακμής $M\sqrt{n} a_i$. Συνεπώς $f(\bar{E}) \subset f(I_1) \cup \dots \cup f(I_k) \subset J_1 \cup \dots \cup J_k$ και

$$\sum_{i=1}^k \ell(J_i) = \sum_{i=1}^k (M\sqrt{n} a_i)^n = (M\sqrt{n})^n \sum_{i=1}^k a_i^n = (M\sqrt{n})^n \sum_{i=1}^k \ell(I_i) < (M\sqrt{n})^n \varepsilon \text{ οσφ.}$$

6.4. Πρόταση Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια C^1 συνάρτηση.

Αν το E είναι ένα κλειστό σύνολο τμήτου O , τότε το $f(E)$ έχει τμήτο O .

6.5. Πρόταση Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \rightarrow f(A) \subset \mathbb{R}^n$ μια C^1 αμφιμόρφωση. Αν το $K \subset A$ είναι ένα συμπαγές, Jordan τμήτησιμο σύνολο, τότε το $f(K)$ είναι συμπαγές και Jordan τμήτησιμο.

Απόδειξη Επειδή η f είναι συνεχής, το $f(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του ανοιχτού

σύνολο $f(A)$. Επίσης, επειδή η $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ είναι συνεχής, $\partial f(K) = f(\partial K)$.
Από το Θεώρημα 6.3 έχουμε πάλι ότι το $f(\partial K)$ έχει περιεχόμενο 0, ο.ε.δ.

6.6. Πρόταση. Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ μια C^1 συνάρτηση. Αν η.κ.μ., τότε το $f(A)$ έχει μέτρο 0 στο \mathbb{R}^m .

Απόδειξη Υπάρχει μια ακολουθία επιπαγών υποσυνόλων $\{C_k: k \in \mathbb{N}\}$ του A ,
ώστε $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k$. Αφού $f(A) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f(C_k)$, αρκεί να δείξουμε, ότι το $f(C_k)$
έχει περιεχόμενο 0 στο \mathbb{R}^m για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε την συνάρτηση
 $F: A \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ με τύπο $F(x, y) = f(x)$. Επειδή η f είναι C^1 , το ίδιο είναι
και η F . Το επιπαγές σύνολο $H_k = C_k \times \{0\}$ έχει περιεχόμενο 0 στο \mathbb{R}^m ,
αφού το $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ έχει μέτρο 0 στο \mathbb{R}^m , επειδή η.κ.μ. Από το Θεώρημα 6.3
το $F(H_k) = f(C_k)$ έχει περιεχόμενο 0, ο.ε.δ.

Στη συνέχεια θ' αποδειχθεί μια ειδική περίπτωση του Θεωρήματος του
Sard, που είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στη Διφασική Τοπολογία. Θα χρειαστεί
σταθε το επόμενο:

6.7. Λήμμα Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ μια C^1 συνάρτηση.
Για κάθε επιπαγές, κλειστό σύνολο $K \subset A$ υπάρχει $\lambda = \lambda(K) \geq 0$ ώστε
$$\|f(x) - f(y) - Df(y)(x-y)\| \leq \lambda \|x-y\|$$
 για κάθε $x, y \in K$
και $\lim_{diam K \rightarrow 0} \lambda(K) = 0$.

Απόδειξη Για κάθε $x, y \in K$ έχουμε, αφού το K είναι κλειστό,
$$\|f(x) - f(y) - Df(y)(x-y)\| = \left\| \int_0^1 [f(y+t(x-y)) - Df(y)(x-y)]' dt \right\| =$$

$$\left\| \int_0^1 [Df(y+t(x-y))(x-y) - Df(y)(x-y)] dt \right\| \leq$$

$$\int_0^1 \| (Df(y+t(x-y)) - Df(y))(x-y) \| dt \leq$$

$$\int_0^1 \| Df(y+t(x-y)) - Df(y) \| \cdot \|x-y\| dt$$

Το σύνολο $[0, 1] \times K \times K$ είναι επιπαγές και επειδή η f είναι C^1 προκύπτει
ότι $\lambda = \lambda(K) = \sup \{ \|Df(y+t(x-y)) - Df(y)\| : 0 \leq t \leq 1, (x, y) \in K \times K \} < +\infty$.

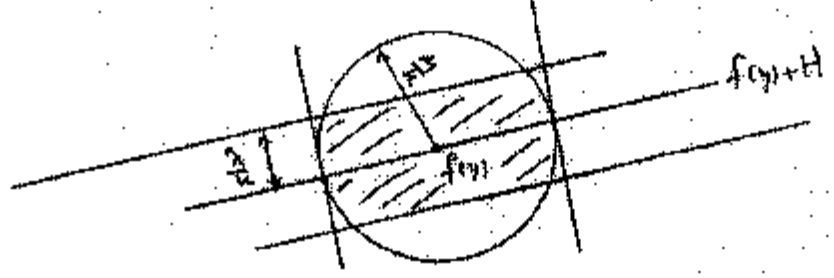
Από την συνέχεια της Df , έχουμε $\lim_{diam K \rightarrow 0} \lambda(K) = 0$. Επομένως
$$\|f(x) - f(y) - Df(y)(x-y)\| \leq \int_0^1 \lambda \|x-y\| dt = \lambda \|x-y\|$$

6.8. Θεώρημα (Sard) Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ μια
 C^1 συνάρτηση. Αν $C = \{x \in A : \det Df(x) = 0\}$, τότε το $f(C)$ έχει μέτρο 0.

Απόδειξη Επειδή το A είναι η αριθμητική ένωση παραλληλεπίπεδων που περιέχονται

στο A , αρκεί να δείξουμε ότι το $f(C \cap I)$ είναι συνολο μέτρου 0 για κάθε παραλληλόγραφο $I \subset A$. Επειδή το I είναι εστιασμένο και κλειστό, υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\|$ για κάθε $x, y \in I$. Άρα $f(x) \in \overline{S(f(y), M \|x - y\|)}$. Εστω $y \in C \cap I$. Αφού $\det Df(y) = 0$, η γραμμική απεικόνιση $Df(y): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ δεν είναι επί. Υπάρχει λοιπόν ένας υποχώρος $H \in \mathbb{R}^n$ με $\dim H = n-1$ ώστε $\text{Im } Df(y) \subseteq H \in \mathbb{R}^n$.

Εστω τώρα κέντρο \mathcal{D} του I και θεωρούμε μια διαμέτρηση P του I με $|P| \geq \frac{1}{2} \text{diam } I$ και $\text{diam } J < \frac{1}{k}$ για $J \in P$, οπότε $|f(J)| < \frac{1}{k^n}$. Εστω $y \in C \cap I \cap J$, για κάθε $x \in J$ έχουμε τότε $\|x - y\| < \frac{1}{2k}$ και συνεπώς από το Λήμμα 6.7 $\|f(x) - f(y) - H\| \leq \|f(x) - f(y) - Df(y)(x - y)\| \leq \lambda(J) \|x - y\| < \lambda(J) \frac{1}{2k}$, ενώ $\|f(x) - f(y)\| < \frac{M}{k}$. Άρα $f(x) \in \overline{S(f(y), \frac{M}{k})} \cap \overline{S(f(y) + H, \frac{1}{2k})}$, που περιέχεται σε ένα κομμάτι με ύψος $2 \frac{1}{k}$ και με ακτίνα βάσης $2 \frac{M}{k}$, δηλαδή όγκου $2^n \frac{M^{n-1}}{k^n}$. Άρα το $f(J)$ περιέχεται σε ένα κομμάτι όγκου $2^n \frac{M^{n-1}}{k^n} \lambda(J)$.



Το λ μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση του $\frac{1}{k}$, αφού $\text{diam } J < \frac{1}{k}$ για κάθε $J \in P$ και $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda(\frac{1}{k}) = 0$. Έχουμε τώρα $f(C \cap I) \subset \bigcup \{f(J) : J \in P, J \cap C \neq \emptyset\}$ και συνεπώς το $f(C \cap I)$ περιέχεται στην ένωση C_k του ποσού k^n κομματιών όγκου $2^n \frac{M^{n-1}}{k^n} \lambda(\frac{1}{k})$ το καθένα, δηλαδή συνολικού όγκου το πολύ $2^n M^{n-1} \lambda(\frac{1}{k})$. Έτσι έχουμε $f(C \cap I) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$ και $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(C_k) = 0$, αφού $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda(\frac{1}{k}) = 0$. Από αυτό προκύπτει ότι $\mu(f(C \cap I)) = 0$.

7. Ο τύπος αλλαγής της μεταβλητής κατά την ολοκλήρωση

Ενταυ παραγράφο αυτή θα αποδείξουμε τον τύπο αλλαγής της μεταβλητής κατά την πολλαπλή ολοκλήρωση που αποτελεί γενίκευση του τύπου αλλαγής μεταβλητής για μονοδιάστατα ολοκληρώματα. Αν $a < b$, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία C^1 συνάρτηση και $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση τότε

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g)' g'$$

Παρατηρείται ότι F είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f , τότε $(F \circ g)' = (F' \circ g) g' = (f \circ g) g'$, από τον κανόνα της αλυσίδας. Άρα

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_a^b (f \circ g) g'$$

Αν επιπλέον η g είναι 1-1, τότε είναι γινόμενο αυτών και γινόμενα φθίνουσα.

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $g' > 0$ και $g([a, b]) = [g(a), g(b)]$. Τότε

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g) g' = \int_a^b (f \circ g) |g'| = \int_{[a, b]} (f \circ g) |g'|$$

Στην δεύτερη περίπτωση, $g' < 0$ και $g([a, b]) = [g(b), g(a)]$. Άρα

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_{g(b)}^{g(a)} f = - \int_{g(b)}^{g(a)} f = - \int_a^b (f \circ g) g' = \int_a^b (f \circ g) (-g') = \int_{[a, b]} (f \circ g) |g'|$$

Ο παραπάνω τύπος γενικεύεται για πολλαπλά ολοκληρώματα. Η γενίκευση αυτή όμως είναι τόσο τετριμένη, όπως στην μονοδιάστατη περίπτωση.

7.1. Θεώρημα Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο, $g: A \rightarrow g(A) \subset \mathbb{R}^n$ μια C^1 αμφιδιαφύγιση και $f: g(A) \rightarrow \mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνεκτική συνάρτηση. Τότε

$$\int_{g(A)} f = \int_A (f \circ g) |\det Dg|$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 7.1 θα γίνει σε μια σειρά από βήματα. Στην αρχή θα μελετήσουμε την μεταβολή του όγκου από γραμμικούς μετασχηματισμούς. Θα χρειαστούμε την παρακάτω αλγεβρική προτάση.

7.2. Πρόταση, Κάθε γραμμικός ισομορφισμός $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι σύνθεση γραμμικών ισομορφισμών των παρακάτω τύπων:

- (1) $g_\lambda^i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$, $\lambda \neq 0$
- (2) $g_{ij}^+(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)$
- (3) $\tau_i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \dots, x_n)$

Απόδειξη Θα εστιάσουμε ελαφρώς στο $n=2$ και $n=1$, κάθε γραμμικός ισομορφισμός είναι του τύπου (1). Έστω ότι το ελαττωθέντα ισχύει στην διάσταση $n-1$ και

$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός με πίνακα $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, δηλαδή

$$g(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \right).$$

Επειδή $\det A \neq 0$, συνδέοντας οι ανάλυση με αντιστοιχίες των τύπων (3), μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\det (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-1} \neq 0$. Από την υπόθεση της επαγωγής το σύστημα (1) έχει για τον γνήσιο ισομορφισμό $h: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ με τύπο

$$h(x_1, \dots, x_{n-1}) = \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{1j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-1,j} x_j \right)$$

Ενώπιον το σύστημα (1) έχει και για τον ισομορφισμό $h': \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ με τύπο

$$h'(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{1j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-1,j} x_j, x_n \right)$$

Προκύπτει ότι το σύστημα (1) έχει και για τον ισομορφισμό $h'': \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ με τύπο

$$h''(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{n-1,j} x_j, x_n \right)$$

Άρα να δείξουμε τώρα ότι υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} x_j \right) + \lambda_n x_n \quad \text{για κάθε } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Έχουμε όμως

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) + \lambda_n x_n = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_{ij} \right) x_j + \left(\lambda_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_{in} \right) x_n$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ώστε

$$a_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_{ij}, \quad 1 \leq j \leq n-1 \quad \text{και} \quad a_{in} = \lambda_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_{in}$$

Όπως πριν $\det (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-1} \neq 0$, το σύστημα των $n-1$ πρώτων εξισώσεων με αγνώστους τα $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ έχει αμέτρητες λύσεις, οπότε αντιλαμβάνοντας στην τελευταία έχουμε το λ_n ή τυχόν αναδείχθηκε.

7.3. Πρόταση Κάθε γραμμικός ισομορφισμός $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι σύνθεση των ισομορφισμών με τύπους

$$\pi(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \lambda \neq 0$$

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n)$$

$$\tau_i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + k_i x_{i+1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad |k_i| \leq 1$$

7.4. Λήμμα. Έστω $T \in \mathbb{R}^n$ ένας τετραγωνικός πίνακας Jordan με $\mu(T) = \lambda$ και $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ένας γραμμικός ισομορφισμός. Τότε $\mu(g(T)) = |\det g| \mu(T)$.

Απόδειξη Έστω J, K δύο αντιστρέψιμοι τετραγωνικοί πίνακες στο \mathbb{R}^n ώστε $T \in J$ και $g(T) \in K$. Τότε να δείξουμε ότι $\int_K \chi_{g(T)} = |\det g| \int_J \chi_T$. Επειδή χ_T και g είναι $t-1$ και έτσι, έχουμε $\chi_{g(T)} = \chi_{g(T)} \circ g$. Από το πρόταση 7.1 η g είναι σύνθεση απεικονίσεων π, α, τ_i , ισόσημ. Επειδή η σειρά των τ_i συνθέσεων γραμμικών απεικονίσεων είναι το γινόμενο των αντιστρέψιμων απεικονίσεων, αρκεί να αποδείξουμε

το αντίστοιχο $g = \pi$, α ή τ . Προσέχουμε ότι $\det \pi = \lambda$, $\det \alpha = 1$ και $\det \tau = -1$.

(i) Έστω ότι $g = \pi$. Παιρνουμε $J = [-b, b] \times \dots \times [-b, b]$, $K = [-\lambda b, \lambda b] \times \dots \times [-b, b]$, ώστε το $b > 0$ είναι αρκετά μεγάλο για να έχουμε $I \subset J$ και $g(I) \subset K$. Από τα δύο αλληλανά της ηεωρήματα για μονοδιάστατα ολοκληρώματα και το θεώρημα του Fubini έχουμε:

$$|\lambda| \int_J \chi_{g(I)} \circ \pi = |\lambda| \int_{-b}^b \left(\dots \left(\int_{-b}^b \chi_{\pi(I)}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \right) \dots \right) dx_1 =$$

$$|\lambda| \int_{-b}^b \left(\dots \left(\int_{-\lambda b}^{\lambda b} \chi_{\pi(I)}(x_1, \dots, x_n) \frac{1}{\lambda} dx_n \right) \dots \right) dx_1 = \int_K \chi_{\pi(I)}$$

(ii) Αν $g = \alpha$, δέχουμε $b < c$ και παίρνουμε $J = [-c, c] \times [-b, b] \times \dots \times [-b, b]$, $K = [-c+b, c-b] \times [-b, b] \times \dots \times [-b, b]$, ώστε $I \subset J$, $g(I) \subset K$. Τότε

$$\int_J \chi_{g(I)} \circ \alpha = \int_{-b}^b \left(\dots \left(\int_{-c}^c \chi_{\alpha(I)}(x_1+x_2, x_2, \dots, x_n) dx_n \right) \dots \right) dx_1 =$$

$$\int_{-b}^b \left(\dots \left(\int_{-c+x_2}^{c+x_2} \chi_{\alpha(I)}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \right) \dots \right) dx_1 =$$

$$\int_{-b}^b \left(\dots \left(\int_{-c+b}^{c-b} \chi_{\alpha(I)}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \right) \dots \right) dx_1 = \int_K \chi_{\alpha(I)}$$

γιατί αν $-b \leq x_2 \leq b$, τότε $[-c+b, c-b] \subset [-c+x_2, c+x_2]$

(iii) Έστω τέλος ότι $g = \tau$, Παιρνουμε $J = K = [-b, b] \times \dots \times [-b, b]$, $b > 0$, ώστε $I, g(I) \subset J$. Τότε

$$\int_J \chi_{g(I)} \circ \tau = \int_{-b}^b \left(\dots \left(\int_{-b}^b \chi_{\tau(I)}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) dx_n \right) dx_{n-1} \dots \right) dx_1 =$$

$$\int_{-b}^b \left(\dots \left(\int_{-b}^b \chi_{\tau(I)}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_{n-1} \right) dx_n \right) dx_1 = \int_J \chi_{\tau(I)}$$

αφού από το Πρόβλημα 1.8 η σειρά ολοκλήρωσης μπορεί να αλλάξει.

Επιπλέον συνεχώς επιβολίζουμε το C_r του κύβου I με κέντρο το $0 \in \mathbb{R}^n$ και ακτίνα $r > 0$, δηλαδή $C_r = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_j| \leq r/2, 1 \leq j \leq n\}$. Ο κύβος I με κέντρο το σημείο $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και ακτίνα $r > 0$ είναι λοιπόν το σύνολο $C_r(x_0) = \{x_0 + x : x \in C_r\}$.

7.5. Λήμμα. Έστω $U, V \subset \mathbb{R}^n$ δύο ανοιχτά σύνολα που περιέχουν το $0 \in \mathbb{R}^n$ και

$g = (g_1, \dots, g_n) : U \rightarrow V$ για C^1 αμφιδιαφορίσιμη με $g(0) = 0$ και $Dg(0) = I_n$.

Εστω $r > 0$ ώστε $C_r \subset U$. Αν $0 < \delta < 1$ τότε

$$\|Dg(x) - I_n\| < \delta/n^2 \text{ για κάθε } x \in C_r,$$

τότε $C_{r(1-\delta)} \subset g(C_r) \subset C_{r(1+\delta)}$.

Απόδειξη Εστω $h = (h_1, \dots, h_n) = g - Id$. Τότε $\frac{1}{n} |\partial_i h_j(x)| \leq \|Dh(x)\| < \delta/n^2$ για κάθε $x \in C_r$ και $1 \leq i, j \leq n$. Από το θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχουν $0 < \theta_j < 1$, $1 \leq j \leq n$ ώστε

$$h_j(x) = Dh_j(\theta_j, x) \cdot x = \sum_{i=1}^n \partial_i h_j(\theta_j, x) \cdot x_i$$

όπου $x = (x_1, \dots, x_n)$. Άρα

$$|h_j(x)| \leq \sum_{i=1}^n |\partial_i h_j(\theta_j, x)| |x_i| < \sum_{i=1}^n \frac{\delta}{n} \cdot |x_i| < n \cdot \frac{\delta}{n} (r/2) = \delta r/2$$

για κάθε $x \in C_r$, $1 \leq j \leq n$. Έτσι έχουμε

$$|g_j(x)| = |g_j(x) - x_j + x_j| \leq |h_j(x)| + |x_j| < (\delta r + r)/2 = \frac{r}{2}(1 + \delta)$$

για κάθε $x \in C_r$ και $1 \leq j \leq n$, που δείχνει ότι $g(C_r) \subset C_{r(1+\delta)}$.

Εστω τώρα ότι $x \in \partial C_r$, δηλαδή $|x_j| = r/2$ για κάποιο $1 \leq j \leq n$. Τότε

$$|g_j(x)| = |g_j(x) - x_j + x_j| \geq |x_j| - |h_j(x)| > \frac{r}{2} - \delta r = \frac{r(1-\delta)}{2}. \text{ Αυτό δείχνει}$$

ότι $g(\partial C_r) \cap C_{r(1-\delta)} = \emptyset$. Άρα $\emptyset \neq g(C_r) \cap C_{r(1-\delta)}$ έχουμε λοιπόν

$$\emptyset \neq g(C_r) \cap C_{r(1-\delta)} = g(C_r^\circ) \cap C_{r(1-\delta)}. \text{ Θα δείξουμε ότι } C_{r(1-\delta)} \subset g(C_r)$$

με απευθείας στο αντίστροφο. Εστω ότι υπάρχει $y \in C_{r(1-\delta)} \cap (\mathbb{R}^n \setminus g(C_r))$.

Θεωρούμε το σύνολο $T = \{t \in [0, 1] : ty \in g(C_r) \cap C_{r(1-\delta)}\}$ που είναι υποσύνολο

κλειστό, ενώ ο $\emptyset \neq T$. Εστω $t_0 = \sup T$. Τότε $t_0 \in T$, αφού το T

είναι κλειστό και συνεπώς $t_0 < 1$. Συνεπώς, $t_0 y \in C_{r(1-\delta)} \cap g(C_r^\circ)$,

που είναι ανοικτό σύνολο, αφού η g είναι C^1 αμφιδιαφορίσιμη. Έτσι, υπάρχει

$\rho > 0$ ώστε $S(t_0 y, \rho) \subset C_{r(1-\delta)} \cap g(C_r^\circ)$. Οπότε τότε $(t_0, t_0 + \rho/\|y\|) \subset T$, που

είναι αντίφαση. ο.ε.δ.

7.6. Πρόταση Εστω $U, V \subset \mathbb{R}^n$ δύο ανοικτά σύνολα που περιέχουν το 0 και

$g : U \rightarrow V$ για C^1 αμφιδιαφορίσιμη με $g(0) = 0$. Εστω $M = \|Dg^2(0)\|$ και

$r > 0$ ώστε $C_r \subset U$. Αν $0 < \delta < 1$ είναι τέτοιο ώστε για κάθε $x \in C_r$

να ισχύει $\|Dg(x) - Dg(0)\| < \delta/n^2 M$, τότε

$$Dg(0)(C_{r(1-\delta)}) \subset g(C_r) \subset Dg(0)(C_{r(1+\delta)})$$

Απόδειξη Θεωρούμε την συνάρτηση $\tilde{g} = Dg(0) \circ g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Η \tilde{g} ικανοποιεί

της υποθέσει της Πρότασης 7.5, αφού $D\tilde{g}(0) = Dg'(0) = Dg(0) = I_n$ και $\|D\tilde{g}(x) - I_n\| = \|D\tilde{g}'(0)(Dg(x) - Dg(0))\| \leq \|D\tilde{g}'(0)\| \|Dg(x) - Dg(0)\| < M \cdot \frac{\delta}{n^2 M} < \frac{\delta}{n^2}$ για κάθε $x \in C_r$. Συνεπώς

$$C_{r(n-\delta)} \subset \tilde{g}^{-1}(C_r) \subset C_{r(n+\delta)}, \text{ οπότε}$$

$$Dg(0)(C_{r(n-\delta)}) \subset g(C_r) \subset Dg(0)(C_{r(n+\delta)}) \text{ οπότε}$$

7.7. Πρόταση Έστω $U, V \subset \mathbb{R}^n$ δύο ανοικτά σύνολα και $g: U \rightarrow V$ για C^1 αμφιστοφαιρία. Έστω $x_0 \in U$ και $M = \|D\tilde{g}'(x_0)\|$. Αν $r > 0$ στα ώστε $C_r(x_0) \subset U$ και το $0 < \delta < 1$ είναι τέτοιο ώστε για κάθε $x \in C_r(x_0)$ να ισχύει $\|Dg(x) - Dg(x_0)\| < \delta/n^2 M$, τότε

$$Dg(x_0)(C_{r(n-\delta)}) \subset g(C_r(x_0)) - \delta B_n \subset Dg(x_0)(C_{r(n+\delta)})$$

Απόδειξη θεωρούμε την C^1 αμφιστοφαιρία με τύπο $\tilde{g}(x) = g(x_0 + x) - g(x_0)$ που ορίζεται σε ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει τον κύβο C_r . Η \tilde{g} ικανοποιεί τις υποθέσεις της πρότασης 7.6 και εφαρμόζοντας της έχουμε το συμπέρασμα.

7.8. Θεώρημα Έστω $U, V \subset \mathbb{R}^n$ δύο ανοικτά σύνολα και $g: U \rightarrow V$ για C^1 αμφιστοφαιρία. Έστω $K \subset V$ ένα συμπαγές, Jordan περιβάσιμο σύνολο και $f: g(K) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς ομαλή συνάρτηση. Τότε

$$\int_{g(K)} f = \int_K (f \circ g) \cdot |\det Dg|$$

Απόδειξη Επειδή $f = f^+ - f^-$, όπου $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ και $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f \geq 0$. Υπάρχει ένα συμπαγές σύνολο Λ με $K \subset \Lambda \subset U$. Θετούμε

$$M_0 = \sup \{ |f(x)| : x \in g(K) \}$$

$$M = \sup \{ \|D\tilde{g}'(x)\| : x \in g(\Lambda) \} \text{ και}$$

$$C = \sup \{ |\det Dg(x)| : x \in \Lambda \}$$

Έστω $0 < \delta < 1$. Βλέπουμε η g είναι C^1 και το K συμπαγές, η Dg είναι ομομορφισμός συνεχώς στο K . Άρα υπάρχει $r > 0$ ώστε

$$x, y \in K \text{ και } \|x - y\| \leq r \sqrt{n} \implies \|Dg(x) - Dg(y)\| < \delta/n^2 M$$

Έστω $I \subset \mathbb{R}^n$ ένας κύβος που περιέχει το K στο εσωτερικό του και P μια διαμέριση του I σε κύβους με $\text{diam } J \leq r$ για κάθε $J \in P$, τότε άπαικ

ωστε για κάποιο $\delta < \epsilon$ υπάρχει $K \subset \bigcup_{J \in S} J^* \subset U \subset \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$m_J = \min \{ (f \circ g)(x) : x \in J \} = \min \{ f(z) : z \in g(J) \}$$

$$M_J = \max \{ (f \circ g)(x) : x \in J \} = \max \{ f(z) : z \in g(J) \}, \quad J \in S$$

Εστω x_J το κέντρο του κυβού J . Τότε από το Λήμμα 7.4 και το Πόρισμα 7.7 έχουμε:

$$\sum_{J \in S} m_J (1-\delta)^n |\det Dg(x_J)| |I(J)| \leq \sum_{J \in S} m_J |g(J)| \leq \int f \leq \sum_{J \in S} M_J |g(J)| \leq \sum_{J \in S} M_J (1+\delta)^n |\det Dg(x_J)| |I(J)|$$

και τυοφωρως

$$\sum_{J \in S} m_J (1-\delta)^n |\det Dg(x_J)| |I(J)| \leq \sum_{J \in S} (f \circ g)(x_J) |\det Dg(x_J)| |I(J)| \leq \sum_{J \in S} M_J (1+\delta)^n |\det Dg(x_J)| |I(J)|$$

Εχουμε τμηα

$$\sum_{J \in S} M_J (1+\delta)^n |\det Dg(x_J)| |I(J)| - \sum_{J \in S} m_J (1-\delta)^n |\det Dg(x_J)| |I(J)| =$$

$$\sum_{J \in S} [M_J (1+\delta)^n - m_J (1-\delta)^n] |\det Dg(x_J)| |I(J)| =$$

$$\sum_{J \in S} (M_J - m_J) (1+\delta)^n |\det Dg(x_J)| |I(J)| + \sum_{J \in S} m_J [(1+\delta)^n - (1-\delta)^n] |\det Dg(x_J)| |I(J)| =$$

$$(1+\delta)^n \sum_{J \in S} (M_J - m_J) |\det Dg(x_J)| |I(J)| + [(1+\delta)^n - (1-\delta)^n] \sum_{J \in S} m_J |\det Dg(x_J)| |I(J)| \leq$$

$$2^n \cdot c \sum_{J \in S} (M_J - m_J) |I(J)| + [(1+\delta)^n - (1-\delta)^n] c \cdot M_0 |I(I)|$$

Για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να διαλέξουμε το διάστημα P του I και $0 < \delta < 1$ ωστε

(i) $2^n \cdot c \sum_{J \in S} (M_J - m_J) |I(J)| < \frac{\epsilon}{4}$, αφού η $f \circ g$ είναι δυνάμωσιμη στο I ,

(ii) $[(1+\delta)^n - (1-\delta)^n] c \cdot M_0 |I(I)| < \frac{\epsilon}{4}$ και

(iii) $|\int_K (f \circ g) \cdot |\det Dg| - \sum_{J \in S} (f \circ g)(x_J) |\det Dg(x_J)| |I(J)|| < \epsilon/2$

Τότε έχουμε από τις (i), (ii)

$$\left| \int_{g(K)} f - \sum_{J \in S} (f \circ g)(x_J) |\det Dg(x_J)| |I(J)| \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

και από τις (iii) $\left| \int_{g(K)} f - \int_K (f \circ g) \cdot |\det Dg| \right| < \epsilon \quad 0 < \delta$

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.1. Υπάρχει μια οικογένεια \mathcal{U} από παραλληλεπίπεδα που περιέχονται στο A , ώστε το $\{I^0 : I \in \mathcal{U}\}$ να είναι ανοιχτό κάλυψο του A . Τότε το $\{g(I^0) : I \in \mathcal{U}\}$ είναι ανοιχτό κάλυψο του $g(A)$, αφού g είναι C^1 αμφιστοχαστική. Έστω Φ μια αριθμητική διαφύλαξη της μονάδας υποκείμενη σ' αυτό το κάλυψο του $g(A)$. Αν $\varphi \in \Phi$ και $\text{supp } \varphi \subset g(I^0)$, τότε επειδή g είναι 1-1 έχουμε $(\varphi \circ f) \circ g(x) = 0$, όταν $x \notin I$. Άρα $\text{supp}((\varphi \circ f) \circ g) \subset I$. Από το Θεώρημα 7.8 έχουμε τότε

$$\int_{g(I)} \varphi f = \int_I ((\varphi \circ f) \circ g) |\det Dg| \quad \text{για κάθε } I \in \mathcal{U},$$

το οποίο γράφεται
$$\int_{g(A)} \varphi f = \int_A ((\varphi \circ f) \circ g) |\det Dg|$$

λόγω των προηγούμενων. Άρα

$$\begin{aligned} \int_{g(A)} f &= \sum_{\varphi \in \Phi} \int_{g(A)} \varphi f = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A [(\varphi \circ f) \circ g] |\det Dg| \\ &= \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A (\varphi \circ g) \cdot (f \circ g) |\det Dg| = \int_A (f \circ g) |\det Dg| \quad \text{ο.ε.δ.} \end{aligned}$$

Συχνά στην πράξη g είναι C^1 αμφιστοχαστική, έστω από ένα συνδυασμό με περιεχόμενο 0. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι ο μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες. Για να καλύψουμε και αυτή την περίπτωση θα γενικεύσουμε το Θεώρημα 7.8.

7.9. Λήμμα Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $g: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια C^1 σφαιρική. Αν το $K \subset A$ είναι σφαιρικό σύνολο ώστε η $g|_K$ να είναι C^1 αμφιστοχαστική, τότε $Dg(K^0), Dg(K) \in g(\partial K)$. Συνεπώς, αν το K είναι Jordan τετραγώνιο, τότε και τα $g(K^0), g(K)$ είναι Jordan τετραγώνια.

Απόδειξη Πρώτα το K είναι σφαιρικό, έχουμε $Dg(K^0) \subset \overline{g(K^0)} \subset g(K)$. Έστω $y \in Dg(K^0)$. Τότε υπάρχει $x \in K$ ώστε $g(x) = y$. Άρα x βρίσκεται σε ∂K . Αν $x \notin \partial K$, τότε $x \in K^0$ και συνεπώς έχει μια ανοιχτή περιοχή V ώστε $V \subset K^0$. Επειδή $g|_K$ είναι C^1 αμφιστοχαστική, το $g(V)$ είναι ανοιχτή περιοχή του y και $g(V) \subset g(K^0)$. Συνεπώς $y \in g(K^0)$ που είναι άτοπο,

γιατι το $g(k^0)$ είναι αναχτο αφεν η $g|_{k^0}$ είναι C^1 κτηδιαφοριση, αφο δειχεται οτι $\partial g|_{k^0} \subset g(\partial k)$ και ομοιω εχουμε $\partial g|_{k^1} \subset g(\partial k)$.

7.10. Θεωρημα Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ενα αναχτο σύνολο και $g: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια C^1 συναρτηση. Εστω $K \subset A$ ενα συμπαγες, Jordan τετραηχο σύνολο, ωστε η $g|_{K^0}$ να είναι C^1 κτηδιαφοριση, δηλαδη η $g|_{K^0}$ είναι 1-1 και $\det Dg(x) \neq 0$ για καθε $x \in K^0$. Τότε για καθε συνεχη συναρτηση $f: g(K) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχυει

$$\int_{g(K)} f = \int_K (f \circ g) |\det Dg|$$

Απόδειξη Απο το Λημμα 7.9 τα $g|_{K^1}$, $g|_{K^2}$ είναι Jordan τετραηχο και πεβανα $g|_{K^1} = g|_{K^0} \cup g|_{\partial K}$. Επειδη τα ∂k , $g(\partial k)$ εχων περιεχομενο 0, απο το Θεωρημα 7.1 εχουμε:

$$\int_{g(K)} f = \int_{g(K^0)} f = \int_{K^0} (f \circ g) |\det Dg| = \int_K (f \circ g) |\det Dg|.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $f: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & , \text{ όταν } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & , \text{ όταν } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Να δείχθει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int f = \frac{1}{2}$

2. Έστω $f: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & , \text{ όταν } 0 \leq x \leq y \text{ είναι αρρητός} \\ \frac{1}{q} & , \text{ όταν } 0 \leq x \in \mathbb{Q} \text{ και } y \leq \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

και να δείχθει ότι $\int f = 0$ και $\int_0^1 f(x,y) dy = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

(β) Να δείχθει ότι το $\int_0^1 f(x,y) dx$ δεν υπάρχει, όταν $0 \leq y$ είναι ρητός.

3. Έστω $a < b$ και $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

(α) Αν $a < x_1 < \dots < x_n < b$, δείξτε ότι $\sum_{i=1}^n 0(f, x_i) < f(b) - f(a)$.

(β) Έστω $\epsilon > 0$, και $I = \{x \in [a,b] : 0(f, x) > \epsilon\}$. Να αποδειχθεί ότι το I είναι πεπερασμένο σύνολο.

(γ) Να αποδειχθεί ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

4. Έστω $I \subset \mathbb{R}^n$ ένα παραλληλεπίπεδο και $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ πραγματικές συναρτήσεις ώστε το $D = \{x \in I : f(x) \neq g(x)\}$ έχει περιεχόμενο 0. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη να δείχθει ότι και η g είναι ολοκληρώσιμη.

5. Έστω $I \subset \mathbb{R}^n$ ένα παραλληλεπίπεδο και $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη και μη-αφής συνάρτηση. Αν $\int_I f = 0$, να δείχθει ότι το σύνολο

$D = \{x \in I : f(x) \neq 0\}$ έχει μέτρο 0.

6. Έστω $I \subset \mathbb{R}^n$ ένα παραλληλεπίπεδο. Να αποδειχθεί ότι το πλάτος μιας συνεχούς συνάρτησης $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ έχει περιεχόμενο 0 στο \mathbb{R}^{n+1} .

7. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα σύνολο με περιεχόμενο 0. Δείξτε τότε ότι το \bar{A} έχει περιεχόμενο 0. Δείξτε επίσης π' ένα παράδειγμα, ότι αυτό δεν ισχύει για φραγμένα σύνολα μετρού 0.

8. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα σύνολο περιεχόμενου 0. Δείξτε ότι κάθε φραγμένη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int_A f = 0$.

9. Έστω M μια n -πλάκωτη στο \mathbb{R}^k . Αν $k > n$, δείξτε ότι η M έχει μέτρο 0 στο \mathbb{R}^k .

10. Έστω $I \subset \mathbb{R}^n$ ένα παραλληλεπίπεδο και $\varphi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συνεχώς
συναρτησείς ώστε $\psi(x) \leq \varphi(x)$ για κάθε $x \in I$. Έστω

$$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in I \text{ και } \psi(x) \leq y \leq \varphi(x) \}$$

και $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς συναρτησής.

(α) Να αποδειχθεί ότι η συναρτησής $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y) dy$
είναι συνεχής.

(β) Να αποδειχθεί ότι $\int_B f = \int_I g = \int_I \left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y) dy \right) dx$.

11. Έστω $A, B \subset \mathbb{R}^n$ δύο Jordan τετρήσιμα σύνολα.

(α) Δείξτε ότι τα $A \cup B, A \cap B$ και $A \setminus B$ είναι Jordan τετρήσιμα.

(β) Δείξτε ότι $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ και $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$.

12. Να αποδειχθεί ότι κάθε επιπέδου n -πολλαπλότυπο με όριο στο \mathbb{R}^n
είναι Jordan τετρήσιμο σύνολο.

12. Έστω $\{C_k : k \in \mathbb{N}\}$ μια ακολουθία επιπέδων, Jordan τετρήσιμων
υποσυνόλων του \mathbb{R}^n , ώστε $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(C_k) = 0$. Αν $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$ είναι ένα
επίπεδο σύνολο, δείξτε ότι $\mu(C) = 0$.

13. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα Jordan τετρήσιμο σύνολο ώστε $A = B \cup \Gamma$, όπου τα
 $B, \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ είναι Jordan τετρήσιμα και $B \cap \Gamma = \emptyset$. Αν η $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι
διακλυσιμότητα, τότε η f είναι διακλυσιμότητα στα B, Γ και

$$\int_A f = \int_B f + \int_{\Gamma} f$$

14. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα Jordan τετρήσιμο σύνολο και $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ δύο
διακλυσιμότητας συναρτησείς ώστε $g \geq 0$. Αν $m = \inf f(A), M = \sup f(A)$,
τότε υπάρχει $m \leq \lambda \leq M$ ώστε

$$\int_A f \cdot g = \lambda \int_A g$$

15. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα Jordan τετρήσιμο σύνολο. Να αποδειχθεί ότι το A^o
είναι Jordan τετρήσιμο σύνολο και $\mu(A) = \mu(A^o)$.

16. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα Jordan τετρήσιμο σύνολο. Να αποδειχθεί ότι για
κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα επιπέδου, Jordan τετρήσιμο σύνολο $K \subset A$ ώστε
 $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$.

17. Έστω $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα και $P = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : 0 \leq \lambda_i \leq 1, 1 \leq i \leq n\}$ το πλάγιο παραλληλεπίπεδο που παράγουν. Να αποδειχθεί ότι $\mu(P) = \det(v_1, \dots, v_n)$, όπου (v_1, \dots, v_n) είναι ο κνη πίνακας με στήλες τις συντεταγμένες των v_1, \dots, v_n .

18. Έστω $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια ευκλείδεια ισομετρία, δηλαδή $d(g(x), g(y)) = d(x, y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$, όπου d είναι η ευκλείδεια απόσταση. Να αποδειχθεί ότι $\mu(g(K)) = \mu(K)$ για κάθε επιπαρά, Jordan μετρήσιμο σύνολο K .

19. Να αποδειχθεί ότι ο όγκος του υποσυνόλου του \mathbb{R}^2 που περιλείεται από το οριζόντιο επίπεδο, τον κώνο με ελλειπτική βάση $(x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1$ και το γραφικό της συνάρτησης $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}$$

όπου $a, b, p, q > 0$, είναι ίσος με $\frac{1}{2} \pi a b \left(\frac{a^2}{p^2} + \frac{b^2}{q^2} \right)$.

20. Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ μια C^∞ συνάρτηση με $\text{supp } \varphi \subset \text{int } D^n$ και $\int_{D^n} \varphi = 1$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την συνάρτηση $f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f_k(x) = \int_{D^n} f\left(x + \frac{y}{k}\right) \varphi(y) dy$$

Να αποδειχθεί ότι η f_k είναι C^∞ συνάρτηση για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $f_k \rightarrow f$ ομοιόμορφα στα επιπαρά υποσύνολα του \mathbb{R}^n .

21. Έστω $\Delta_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \dots + x_n \leq 1, 0 \leq x_i \leq 1, 1 \leq i \leq n\}$. Να αποδειχθεί ότι $\mu(\Delta_n) = \frac{1}{n!}$ (Υπόδειξη: θεωρούμε την συνάρτηση $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ με τύπο $g(x_1, \dots, x_n) = (1-x_1) x_1 (1-x_2) \dots x_{n-1} (1-x_n)$).

22. Έστω $a < b$ και $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια θετική, συνεχής συνάρτηση. Το στερεό που παράγεται από την περιστροφή του γραφήματος της f γύρω από τον άξονα των x είναι το σύνολο

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x) \text{ και } a \leq x \leq b\}.$$

Να αποδειχθεί ότι $\mu(A) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$.

(Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε κωνικές συντεταγμένες ως προς τον άξονα των x και το εμβαδόν της Αόκνης 10).

IV. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

1. ΤΑΥΝΟΥΣΤΕΣ

Εστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διαστάσεως n επί του \mathbb{R} .
Μια συνάρτηση $\varphi: V^k \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $V^k = V \times \dots \times V$ k -φορές, $k \in \mathbb{N}$, λέγεται
πλειογραμμική αν είναι γραμμική ως προς καθένα μεταβλητό ξεχωριστά.
Μια πλειογραμμική απεικόνιση $\varphi: V^k \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνήθως (συνάλλοιται)
ταύνοση k -τάξης ή απλά k -ταύνοση. Το σύνολο όλων των k -ταύνοσών
επί του V συμβολίζεται με $J^k(V)$ και γίνεται διανυσματικός χώρος επί
του \mathbb{R} κατά τον προφανή τρόπο. Θετουμε $J^0(V) = \mathbb{R}$ και $J(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} J^k(V)$.
Παρατηρούμε ότι ο $J^1(V) = V^*$ είναι ο δούκος του V .

Επί το $J(V)$ ορίζεται ένα γινόμενο που το κάνει αλγεβρά επί του \mathbb{R} .
Αν $\varphi \in J^k(V)$ και $\psi \in J^l(V)$, τότε το ταύνοσικό γινόμενο $\varphi \otimes \psi$ είναι
ο $(k+l)$ -ταύνοση που ορίζεται από τον τύπο

$$(\varphi \otimes \psi)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = \varphi(v_1, \dots, v_k) \cdot \psi(v_{k+1}, \dots, v_{k+l})$$

Αν $\lambda \in \mathbb{R} = J^0(V)$, τότε ορίζουμε $\lambda \otimes \varphi = \lambda \varphi$ και $\varphi \otimes \lambda = \lambda \varphi$. Όπως
φάνεται από τον ορισμό, εν γένει $\varphi \otimes \psi \neq \psi \otimes \varphi$.

1.1. Λημμα Αν $\varphi, \varphi_1 \in J^k(V)$, $\psi, \psi_1 \in J^l(V)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi \in J^m(V)$, τότε

$$(a) (\varphi_1 + \varphi_2) \otimes \psi = \varphi_1 \otimes \psi + \varphi_2 \otimes \psi$$

$$(b) \varphi \otimes (\psi_1 + \psi_2) = \varphi \otimes \psi_1 + \varphi \otimes \psi_2$$

$$(c) (\lambda \varphi) \otimes \psi = \varphi \otimes (\lambda \psi) = \lambda (\varphi \otimes \psi)$$

$$(d) (\varphi \otimes \psi) \otimes \chi = \varphi \otimes (\psi \otimes \chi)$$

Η απόδειξη είναι άμεση από τον ορισμό.

1.2. Θεώρημα Εστω $\{v_1, \dots, v_n\}$ μια βάση του V και $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ η αντίστοιχη
βάση του $V^* = J^1(V)$. Τότε το $\{v_{i_1}^* \otimes \dots \otimes v_{i_k}^* : i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}\}$ είναι
βάση του $J^k(V)$ και συνεπώς $\dim J^k(V) = n^k$.

Απόδειξη Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι

$$v_{i_1}^* \otimes \dots \otimes v_{i_k}^* (v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) = \begin{cases} 0 & , (i_1, \dots, i_k) \neq (j_1, \dots, j_k) \\ 1 & , (i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_k) \end{cases}$$

Αν τώρα $w_1, \dots, w_k \in V$, υπάρχουν $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n$ ώστε

$w_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} v_j$, $1 \leq i \leq k$, οπότε $v_j^*(w_i) = \alpha_{ij}$ για κάθε $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n$.
 Για κάθε $\varphi \in J^k(V)$ έχουμε τώρα

$$\begin{aligned} \varphi(w_1, \dots, w_k) &= \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n \alpha_{1j_1} \dots \alpha_{kj_k} \varphi(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n (v_{j_1}^* \otimes \dots \otimes v_{j_k}^*)(w_1, \dots, w_k) \cdot \varphi(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) \end{aligned}$$

Άρα $\varphi = \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n \varphi(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) \cdot v_{j_1}^* \otimes \dots \otimes v_{j_k}^*$. Αυτό δείχνει ότι το $\{v_{j_1}^* \otimes \dots \otimes v_{j_k}^* : 1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n\}$ παράγει τον $J^k(V)$. Αν τώρα $\lambda_{i_1, \dots, i_k} \in \mathbb{R}$ ώστε $\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \lambda_{i_1, \dots, i_k} v_{i_1}^* \otimes \dots \otimes v_{i_k}^* = 0$

τότε για κάθε $1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n$ έχουμε

$$0 = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \lambda_{i_1, \dots, i_k} v_{i_1}^* \otimes \dots \otimes v_{i_k}^*(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) = \lambda_{j_1, \dots, j_k}$$

Αυτό δείχνει ότι οι $v_{i_1}^* \otimes \dots \otimes v_{i_k}^*$, $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Αν $f: V \rightarrow W$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε επιλέγεται μια γραμμική απεικόνιση $f^*: J^k(W) \rightarrow J^k(V)$ με τύπο

$$(f^* \varphi)(v_1, \dots, v_k) = \varphi(f(v_1), \dots, f(v_k))$$

για κάθε $\varphi \in J^k(W)$ και $v_1, \dots, v_k \in V$. Ο τανυστής $f^* \varphi$ λέγεται pull back του φ μέσω της f . Είναι προφανές ότι ο $f^*: J^k(W) \rightarrow J^k(V)$ είναι ομομορφικός αλγεβρών, δηλαδή $f^*(\varphi \otimes \psi) = f^* \varphi \otimes f^* \psi$.

Ένας από τους σημαντικότερους τανυστές στο \mathbb{R}^n είναι η επίτρουσα. Η συνάρτηση $\det: (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $\det(v_1, \dots, v_n)$ είναι η επίτρουσα του πίνακα με στήλες της συντεταγμένες των v_1, \dots, v_n είναι ένας n -τανυστής. Μία από τις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν την επίτρουσα είναι η αντισυμμετρικότητα, δηλαδή η εναλλαγή δύο στήλων επιφέρει το αντίθετο του προβλήου. Γενικεύοντας την έννοια της επίτρουσας, ονομάζουμε έναν k -τανυστή ω στο V αντισυμμετρικό αν

$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

για κάθε $v_1, \dots, v_k \in V$.

Το σύνολο $\Lambda^k(V)$ των αντισυμμετρικών k -τανυστών του V είναι γραμμικός υπόχωρος του $J^k(V)$.

Ορίζεται τότε η γραμμική απεικόνιση $\mathcal{A}: \mathcal{J}^k(V) \rightarrow \mathcal{J}^k(V)$ με τύπο

$$\mathcal{A}\varphi(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} (\text{sgn } \pi) \varphi(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)})$$

όπου S_k είναι η ομάδα των μεταθέσεων σε k στοιχεία και $\text{sgn } \pi$ είναι το πρόσημο της μεταθέσεως π .

1.3 Πρόταση. Η γραμμική απεικόνιση \mathcal{A} έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) $\mathcal{A}(\mathcal{J}^k(V)) = \Lambda^k(V)$

(β) Αν $\omega \in \Lambda^k(V)$, τότε $\mathcal{A}\omega = \omega$

(γ) $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$

Απόδειξη. (α) Έστω $\sigma = (i, j)$, δηλαδή σ είναι η μεταθέση των $\{1, \dots, k\}$ που αντipevθεται τα i, j και αφήνει τα υπόλοιπα αναταγμένα. Τότε για κάθε $\varphi \in \mathcal{J}^k(V)$ έχουμε:

$$\mathcal{A}\varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} (\text{sgn } \pi) \varphi(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(i)}, \dots, v_{\pi(j)}, \dots, v_{\pi(k)}) =$$

$$\frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} (\text{sgn } \pi) \cdot \varphi(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(\sigma(i))}, \dots, v_{\pi(\sigma(j))}, \dots, v_{\pi(\sigma(k))}) =$$

$$\frac{1}{k!} \sum_{\pi \circ \sigma \in S_k} -(\text{sgn } (\pi \circ \sigma)) \cdot \varphi(v_{\pi \circ \sigma(1)}, \dots, v_{\pi \circ \sigma(i)}, \dots, v_{\pi \circ \sigma(j)}, \dots, v_{\pi \circ \sigma(k)}) =$$

$$-\mathcal{A}\varphi(v_1, \dots, v_k). \text{ Άρα } \mathcal{A}\varphi \in \Lambda^k(V).$$

(β) Αν $\omega \in \Lambda^k$, τότε επί ορισμού $\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = -\omega(v_1, \dots, v_k) = (\text{sgn } \sigma) \omega(v_1, \dots, v_k)$, όπου $\sigma = (i, j)$. Κάθε μεταθέση $\pi \in S_k$ είναι το γινόμενο αντipevθσεων όπως η σ . Συνεπώς $\omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) = (\text{sgn } \pi) \cdot \omega(v_1, \dots, v_k)$ για κάθε $\pi \in S_k$. Άρα

$$\mathcal{A}\omega(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} (\text{sgn } \pi) \cdot (\text{sgn } \pi) \omega(v_1, \dots, v_k) = \omega(v_1, \dots, v_k), \text{ αφού } |S_k| = k!$$

Το (γ) προκύπτει απευθείας από τα (α), (β).

Ο υπόχωρος $\Lambda(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(V)$ του $\mathcal{J}(V)$, όπου $\Lambda^0(V) = \mathcal{J}^0(V) = \mathbb{R}$, δεν είναι κλειστός ως προς την πράξη του τανυστικού γινομένου. Αν $\omega \in \Lambda^k(V)$ και $\theta \in \Lambda^l(V)$ τότε το εξωτερικό γινόμενο $\omega \wedge \theta$ είναι ο ανασυμμετρικός $(k+l)$ -τανυστής με τύπο

$$\omega \wedge \theta = \frac{(k, \lambda)!}{k! \lambda!} \mathcal{A}(\omega \otimes \theta)$$

1.4. Λήμμα Αν $\omega, \omega_i \in \Lambda^k(V)$, $\theta, \theta_i \in \Lambda^\lambda(V)$, $i=1,2$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

(α) $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \theta = \omega_1 \wedge \theta + \omega_2 \wedge \theta$

(β) $\omega \wedge (\theta_1 + \theta_2) = \omega \wedge \theta_1 + \omega \wedge \theta_2$

(γ) $(\lambda \omega) \wedge \theta = \omega \wedge (\lambda \theta) = \lambda(\omega \wedge \theta)$

(δ) $\omega \wedge \theta = (-1)^{k\lambda} \theta \wedge \omega$

Απόδειξη Τα (α), (β) και (γ) είναι προφανή. Όσο αφορά το (δ) έχουμε:

$$\mathcal{A}(\omega \otimes \theta)(v_1, \dots, v_{k+\lambda}) = \frac{1}{(k+\lambda)!} \sum_{\pi \in S_{k+\lambda}} (\text{sgn } \pi) \omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \cdot \theta(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+\lambda)})$$

Θεωρούμε την μεταθέση $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \lambda & \lambda+1 & \dots & \lambda+k \\ k+1 & k+2 & \dots & k+\lambda & 1 & \dots & k \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ \dots \ \lambda+k)^k$,

οπότε $\sigma = ((1 \ \lambda+k) \dots (1 \ 2))^k$. Άρα $\text{sgn } \sigma = ((-1)^{\lambda+k-1})^k = (-1)^{k\lambda}$. Έχουμε

$$\mathcal{A}(\omega \otimes \theta)(v_1, \dots, v_{k+\lambda}) = \frac{1}{(k+\lambda)!} \sum_{\pi \in S_{k+\lambda}} (\text{sgn } \pi) \omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \cdot \theta(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+\lambda)}) =$$

$$(-1)^{k\lambda} \frac{1}{(k+\lambda)!} \sum_{\pi \in S_{k+\lambda}} (\text{sgn } \pi \circ \sigma) \cdot \theta(v_{\pi \circ \sigma(1)}, \dots, v_{\pi \circ \sigma(k)}) \cdot \omega(v_{\pi \circ \sigma(k+1)}, \dots, v_{\pi \circ \sigma(k+\lambda)}) =$$

$$(-1)^{k\lambda} \mathcal{A}(\theta \otimes \omega), \text{ που αποδεικνύει το (δ)}$$

Από το (δ) του προηγούμενου λήμματος 1.4 προκύπτει ότι $\omega \wedge \omega = 0$ για κάθε $\omega \in \Lambda^k(V) = V^*$. Αν $f: V \rightarrow W$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε προφανώς $f^*(\Lambda^k(W)) \subset \Lambda^k(V)$. Είναι εύκολο αφ'εξου από τους φαστικούς ότι $f^* \circ \mathcal{A} = \mathcal{A} \circ f^*$. Προκύπτει λοιπόν ότι $f^*(\omega \wedge \theta) = f^* \omega \wedge f^* \theta$ για κάθε $\omega, \theta \in \Lambda(W)$.

1.5. Πρόταση Αν $\varphi \in \mathcal{J}^k(V)$, $\psi \in \mathcal{J}^\lambda(V)$ και $\mathcal{A}\varphi = 0$, τότε

$$\mathcal{A}(\varphi \otimes \psi) = \mathcal{A}(\psi \otimes \varphi) = 0$$

Απόδειξη Από τον ορισμό του \mathcal{A} έχουμε

$$\mathcal{A}(\varphi \otimes \psi)(v_1, \dots, v_{k+\lambda}) = \frac{1}{(k+\lambda)!} \sum_{\pi \in S_{k+\lambda}} (\text{sgn } \pi) \cdot \varphi(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \cdot \psi(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+\lambda)})$$

Το σύνολο $G = \{\pi \in S_{k+\lambda} : \eta \text{ π κφίνοι ανάλοιστα τα } k+1, \dots, k+\lambda\}$ είναι υποσύνολο της

S_{k+1} ισόμορφη με την S_k . Έστω H το σύνολο των δεικτών αμειωμένων της G στην S_{k+1} . Τότε η S_{k+1} είναι η ζώνη ένωση των στοιχείων του H . Κάθε στοιχείο του H είναι της μορφής $G \cdot \sigma$ για κάποιο $\sigma \in S_{k+1}$. Ειδικά για $\sigma = 1$ παίρνουμε την G . Έχουμε τώρα

$$\sum_{\pi \in G} (\text{sgn } \pi) \varphi(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \cdot \psi(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}) =$$

$$\left(\sum_{\pi \in S_k} (\text{sgn } \pi) \cdot \varphi(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \right) \cdot \psi(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) =$$

$$k! \mathcal{A} \varphi(v_1, \dots, v_k) \cdot \psi(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = 0$$

Εστω τώρα ότι $\sigma \notin G$. Θέτουμε $v_{\sigma(i)} = w_i$, $1 \leq i \leq k+l$, οπότε έχουμε:

$$\sum_{\pi \in G \cdot \sigma} (\text{sgn } \pi) \varphi(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \psi(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}) =$$

$$\sum_{\pi \in G} (\text{sgn } \pi) \cdot \varphi(v_{\pi \circ \sigma^{-1}(1)}, \dots, v_{\pi \circ \sigma^{-1}(k)}) \psi(v_{\pi \circ \sigma^{-1}(k+1)}, \dots, v_{\pi \circ \sigma^{-1}(k+l)}) =$$

$$(\text{sgn } \sigma) \sum_{\pi \in G} (\text{sgn } \pi \circ \sigma^{-1}) \cdot \varphi(w_{\pi \circ \sigma^{-1}(1)}, \dots, w_{\pi \circ \sigma^{-1}(k)}) \psi(w_{\pi \circ \sigma^{-1}(k+1)}, \dots, w_{\pi \circ \sigma^{-1}(k+l)}) = 0$$

οπως δείξαμε προηγουμένως. Αυτό αποδεικνύει ότι $\mathcal{A}(\varphi \otimes \psi) = 0$, και ομοίως αποδεικνύεται ότι $\mathcal{A}(\psi \otimes \varphi) = 0$.

1.6. Πόρισμα. Αν $\omega \in \Lambda^k(V)$, $\theta \in \Lambda^l(V)$ και $\eta \in \Lambda^h(V)$, τότε

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}(\omega \otimes \theta) \otimes \eta) = \mathcal{A}(\omega \otimes \mathcal{A}(\theta \otimes \eta)) = \mathcal{A}(\omega \otimes \theta \otimes \eta)$$

Απόδειξη. Από $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\theta \otimes \eta) - \theta \otimes \eta) = \mathcal{A}(\theta \otimes \eta) - \mathcal{A}(\theta \otimes \eta) = 0$, από την Πρόταση 1.5 έχουμε

$$0 = \mathcal{A}(\omega \otimes (\mathcal{A}(\theta \otimes \eta) - \theta \otimes \eta)) = \mathcal{A}(\omega \otimes \mathcal{A}(\theta \otimes \eta)) - \mathcal{A}(\omega \otimes \theta \otimes \eta) \quad \text{o.e.s.}$$

1.7. Πόρισμα. Αν $\omega \in \Lambda^k(V)$, $\theta \in \Lambda^l(V)$ και $\eta \in \Lambda^h(V)$, τότε

$$(\omega \wedge \theta) \wedge \eta = \omega \wedge (\theta \wedge \eta) = \frac{(k+l+h)!}{k! l! h!} \mathcal{A}(\omega \otimes \theta \otimes \eta)$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$(\omega \wedge \theta) \wedge \eta = \frac{(k+l+h)!}{(k+l)! h!} \mathcal{A}((\omega \wedge \theta) \otimes \eta) = \frac{(k+l+h)!}{(k+l)! h!} \cdot \frac{(k+l)!}{k! l!} \mathcal{A}(\mathcal{A}(\omega \otimes \theta) \otimes \eta) =$$

$\frac{(k+l+h)!}{k! l! h!} \mathcal{A}(\omega \otimes \theta \otimes \eta)$, από το πόρισμα 1.6. Ομοίως αποδεικνύεται και η δεύτερη ισότητα.

Στη συνέχεια μπορούμε λοιπόν να γράψουμε σωστά αντί (ωλθ)η, το αντίστοιχο του θεωρήματος 1.2 για το $\Lambda^k(V)$ είναι το ακόλουθο

1.8. Θεώρημα (α) Αν $k > n = \dim V$, τότε $\Lambda^k(V) = 0$

(β) Αν οξέειν, $\{v_1, \dots, v_n\}$ είναι μια βάση του V με συντηρημένη βάση $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ του $\Lambda^1(V) = V^*$, τότε το $\{v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^* : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ είναι βάση του $\Lambda^k(V)$ και συνεπώς $\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}$.

Απόδειξη (α) Αν $k > n$ και $\omega \in \Lambda^k(V)$, τότε για οποιαδήποτε βασικά διανύσματα v_1, \dots, v_k ταυτοχρόνως δύο από αυτά ταυτίζονται και συνεπώς $\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$, αφού η ω είναι αντισυμμετρική. Αρα $\omega = 0$.

(β) Εστω οξέειν. Αρα $\mathcal{A}(\mathcal{J}^k(V)) = \Lambda^k(V)$, η εικόνα της βάσης του $\mathcal{J}^k(V)$ παράγει τον $\Lambda^k(V)$. Οτι από το πρόταση 1.7 προκύπτει με επαγωγή ότι $k!$ $\mathcal{A}(v_{i_1}^* \otimes \dots \otimes v_{i_k}^*) = v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^*$. Αν μεταθέσουμε την σειρά των διανυσμάτων, τότε, το πρόσημο παραμένει το ίδιο με τη θέση τους την αλλαγή του προσήμου. Αρα το $\{v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^* : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ παράγει τον $\Lambda^k(V)$. Από την άλλη πλευρά αν $\lambda_{i_1, \dots, i_k} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ ώστε

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1, \dots, i_k} v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^* = 0$$

τότε για κάθε $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ έχουμε:

$$0 = \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1, \dots, i_k} v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^* \right) (v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) =$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1, \dots, i_k} k! \mathcal{A}(v_{i_1}^* \otimes \dots \otimes v_{i_k}^*) (v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) =$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1, \dots, i_k} k! \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} (\text{sgn } \pi) \cdot v_{i_1}^*(v_{j_{\pi(1)}}) \dots v_{i_k}^*(v_{j_{\pi(k)}}) = \lambda_{j_1, \dots, j_k}$$

Αρα τα $v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_k}^*$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ως

ιδιαιτερό ενδιαφέρον παρουσιάζει ο $\Lambda^1(V)$, όταν $n = \dim V$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.8, $\dim \Lambda^1(V) = \binom{n}{1} = 1$. Ένα 1 - 1 -βενικο στοιχείο του $\Lambda^1(V)$ είναι προφανώς η αντίστοιχη \det ζωντας κάθε 1 - 1 -βενικο στοιχείο του $\Lambda^1(V)$ είναι 1 - 1 -βενικο πλάγιο γινόμενο της αντίστοιχης.

1.9. Θεώρημα Έστω $\{v_1, \dots, v_n\}$ μια βάση του V και $\omega \in \Lambda^n(V)$. Αν

$$w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \text{τότε}$$

$$\omega(w_1, \dots, w_n) = \omega(v_1, \dots, v_n) \cdot \det(a_{ij})$$

Απόδειξη Έχουμε, $\omega(w_1, \dots, w_n) = \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^n a_{1j_1} \dots a_{nj_n} \omega(v_{j_1}, \dots, v_{j_n}) =$

$$\sum_{\pi \in S_n} a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)} \omega(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(n)}) = \sum_{\pi \in S_n} (\text{sgn } \pi) a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)} \omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(v_1, \dots, v_n) \cdot \det(a_{ij}).$$

Αν $\Lambda(V) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(V)$, τότε η αντιστοιχία αλγεβράς $\Lambda(V)$ λέγεται εξωτερική άλγεβρα του V .

1.10. Παράδειγμα Έστω $\{e_1, e_2, e_3\}$ η κανονική βάση του \mathbb{R}^3 και $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$

η δυϊκή της βάση του $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$. Για κάθε $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ υπάρχουν μοναδικά αριθμοί $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ ώστε $\omega = a_1 e_1^* + a_2 e_2^* + a_3 e_3^*$ και η απεικόνιση

$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ με $\varphi(a_1, a_2, a_3) = a_1 e_1^* + a_2 e_2^* + a_3 e_3^*$ είναι ισομορφισμός.

Επίσης για κάθε $\theta \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ υπάρχουν $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\theta = \beta_1 e_1^* \wedge e_2^* + \beta_2 e_2^* \wedge e_3^* + \beta_3 e_1^* \wedge e_3^*$$

και η απεικόνιση $\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ με $\psi(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \theta$ είναι ισομορφισμός.

Τέλος, η απεικόνιση $\mu: \mathbb{R} \rightarrow \Lambda^3(\mathbb{R}^3)$ με $\mu(\alpha) = \alpha \cdot e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*$ είναι

ισομορφισμός. Αν τότε $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$ και $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ τότε

$$\varphi(\alpha) \wedge \psi(\beta) = \mu(\alpha \times \beta)$$

όπου $\alpha \times \beta$ είναι το διανυσματικό (ή "εξωτερικό") γινόμενο των α, β .

Επίσης, $\varphi(\alpha) \wedge \psi(\beta) = \mu(\langle \alpha, \beta \rangle)$. Έτσι έχουμε μια παράσταση

της εξωτερικής άλγεβρας του \mathbb{R}^3 μέσω διανυσμάτων, όπου το εξωτερικό

γινόμενο L-τάνυσμας παριστάται από το διανυσματικό γινόμενο διανυσμάτων,

και το εξωτερικό γινόμενο ενός L-τάνυσμα μ ενός αντισυμμετρικού 2-τάνυσμα

παριστάται από το (ευκλείδειο) εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

2. Διανυσματικά πεδία και διαφορικές μορφές στον ευκλείδειο χώρο.

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο. Για κάθε $x \in A$, το σύνολο

$T_x A = \{x\} \times \mathbb{R}^n$ γίνεται κατά φυσικό τρόπο διανυσματικός χώρος, ορίζοντας

$$(x, u) + (x, v) = (x, u+v) \quad \text{και} \quad \lambda(x, u) = (x, \lambda u), \quad u, v \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Το $T_x A$ εφοδιασμένο με αυτή την δομή διανυσματικού χώρου λέγεται εφαπτόμενος χώρος του A στο σημείο x και τα στοιχεία του εμβολίζονται συνήθως με $v(x) = (x, v)$. Παρατηρούμε ότι $TA = \bigcup_{x \in A} \{x\} \times T_x A = A \times \mathbb{R}^n$.

Ένα διανυσματικό πεδίο στο A είναι μια συνάρτηση $\zeta: A \rightarrow TA$ ώστε $\zeta(x) \in T_x A$ για κάθε $x \in A$. Το ζ λέγεται C^r , $0 \leq r \leq \infty$, αν είναι C^r συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι για κάθε διανυσματικό πεδίο ζ στο A υπάρχει μια μονοσήμαντα ορισμένη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ώστε $\zeta(x) = (x, f(x))$ για κάθε $x \in A$. Το ζ είναι C^r τότε και μόνο τότε αν η f είναι C^r συνάρτηση. Η f λέγεται κρίσιμη (critical part) του ζ .

Όλες οι πράξεις που μπορούν να οριστούν στο \mathbb{R}^n (π.χ. εσωτερικό γινόμενο) μπορούν να μεταφερθούν στο $T_x A$ για κάθε $x \in A$. Έτσι στο σύνολο των διανυσματικών πεδίων του A ορίζονται κατά σημείο όλες οι πράξεις που μπορούν να οριστούν μεταξύ διανυσμάτων.

Για κάθε $x \in A$ ορίζεται ο χώρος $\Lambda^k(T_x A)$, $0 \leq k \leq n$. Έτσι $\Lambda^k(A) = \bigcup_{x \in A} \Lambda^k(T_x A)$. Μια k -διαφορική μορφή ή απλά k -μορφή στο A είναι μια συνάρτηση $\omega: A \rightarrow \Lambda^k(A)$ ώστε $\omega(x) \in \Lambda^k(T_x A)$ για κάθε $x \in A$. Από το Θεώρημα 1.8 για κάθε $x \in A$ υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένα $a_1, \dots, a_k(x) \in \mathbb{R}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ ώστε

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k}(x) e_{i_1}^*(x) \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*(x)$$

όπου $\{e_1^*(x), \dots, e_n^*(x)\}$ είναι η βάση της κανονικής βάσης $\{e_1(x), \dots, e_n(x)\}$ του $T_x A$ και $e_i(x) = (x, e_i)$, $1 \leq i \leq n$. Η k -μορφή ω λέγεται C^r αν όλες οι συναρτήσεις $a_{i_1, \dots, i_k}: A \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ είναι C^r , $0 \leq r \leq \infty$. Για λόγους απλότητας, στα επόμενα με τους όρους διανυσματικό πεδίο και διαφορική μορφή θα εννοούμε C^∞ διανυσματικό πεδίο και C^∞ διαφορική μορφή, εκτός αν κάτι άλλο ρητά αναφέρεται.

Όλες οι πράξεις που ορίζονται για ανεξαρτητικούς τανυστές, ορίζονται και για διαφορικές μορφές με αριθμό κατά σημείο. Έτσι ορίζεται το άθροιστα $\omega + \theta$ διαφορικών μορφών το γινόμενο $f\omega$ για μια C^∞ συνάρτηση f με μια διαφορική μορφή (και το εξωτερικό γινόμενο $\omega \wedge \theta$). Παρατηρούμε ότι $f\omega = f\omega$. Το σύνολο των k -μορφών του A ομβολίζεται με $\Omega^k(A)$,

ΟΕΚΣΗ. Παράτηρατε ος το $Q^0(A)$ είναι ο διανυσματικός χώρος όλων των C^0 συναρτήσεων των A στο \mathbb{R} . Το ενδιάρροιστο $Q(A) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} Q^k(A)$, εροδιδέρεο με το εβστερως γινόμεο γίρεοα ανώροαδεοικω αλγεβρα στο \mathbb{R} και λέρεοα αλγεβρα Graumann των A .

Εοτω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ για C^m σωαρηοη. Τοτε $Df(x) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ για καθε $x \in A$. Οριζέοα λοιπό η 1-φορμή df στο A με τοτο

$$df(x)(v_x) = Df(x)(v)$$

που λέρεοα διεφορικό της f .

Ειδικά αν $\pi_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η προβόλη στη i -σωατεωγέωη, ίοίση τοτε $D\pi_i(x) = (0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)$ για καθε $x \in A$, οτω το 1 βεοάρεοα στη βέωη i και σωεπώς αν $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ τοτε

$$d\pi_i(x)(v_x) = D\pi_i(x)(v) = v_i$$

Ετω εχομε $d\pi_i(x)(e_j(x)) = \delta_{ij}$ για καθε $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Αυτό βείχεοα ος $d\pi_i(x) = e_i^*(x)$. Οι βεοίρεοε διεφορικές φορμές $d\pi_i$, ίοίση ελ-βέοατοτωα παροδοβιακά με dx_i , ίοίση, αροη η π_i είναι η προβόλη στη σωατεωγέωη π_i . Ετω καθε k -φορμή ω γέρεοα φοροοηφορική στο A

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Ειδικά για της df εχομε:

$$df(x)(v_x) = Df(x)(v) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x) \cdot v_i = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x) \cdot d\pi_i(x)(v_x)$$

Αρο $df = \partial_1 f \cdot dx_1 + \dots + \partial_n f \cdot dx_n$. Τέλοο για καθε k -φορμή ω στο A υνάρχεοι για φοροοηφορική εροίεωη C^m σωαρηοη $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ ωοτε

$$\omega = g dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Εοτω τοτω $A \subset \mathbb{R}^n$ και $B \subset \mathbb{R}^m$ δύο ανοιχτά ουνόλω και $F: A \rightarrow B$ για C^m σωαρηοη. Για καθε $x \in A$ εοιζέοα η γροηοική απεικονίωη

$$T_x F: T_x A \rightarrow T_x B \quad \text{με τοτο} \quad T_x F(v_x) = (Df(x)(v))_{F(x)}$$

εροοίεωη γροηοική απεικονίωη της F στο σηείο x . Η $T_x F$ εκοεί

$$\text{για γροηοική απεικονίωη } (T_x F)^*: \Lambda(T_x B) \rightarrow \Lambda(T_x A)$$

k -φορμή ω στο B εοιζέοα λοιπό η k -φορμή $F^* \omega$ στο A με τοτο

$$(F^*\omega)(x) = (T_x F)^*(\omega(F(x)))$$

η πιο αναλυτικά, για κάθε $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$

$$(F^*\omega)(x)(v_1, \dots, v_k) = \omega(F(x))((DF(x)(v_1))_{F(x)}, \dots, (DF(x)(v_k))_{F(x)})$$

2.1. Πρόταση Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ δύο ανοιχτά σύνολα και $F = (F_1, \dots, F_m): A \rightarrow B$

για C^∞ συνάρτηση. Τότε

(i) $F^*(dx_i) = \sum_{j=1}^n \partial_j F_i dx_j$, $1 \leq i \leq m$

(ii) $F^*(\omega_1 + \omega_2) = F^*\omega_1 + F^*\omega_2$, για κάθε $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{O}(B)$

(iii) $F^*(g\omega) = (g \circ F) \cdot F^*\omega$, για κάθε $g \in \mathcal{O}^0(B)$, $\omega \in \mathcal{O}(B)$

(iv) $F^*(\omega \wedge \theta) = F^*\omega \wedge F^*\theta$, για κάθε $\omega, \theta \in \mathcal{O}(B)$

Απόδειξη (i) Αν $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ τότε έχουμε

$$\begin{aligned} F^*(dx_i)(x)(v) &= dx_i(F(x)) \cdot ((DF(x)(v))_{F(x)}) = \\ &= dx_i(F(x)) \left(\sum_{j=1}^n \partial_j F_i(x) v_j, \dots, \sum_{j=1}^n \partial_j F_m(x) v_j \right)_{F(x)} = \\ &= \sum_{j=1}^n \partial_j F_i(x) v_j = \sum_{j=1}^n \partial_j F_i(x) dx_j(x)(v) \end{aligned}$$

Τα (ii), (iii) και (iv) είναι προφανή.

2.2. Θεώρημα Αν $A, B \subset \mathbb{R}^n$ είναι δύο ανοιχτά σύνολα και $F: A \rightarrow B$ για

C^∞ συνάρτηση τότε για κάθε n -μορφή ω στο B ,

$$(F^*\omega)(x) = (\det DF(x)) \cdot \omega(F(x)), \quad x \in A.$$

Απόδειξη Υπάρχει για C^∞ συνάρτηση $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\omega = g dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Ετσι έχουμε $F^*\omega = (g \circ F) \cdot F^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$, ενώ

$$F^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)(x)(v_1(x), \dots, v_n(x)) =$$

$$(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)(F(x))((DF(x)(v_1))_{F(x)}, \dots, (DF(x)(v_n))_{F(x)}) =$$

$$(\det DF(x)) \cdot (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)(F(x))(v_1(F(x)), \dots, v_n(F(x)))$$

από το Θεώρημα 1.9, για κάθε βάση $\{v_1, \dots, v_n\}$ του \mathbb{R}^n . Άρα

$$F^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = (\det DF) \cdot (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$$

Ετσι άρα για $\mathcal{O}(A)$, όπου το $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό σύνολο, ορίζεται ένας τελεστής d που γενικεύει το διαφορικό μιας συνάρτησης.

2.3. Θεώρημα Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο. Υπάρχει για μονοσήμαντα

αποστέμνη γραμμική απεικόνιση $d: \mathcal{O}(A) \rightarrow \mathcal{O}(A)$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) Αν $\omega \in \mathcal{O}^k(A)$, τότε $d\omega \in \mathcal{O}^{k+1}(A)$

(ii) Αν $f \in \mathcal{O}^0(A)$, τότε df είναι το διαφορικό της f .

(iii) Αν $\omega \in \Omega^k(A)$, $\theta \in \Omega^l(A)$, τότε $d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge d\theta$

(iv) $d \circ d = 0$, δηλαδή $d(d\omega) = 0$ για κάθε $\omega \in \Omega(A)$.

Απόδειξη Πρώτα θ' αποδείξουμε τις ιδιότητες του d . Εστω λοιπόν ότι υπάρχει τελεστής $d: \Omega(A) \rightarrow \Omega(A)$ με τις ιδιότητες (i)-(iv). Κάθε k -τομή ω στο A γράφεται μονοσήμαντα

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

όπου $\alpha_{i_1, \dots, i_k} \in \mathcal{O}(A)$. Τότε έχουμε:

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\alpha_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_k} d(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})$$

Όπως βλέπουμε με τα (iii), (iv) έχουμε

$$d(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = d(dx_{i_1}) \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} - dx_{i_2} \wedge d(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = 0 - dx_{i_2} \wedge d(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = \dots = (-1)^k dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge d(dx_{i_k}) = 0$$

Και ανάλυση λοιπόν θα πρέπει

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\alpha_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \quad (*)$$

Αντίστροφα αν ο d ορίζεται από την (*) τότε προφανώς ικανοποιούνται

τα (ii), (iii). Αν $\theta = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n} b_{j_1, \dots, j_l} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l} \in \Omega^l(A)$, τότε

$$d(\omega \wedge \theta) = d \left(\sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n}} \alpha_{i_1, \dots, i_k} b_{j_1, \dots, j_l} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l} \right) =$$

$$\sum d(\alpha_{i_1, \dots, i_k}) \cdot b_{j_1, \dots, j_l} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l} + \sum \alpha_{i_1, \dots, i_k} d(b_{j_1, \dots, j_l}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} =$$

$$\sum d(\alpha_{i_1, \dots, i_k}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge b_{j_1, \dots, j_l} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l} +$$

$$(-1)^k \sum \alpha_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge d(b_{j_1, \dots, j_l}) \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l} =$$

$$d\omega \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge d\theta, \text{ που δίνει το (iii)}$$

Αν τώρα $f \in \mathcal{O}(A)$, τότε $df = \sum_{i=1}^n \partial_i f \cdot dx_i$, οπότε

$$d(df) = \sum_{i=1}^n d(\partial_i f) \wedge dx_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \partial_{j,i}^2 f \cdot dx_j \right) \wedge dx_i =$$

$$\sum_{(i,j) \in I} \partial_{j,i}^2 f \cdot dx_j \wedge dx_i = \sum_{(i,j) \in I} \partial_{j,i}^2 f \cdot (dx_j \wedge dx_i + dx_i \wedge dx_j) = 0$$

από το θεώρημα του Schwarz.

Αρα λοιπόν $d(d\omega) = d\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} da_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\right) =$

$$\sum d(da_{i_1, \dots, i_k}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} - \sum da_{i_1, \dots, i_k} \wedge d(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = 0 - 0 = 0$$

που αποδεικνύει το Θεώρημα.

2.4. Πρόταση Αν $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ είναι δύο ανοιχτά σύνολα και $F: A \rightarrow B$ μια C^∞ συνάρτηση, τότε $F^*d = d \circ F^*$, δηλαδή $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$ για κάθε $\omega \in \mathcal{O}(B)$.

Απόδειξη Αν $\omega \in \mathcal{O}^1(B)$, τότε από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε $F^*(d\omega) = d(\omega \circ F) = d(F^*\omega)$. Αν $\omega = g dx_i \in \mathcal{O}^1(B)$, όπου $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια C^∞ συνάρτηση, τότε έχουμε:

$$d(F^*(g dx_i)) = d(F^*g \cdot F^*(dx_i)) = d(F^*g) \wedge F^*(dx_i) + F^*g \cdot d(F^*(dx_i)) = F^*(dg) \wedge F^*(dx_i) + F^*g \cdot d(dF^*x_i) = F^*(dg \wedge dx_i) + 0 = F^*(d(g dx_i))$$

Λόγω της γραμμικότητας της F^* , αυτό αποδεικνύει τον τύπο για 1-μορφές.

Η απόδειξη γίνεται τώρα επαγωγικά. Έστω ότι έχουμε αποδείξει τον τύπο για λ -μορφές, όπου $\lambda < k$ και $\omega = g dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \in \mathcal{O}^k(A)$. Τότε

$$\begin{aligned} d(F^*\omega) &= d(F^*(g dx_{i_1}) \wedge F^*(dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})) = \\ &= d(F^*(g dx_{i_1})) \wedge F^*(dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) + F^*(g dx_{i_1}) \wedge d(F^*(dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})) = \\ &= F^*(d(g dx_{i_1})) \wedge F^*(dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) + F^*(g dx_{i_1}) \wedge F^*(d(dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})) = \\ &= F^*(d(g dx_{i_1}) \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) + 0 = F^*(d\omega). \end{aligned}$$

Λόγω της γραμμικότητας της d , αυτό δείχνει τον τύπο για k -μορφές.

Μια μορφή ω στο ανοιχτό σύνολο A λέγεται κλειστή αν $d\omega = 0$ και ακριβής αν υπάρχει $\theta \in \mathcal{O}(A)$ ώστε $d\theta = \omega$. Από το Θεώρημα 2.3 (iv) προκύπτει ότι κάθε ακριβής μορφή είναι κλειστή. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

2.5. Παράδειγμα Έστω $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ και ω η 1-μορφή στο A με τύπο

$$\omega(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

Ευκολά βλέπουμε ότι $d\omega = 0$, δηλαδή η ω είναι κλειστή. Θα δείξουμε με απαγωγή στο άτοπο ότι η ω δεν είναι ακριβής. Έστω ότι υπάρχει C^∞ συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\omega = df$. Τότε

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{και} \quad \partial_2 f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{για κάθε } (x,y) \in A$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $F(t) = (\cos t, \sin t)$. Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε για κάθε $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (f \circ F)'(t) &= \partial_1 f(F(t)) \cdot (-\sin t) + \partial_2 f(F(t)) \cdot \cos t \\ &= \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot \cos t = 1 \end{aligned}$$

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε

$$2\pi = \int_0^{2\pi} dt = \int_0^{2\pi} (f \circ F)'(t) dt = f(F(2\pi)) - f(F(0)) = f(1,0) - f(1,0) = 0, \text{ άτοπο!}$$

2.6. Ορισμός Ένα ανοιχτό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται αστρικόμορφο (star shaped) ως προς το σημείο $x_0 \in A$, αν $[x_0, x] \subset A$ για κάθε $x \in A$.

Κάθε κυρτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n είναι αστρικόμορφο και βέβαια το ίδιο το \mathbb{R}^n . Το σύνολο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ δεν είναι αστρικόμορφο. Αν $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοιχτό, αστρικόμορφο σύνολο ως προς το 0 και $\omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i$ μια κλειστή 1-μορφή στο A , υπάρχει μια C^∞ συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με $df = \omega$ και $f(0) = 0$, δηλαδή $\partial_i f = \alpha_i$, ισχύει. Για κάθε $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$ θεωρούμε την συνάρτηση $\gamma_x: [0,1] \rightarrow A$ με τύπο $\gamma_x(t) = tx$. Τότε $\gamma_x([0,1]) = [0,x]$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού και τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$f(x) = \int_0^1 (f \circ \gamma_x)'(t) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \partial_i f(\gamma_x(t)) \cdot x_i dt = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \alpha_i(tx) dt \right) x_i$$

Ο τύπος αυτός γενικεύεται και χρησιμοποιείται για την απόδειξη του παρακάτω Θεμελιώδους Θεωρήματος.

2.7. Θεώρημα (Λήμμα του Poincaré) Αν το $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο που είναι αστρικόμορφο ως προς το 0, τότε κάθε κλειστή μορφή στο A είναι ακριβής.

Απόδειξη Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $K: \mathcal{Q}^k(A) \rightarrow \mathcal{Q}^{k-1}(A)$, $k \in \mathbb{N}$, με τύπο

$$(K\omega)(x) = \sum_{k_1 < \dots < k_{k-1}} \sum_{\lambda=1}^n (-1)^{\lambda-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} \alpha_{k_1, \dots, k_{k-1}, \lambda}(tx) dt \right) x_{k_1} dx_{k_2} \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_{k_\lambda} \wedge \dots \wedge dx_{k_{k-1}}$$

όπου $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\omega = \sum_{k_1 < \dots < k_k} \alpha_{k_1, \dots, k_k} dx_{k_1} \wedge \dots \wedge dx_{k_k}$ και το σύμβολο \widehat{dx}_{k_λ} σημαίνει σε όρος dx_{k_λ} παραλείπεται από το γινόμενο. Άρκει να δείξουμε τώρα ότι

$$\omega = K(d\omega) + d(K\omega) \text{ για κάθε } \omega \in \mathcal{Q}^k(A)$$

γιατί τότε αν η ω είναι κλειστή θα έχουμε $\omega = d(K\omega)$. Υπολογίζουμε πρώτα

καθε οπο των αθροισματος χωριστα.

$$d(kw)(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\lambda=1}^k (-1)^{\lambda-1} d \left[\left(\int_0^1 t^{k-\lambda} a_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt \right) x_{i_\lambda} \right] dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\lambda}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$\text{και } d \left[\left(\int_0^1 t^{k-1} a_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt \right) x_{i_\lambda} \right] = \sum_{j=1}^n \partial_j \left[\left(\int_0^1 t^{k-1} a_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt \right) x_{i_\lambda} \right] dx_j =$$

$$\sum_{j=1}^n \left[\left(\int_0^1 \partial_j (t^{k-1} a_{i_1, \dots, i_k}(tx)) dt \right) x_{i_\lambda} + \left(\int_0^1 t^{k-1} a_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt \right) \partial_j (x_{i_\lambda}) \right] dx_j =$$

$$\left(\int_0^1 t^{k-1} a_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt \right) dx_{i_\lambda} + \sum_{j=1}^n \left[\left(\int_0^1 t^k \partial_j a_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt \right) x_{i_\lambda} \right] dx_j$$

$$\text{Αρα } d(kw)(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\lambda=1}^k (-1)^{\lambda-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} a_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\lambda}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$+ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\lambda=1}^k (-1)^{\lambda-1} \left[\sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^k \partial_j a_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt \right) x_{i_\lambda} \right] dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\lambda}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} =$$

$$k \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left(\int_0^1 t^{k-1} a_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$+ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\lambda=1}^k (-1)^{\lambda-1} \left[\sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^k \partial_j a_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt \right) x_{i_\lambda} \right] dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\lambda}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$\text{Επειδη } dw = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \partial_j a_{i_1, \dots, i_k} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \text{ εχουμε}$$

$$k(dw)(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\lambda=1}^k \sum_{\lambda=0}^k (-1)^\lambda \left(\int_0^1 t^k \partial_j a_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt \right) x_{i_\lambda} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\lambda}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} =$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^k \partial_j a_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt \right) x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$+ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \sum_{\lambda=1}^k (-1)^\lambda \left(\int_0^1 t^k \partial_j a_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt \right) x_{i_\lambda} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\lambda}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Προσδεταται λοιπον, τα τριπλα αθροισματα αντιστοιχουν και εχουμε:

$$d(kw)(x) + k(dw)(x) =$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left(\int_0^1 k \cdot t^{k-1} a_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^k \partial_j a_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt \right) x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} =$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left[\int_0^1 \left(kt^{k-1} a_{i_1, \dots, i_k}(tx) + \sum_{j=1}^n t^k \partial_j a_{i_1, \dots, i_k}(tx) x_j \right) dt \right] dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} =$$

Για $k > 0$ ορίζουμε ως i -κάτω πλευρά $\lambda_i^0 \gamma$ του k -κύβου γ και ως i -άνω πλευρά $\lambda_i^1 \gamma$ του γ τους $(k-1)$ -κύβους γ με τύπου

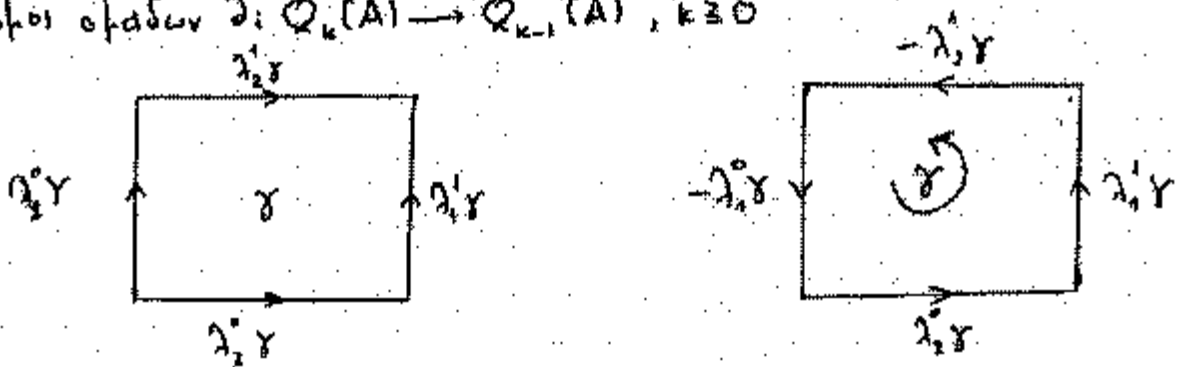
$$\lambda_i^\epsilon \gamma(x_1, \dots, x_{k-1}) = \gamma(x_1, \dots, x_{i-1}, \epsilon, x_{i+1}, \dots, x_k), \quad \epsilon = 0, 1, \quad 1 \leq i \leq k$$

Τότε για $1 \leq i < j \leq k$ ισχύει $\lambda_i^1 \lambda_j^0 = \lambda_{j-1}^0 \lambda_i^1$, όπως εύκολα διαπιστώνεται.

Εστω $Q_k(A)$, $k \geq 0$, η ελεύθερη αβελιανή ομάδα που παράγεται από τους k -κύβους στο A . Για $k=0$ θέτουμε $Q_0(A) = 0$. Τα στοιχεία της $Q_k(A)$ λέγονται (λίγες) k -αλυσίδες στο A , και είναι γραμμικοί συνδυασμοί k -κύβων με ακέραιους συντελεστές. Αν γ είναι ένας k -κύβος στο A τότε η $(k-1)$ -αλυσίδα

$$\partial \gamma = \sum_{i=1}^k (-1)^i (\lambda_i^0 \gamma - \lambda_i^1 \gamma)$$

λέγεται σύνολο του γ . Επεκτείνοντας γραμμικά ορίζεται τώρα ένας ομομορφισμός ομάδων $\partial: Q_k(A) \rightarrow Q_{k-1}(A)$, $k \geq 0$



3.1. Λήμμα $\partial \circ \partial = 0$

Απόδειξη Για κάθε k -κύβος γ στο A έχουμε:

$$\partial(\partial \gamma) = \partial \left(\sum_{i=1}^k (-1)^i (\lambda_i^0 \gamma - \lambda_i^1 \gamma) \right) =$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \left[\lambda_j^0 \left(\sum_{i=1}^k (-1)^i (\lambda_i^0 \gamma - \lambda_i^1 \gamma) \right) - \lambda_j^1 \left(\sum_{i=1}^k (-1)^i (\lambda_i^0 \gamma - \lambda_i^1 \gamma) \right) \right] =$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^k (-1)^{i+j} [\lambda_j^0 \lambda_i^0 \gamma - \lambda_j^0 \lambda_i^1 \gamma - \lambda_j^1 \lambda_i^0 \gamma + \lambda_j^1 \lambda_i^1 \gamma] =$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^k (-1)^{i+j} \lambda_j^0 \lambda_i^0 \gamma + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^k (-1)^{i+j} \lambda_j^1 \lambda_i^1 \gamma - \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^k (-1)^{i+j} (\lambda_j^1 \lambda_i^0 \gamma + \lambda_j^0 \lambda_i^1 \gamma)$$

Έχουμε τώρα $\sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^k (-1)^{i+j} (\lambda_j^1 \lambda_i^0 + \lambda_j^0 \lambda_i^1) =$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq k-1} (-1)^{i+j} (\lambda_j^1 \lambda_i^0 + \lambda_j^0 \lambda_i^1) + \sum_{1 \leq j < i \leq k} (-1)^{i+j} (\lambda_j^1 \lambda_i^0 + \lambda_j^0 \lambda_i^1) =$$

$$\sum_{1 \leq i, j \leq k-1} (-1)^{i+j} (\lambda_j^1 \lambda_i^0 + \lambda_j^0 \lambda_i^1) - \sum_{1 \leq j < i \leq k} (-1)^{j+i-1} (\lambda_{i-1}^0 \lambda_j^1 + \lambda_{i-1}^1 \lambda_j^0) = 0 \text{ και}$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^k (-1)^{i+j} \lambda_j^e \lambda_i^e = \sum_{1 \leq i, j \leq k-1} (-1)^{i+j} \lambda_j^e \lambda_i^e + \sum_{1 \leq j < i \leq k} (-1)^{i+j} \lambda_j^e \lambda_i^e =$$

$$\sum_{1 \leq i, j \leq k} (-1)^{i+j} \lambda_j^e \lambda_i^e - \sum_{1 \leq j < i \leq k} (-1)^{j+i-1} \lambda_{i-1}^e \lambda_j^e = 0, \text{ για } e=0,1.$$

Άρα $\partial(\partial\eta) = 0$

Μια k -κύβος γ στο A λέγεται k -κύκλος αν $\partial\gamma = 0$ και k -κύβος αν υπάρχει $\delta \in Q_{k+1}(A)$ ώστε $\partial\delta = \gamma$. Από το Λήμμα 3.1 προκύπτει ότι κάθε κύβος είναι κύκλος. Το ανώτερο δεν ισχύει πάντα, όπως θα δούμε αργότερα. Ο αναγνώστης ασφαλώς θα παρατήρησε τις ομοιότητες που υπάρχουν μεταξύ του σωμακικού τελεστή ∂ και του τελεστή της εξωτερικής παραγωγής d . Οι δύο τελεστές συνδέονται μεταξύ τους μέσω του Λουβιρφόφου.

Έστω ω μια k -διαφορική μορφή που ορίζεται σε μια ανοιχτή περιοχή V του $[0,1]^k$ στο \mathbb{R}^k . Τότε υπάρχει μια μονοσήμαντα ορισμένη C^∞ συνάρτηση $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$. Ορίζουμε

$$\int_{[0,1]^k} \omega = \int_{[0,1]^k} f$$

$$\text{δηλαδή } \int_{[0,1]^k} f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = \int_{[0,1]^k} f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Έστω τώρα $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και ω μια k -μορφή στο A , $k \geq 1$. Για κάθε k -κύβος $\gamma: [0,1]^k \rightarrow A$ στο A ορίζουμε

$$\int_\gamma \omega = \int_{[0,1]^k} \gamma^* \omega$$

για $k=0$, ορίζουμε $\int_\gamma \omega = \omega(\gamma(0))$, αφού τότε γ και ω είναι μια C^∞ συνάρτηση του A στο \mathbb{R} και $\gamma: \{0\} \rightarrow A$. Επεκτείνονται τώρα γραμμικά ορίζουμε έναν ομομορφικό ομοδωμ (1)

$$\int \omega : Q_k(A) \rightarrow \mathbb{R}$$

Από το Λήμμα 3.1 το ω πάνω στην k -κύβος $\gamma = \sum_{i=1}^m \kappa_i \delta_i$, όπου $\kappa_i \in \mathbb{Z}$ και δ_i είναι k -κύβος στο A , $1 \leq i \leq m$, είναι $\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^m \kappa_i \int_{\delta_i} \omega$.

3.2. Θεώρημα (Stokes) Έστω $A \in \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο, τότε για κάθε $(k-1)$ -κορφή ω στο A και κάθε k -αλυσίδα γ στο A ισχύει

$$\int_{\gamma} d\omega = \int_{\partial\gamma} \omega$$

Απόδειξη Έστω ότι $n=k$, το A είναι μια ανοιχτή περιοχή του $[0,1]^k$ και $\gamma = I^k$ είναι ο ταυτοτικός k -κύβος, δηλαδή $I^k(x) = x$ για κάθε $x \in [0,1]^k$. Η ω τότε είναι γραμμικός συνδυασμός $(k-1)$ -κορμών της κορφή $f dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_k$, $1 \leq i \leq k$, όπως λόγω της γραμμικότητας του ολοκληρώματος αρκεί για την περίπτωση αυτή να αποδειχθεί το θεώρημα για αυτές. Για $c=0,1$ και $1 \leq j \leq k$ έχουμε $(\lambda_j^c I^k)^* (dx_j) = d(\sigma_j \cdot \lambda_j^c I^k) = 0$, όπου $\sigma_j: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η προβολή στην j -συντεταγμένη, γιατί η $\sigma_j \circ \lambda_j^c I^k$ είναι η σταθερή συνάρτηση c . Σωπείναι

$$\int_{[0,1]^{k-1}} (\lambda_j^c I^k)^* (f dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_k) = \begin{cases} 0 & , j \neq i \\ \int_{[0,1]^{k-1}} f(x_1, \dots, x_{i-1}, c, x_{i+1}, \dots, x_k) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k & , j = i \end{cases}$$

Άρα
$$\int_{\partial I^k} f dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_k =$$

$$\sum_{j=1}^k (-1)^j \left[\int_{[0,1]^{k-1}} (\lambda_j^0 I^k - \lambda_j^1 I^k)^* (f dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_k) \right] =$$

$$(-1)^i \int_{[0,1]^{k-1}} [f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_k) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_k)] dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

Ας την άλλη πλευρά, από το θεώρημα του Fubini και το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε:

$$\int_{I^k} d(f dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_k) = \int_{[0,1]^k} \partial_i f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_k =$$

$$(-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} \partial_i f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = (-1)^{i-1} \int_0^1 \dots \left(\int_0^1 \partial_i f(x_1, \dots, x_k) dx_i \right) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_k =$$

$$(-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} [f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_k) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_k)] dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_k =$$

$$(-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_k) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k + (-1)^i \int_{[0,1]^{k-1}} f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_k) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

Αρα $\int_{\mathbb{R}^k} d\omega = \int_{\partial \mathbb{R}^k} \omega$.

Είδη γενική περίπτωση που γ είναι ένας οποιαδήποτε k -κύβος G ένα ανοικτό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ έχουμε:

$$\int_{\partial \gamma} \omega = \sum_{j=1}^k (-1)^j \int_{[0,1]^{k-1}} (\lambda_j^0 \gamma - \lambda_j^1 \gamma)^* \omega = \sum_{j=1}^k (-1)^j \int_{[0,1]^{k-1}} (\lambda_j^0 I^k - \lambda_j^1 I^k)^* (\gamma^* \omega) = \int_{\partial \mathbb{R}^k} \gamma^* \omega$$

γιατί $\lambda_j^0 \gamma = \gamma \circ \lambda_j^0 I^k$, $\epsilon = 0, 1$, $1 \leq j \leq k$ και συνεπώς

$$\int_{\partial \gamma} \omega = \int_{[0,1]^k} \gamma^* (d\omega) = \int_{\mathbb{R}^k} d(\gamma^* \omega) = \int_{\partial \mathbb{R}^k} \gamma^* \omega = \int_{\partial \mathbb{R}^k} \omega$$

Λόγω της γραμμικότητας το ίδιο ισχύει και για τις k -αλυσίδες.

3.3. Εφαρμογή Έστω $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ και $\gamma_{R,n} : [0,1] \rightarrow A$ ο 1 -κύβος με τύπο

$$\gamma_{R,n}(t) = (R \cos 2\pi n t, R \sin 2\pi n t), \text{ όπου } R > 0, n \in \mathbb{Z} \text{ και } n \neq 0. \text{ Τότε}$$

$$\partial \gamma_{R,n} = \gamma_{R,n}(0) - \gamma_{R,n}(1) = 0,$$

δηλαδή ο $\gamma_{R,n}$ είναι 1 -κύκλος. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Stokes θα δείξουμε ότι ο $\gamma_{R,n}$ δεν είναι σύνορο. Θεωρούμε στο A την κλειστή 1 -τομή

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

$$\text{Τότε } (\gamma_{R,n}^* \omega)(t) = \omega(\gamma_{R,n}(t)) \begin{pmatrix} -2\pi n R \sin 2\pi n t \\ 2\pi n R \cos 2\pi n t \end{pmatrix} =$$

$$\left(-\frac{R \sin 2\pi n t}{R^2}, \frac{R \cos 2\pi n t}{R^2} \right) \begin{pmatrix} -2\pi n R \sin 2\pi n t \\ 2\pi n R \cos 2\pi n t \end{pmatrix} = 2\pi n$$

Αρα $\gamma_{R,n}^* \omega = 2\pi n dt$. Αν υπάρχει 2 -αλυσίδα δ στο A ώστε $\partial \delta = \gamma_{R,n}$ τότε από το θεώρημα του Stokes έχουμε:

$$0 = \int_{\delta} d\omega = \int_{\partial \delta} \omega = \int_{\gamma_{R,n}} \omega = \int_{[0,1]} \gamma_{R,n}^* \omega = \int_0^1 2\pi n dt = 2\pi n, \text{ άτοπο!}$$

Για κάθε $(k-1)$ -κύβο G , $k \geq 1$, στο σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ ορίζεται ο k -κύβος T_G με τύπο $T_G(x_1, \dots, x_k) = G(x_1, \dots, x_{k-1})$. Παρατηρούμε ότι

$$\lambda_i^0 T_G = T \lambda_i^0 G \text{ για } 1 \leq i \leq k-1 \text{ και } \lambda_k^0 T_G = G, \epsilon = 0, 1.$$

Ένας k -κύβος γ στο A λέγεται εξαρτηστέος αν υπάρχει ένας $(k-1)$ -κύβος στο A με $\gamma = T_G$, δηλαδή η συνάρτηση $\gamma: [0,1]^k \rightarrow A$ δεν εξαρτάται από την

τελευταία μεταβλητή. Έστω $D_k(A)$ η υποομάδα της $Q_k(A)$ που παράγεται από τους εκφυλισμένους k -κύβους, για κάθε $(k-1)$ -κύβο c έχουμε

$$\partial(T_c) = \sum_{i=1}^k (-1)^i (\lambda_i^0 T_c - \lambda_i^1 T_c) = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i (T_{\lambda_i^0 c} - T_{\lambda_i^1 c}) \in D_{k-1}(A)$$

Συνεπώς $\partial(D_k(A)) \subset D_{k-1}(A)$.

Θεωρούμε τώρα την ομάδα πλάγια $C_k(A) = Q_k(A)/D_k(A)$, $k \geq 0$. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι ο ομομορφισμός τελεστής ∂ επαγεί έναν ομομορφισμό $\partial: C_k(A) \rightarrow C_{k-1}(A)$, $k \geq 0$ με τύπο

$$\partial(\gamma + D_k(A)) = \partial\gamma + D_{k-1}(A)$$

Για κάθε $\gamma \in Q_k(A)$ έχουμε $\partial(\partial(\gamma + D_k(A))) = \partial(\partial\gamma + D_{k-1}(A)) = 0 + D_{k-1}(A)$.

Ανλαδή, $\partial \circ \partial = 0$

3.4 Λήμμα Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και ω μια k -μορφή στο A . Αν γ είναι ένας εκφυλισμένος k -κύβος στο A , τότε $\gamma^* \omega = 0$.

Απόδειξη Αφού ο γ είναι εκφυλισμένος, δεν εξαρτάται από την τελευταία μεταβλητή. Συνεπώς, για κάθε $\lambda \in [0, 1]^k$, η παράγωγος $D_\gamma \omega$ έχει τάξη το πολύ $k-1$. Αν λοιπόν $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^k$, τότε τα $D_\gamma \omega(v_1, \dots, D_\gamma \omega(v_k))$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Αφού λοιπόν η $\omega(\gamma(x))$ είναι ανεξάρτητη έχουμε

$$(\gamma^* \omega)(x) = \omega(\gamma(x)) = \omega(\gamma(x)) ((D_\gamma \omega(v_1))_{\gamma(x)}, \dots, (D_\gamma \omega(v_k))_{\gamma(x)}) = 0$$

Το προηγούμενο Λήμμα 3.4 μας εκπροσώπει ως αποτέλεσμα το θεώρημα μιας k -μορφής πάνω στα στοιχεία του $C_k(A)$. Έστω λοιπόν $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και ω μια k -μορφή στο A . Αν $c = \gamma + D_k(A) \in C_k(A)$, $k \geq 0$, τότε ορίζουμε

$$\int_c \omega = \int_\gamma \omega$$

Ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος από τον αναπαραστάτη γ του c . Αν $\gamma' \in Q_k(A)$ ώστε $c = \gamma + D_k(A) = \gamma' + D_k(A)$, τότε $\gamma - \gamma' \in D_k(A)$ και συνεπώς

$$\int_\gamma \omega - \int_{\gamma'} \omega = \int_{\gamma - \gamma'} \omega = \int_{[0,1]^k} (\gamma - \gamma')^* \omega = 0$$

στο Λήμμα 3.4. Ορίζεται λοιπόν ο ομομορφισμός κλειστών ομορφών $\int_\omega: C_k(A) \rightarrow \mathbb{R}$.

3.5. Θεώρημα (Stokes) Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $\omega \in Q^{k+1}(A)$, για κάθε $c \in C_k(A)$

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$$

4. Διαφορικές μορφές σε πολλαπλότητες

Εστω M μια n -πολλαπλότητα (ενδεχομένως με όριο) στο \mathbb{R}^k και $x \in M$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.4 του κεφαλαίου II υπάρχει μια ανοικτή περιοχή U του x στο \mathbb{R}^k , ένα ανοικτό σύνολο $W \subset \mathbb{R}^m$ και μια 1-1, C^∞ συνάρτηση $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^k$ που ορίζει ένα σύστημα τοπικών συντεταγμένων στο $U \cap M$, δηλαδή $\varphi(W) = U \cap M$ (ή $\varphi(W \cap W^{-1}) = U \cap M$ αν $x \in \partial M$), η $\varphi^{-1}: U \cap M \rightarrow W$ είναι συνεχής και η $D\varphi(y)$ έχει τάξη n για κάθε $y \in W$. Σημειώνω $D\varphi(y)$ είναι 1-1 και $\dim \text{Im } D\varphi(y) = n$. Αν $x = \varphi(y)$ τότε ο διανυσματικός υπόχωρος $T_x M = \{x\} \times \text{Im } D\varphi(y)$ του $T_x \mathbb{R}^k$ λέγεται εφαπτόμενος χώρος της M στο x και δεν εξαρτάται από το σύστημα τοπικών συντεταγμένων $\varphi: W \rightarrow U \cap M$. Πράγματι, αν $\psi: V \rightarrow U \cap M$ είναι ένα άλλο σύστημα τοπικών συντεταγμένων με $x \in U \cap M$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^k$ έχουμε από τον κανόνα της αλυσίδας

$$D\varphi(y) \circ \psi^{-1} \circ \psi^{-1} \circ \varphi^{-1}(y) = D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi^{-1}(y)) \circ D(\psi^{-1} \circ \varphi^{-1})(y)$$

Αφού η $D(\psi^{-1} \circ \varphi^{-1})(y): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ είναι γραμμικός ισομορφισμός, προκύπτει ότι $\text{Im } D\varphi(y) = \text{Im } D\psi(\psi^{-1} \circ \varphi^{-1}(y))$ και βέβαια $\psi(\psi^{-1} \circ \varphi^{-1}(y)) = x$.

4.1. Ορισμός Εστω M μια n -πολλαπλότητα και P μια m -πολλαπλότητα. Μια συνάρτηση $f: M \rightarrow P$ λέγεται διαφορίσιμη στο σημείο $x \in M$ αν υπάρχουν ένα σύστημα τοπικών συντεταγμένων $\varphi: W \rightarrow U \cap M$ στην M με $x \in U \cap M$ και ένα σύστημα τοπικών συντεταγμένων $\psi: V \rightarrow U \cap P$ στην P με $f(x) \in U \cap P$ ώστε $f(U \cap M) \subset U \cap P$ και η $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi: W \rightarrow V$ να είναι διαφορίσιμη στο $\varphi^{-1}(x)$.

$$\begin{array}{ccc} U \cap M & \xrightarrow{f} & U \cap P \\ \varphi \uparrow & & \downarrow \psi^{-1} \\ \mathbb{R}^n \supset W & \xrightarrow{\psi^{-1} \circ f \circ \varphi} & V \subset \mathbb{R}^m \end{array}$$

Είναι προφανές ότι ο ορισμός είναι ανεξάρτητος από τα συστήματα τοπικών συντεταγμένων, αφού οι μετασχηματισμοί τοπικών συντεταγμένων είναι C^∞ . Από τον ορισμό επίσης κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση στο x είναι συνεχής στο x . Η f λέγεται C^r συνάρτηση, $1 \leq r \leq \infty$, αν η $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ είναι C^r για οποιαδήποτε συστήματα τοπικών συντεταγμένων φ, ψ με $f(U \cap M) \subset U \cap P$.

Παρατηρούμε ότι $\psi \circ (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi) = f \circ \varphi$ και συνεπώς, αν η f είναι διαφορίσιμη στο $x = \varphi(y)$, τότε από τους κανόνες της αλυσίδας έχουμε

$$D\psi(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)(y) \circ D(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)(y) = D(f \circ \varphi)(y)$$

Αυτό δείχνει ότι $\text{Im } D(f \circ \varphi)(y) \subset \text{Im } D\psi(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)(y)$. Ορίζεται λοιπόν η γραμμική απεικόνιση $T_x f: T_x M \rightarrow T_x P$ με τύπο

$$T_x f(x, v) = (f(x), D(f \circ \varphi)(y)v)$$

όπου $v = (D\varphi(y))^{-1} w$ (που υπάρχει και είναι μοναδικό αφού η $D\varphi(y)$ είναι 1-1). Η $T_x f$ δεν εξαρτάται από τα συστήματα τοπικών συντεταγμένων.

Αν $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ είναι άλλες επιλογές συστημάτων τοπικών συντεταγμένων και $\bar{\varphi}(z) = x$, τότε $D(f \circ \bar{\varphi}) = D(f \circ \varphi) \circ D(\varphi^{-1} \circ \bar{\varphi})$. Αν λοιπόν $u \in \mathbb{R}^m$ και $v = D\bar{\varphi}(z)u$, τότε $v = D\bar{\varphi}(z)u = D\varphi(\varphi^{-1} \circ \bar{\varphi}(z)) \circ D(\varphi^{-1} \circ \bar{\varphi})(z)u$. Αρκεί

$$D(f \circ \bar{\varphi})(z)u = D(f \circ \varphi)(y) (D(\varphi^{-1} \circ \bar{\varphi})(z)u)$$

Εφαπτόμενη γραμμική απεικόνιση της f στο x ή παραγώγος της f στο x .

Αν M, N είναι δύο πολλαπλότητες, τότε για συνάρτηση $f: M \rightarrow N$ λέγεται C^r κτφ διαφορίσιμη, $1 \leq r \leq \infty$, αν είναι 1-1, ότι C^r και η αντίστροφή της $f^{-1}: N \rightarrow M$ είναι επίσης C^r .

Είναι προφανές ότι κάθε συνάρτηση $\varphi: W \rightarrow U \cap M \subset M$ που ορίζει ένα σύστημα τοπικών συντεταγμένων στην πολλαπλότητα M είναι C^∞ συνάρτηση μεταξύ των πολλαπλότητων W και $U \cap M$ (ή της M). Επίσης η $\bar{\varphi}: U \cap M \rightarrow W$ είναι σύμφωνο με τον ορισμό 4.1 C^∞ συνάρτηση. Αρκεί η φ είναι C^∞ κτφ διαφορίσιμη του W επί του $U \cap M$ και συνεπώς η $T_y \varphi: T_y W \rightarrow T_{\varphi(y)} M$ είναι ισομορφισμός για κάθε $y \in W$.

Αν $M \subset \mathbb{R}^k$ είναι μια m -πολλαπλότητα, $P \subset \mathbb{R}^l$ είναι μια n -πολλαπλότητα και $f: A \rightarrow \mathbb{R}^l$ είναι μια C^r συνάρτηση $1 \leq r \leq \infty$, όπου το A είναι μια ανοικτή περιοχή της M στο \mathbb{R}^k , ώστε $f(M) \subset P$, τότε η $f|_M: M \rightarrow P$ είναι C^r συνάρτηση. Από την παρατήρηση αυτή και το Θεώρημα 4.3 του κεφαλαίου III προκύπτει η ύπαρξη διαφάνσεων της μονάδας σε πολλαπλότητες, αμέσως.

4.2 Θεώρημα Έστω M μια m -πολλαπλότητα στο \mathbb{R}^k και U ένα ανοικτό κλάσμα της M . Τότε υπάρχει μια αριθμητική οικογένεια C^∞ συναρτήσεων $\Sigma = \{c_i: M \rightarrow [0,1]\}$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) Κάθε κέΜ έχει μια ανοιχτή περιοχή V_M ώστε το \bar{V}_M να είναι συμπαγές και $\partial V_M \cap M = \emptyset$ για όλα τα σεΣ εκτός από περιφερειακά τα πλήθος.

(β) $\sum_{\text{σεΣ}} \sigma(\kappa) = 1$ για κάθε κέΜ

(γ) Για κάθε σεΣ υπάρχει $V \in \mathcal{U}$ ώστε $\text{supp } \sigma \subset V \cap M$

Η οικογένεια Σ λέγεται διαφύση της μονάδας που υποκείται στο κάλυμα \mathcal{U} της M .

Εστω M μια n -πλάσιπλοση στο \mathbb{R}^d και $TM = \bigcup_{\kappa \in M} T_\kappa M \subset \mathbb{R}^{2d} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Ένα εφαπτογενό διανυσματικό πεδίο στην M είναι μια συνάρτηση $\zeta: M \rightarrow TM$ τέτοια ώστε $\zeta(\kappa) \in T_\kappa M$ για κάθε κέΜ. Αν $\varphi: W \rightarrow U \cap M$ είναι ένα σύστημα τοπικών συντεταγμένων στην M τότε η συνάρτηση

$$W \ni y \mapsto (T_y \varphi)^{-1} \circ \zeta \circ \varphi(y) \in W \times \mathbb{R}^n$$

είναι ένα διανυσματικό πεδίο στο W . Αν αυτό το διανυσματικό πεδίο στο W είναι C^r , λέμε ζ να είναι C^r για κάθε σύστημα τοπικών συντεταγμένων, τότε το ζ λέγεται C^r .

Ανάλογα ορίζεται η έννοια διαφορική μορφή στην M . Για κάθε κέΜ ορίζεται ο διανυσματικός χώρος $\Lambda^k(T_\kappa M)$, $0 \leq k \leq n$. Εστω $\Lambda^k(M) = \bigcup_{\kappa \in M} \Lambda^k(T_\kappa M)$. Μια k -διαφορική μορφή στην M είναι μια συνάρτηση $\omega: M \rightarrow \Lambda^k(M)$ τέτοια ώστε $\omega(\kappa) \in \Lambda^k(T_\kappa M)$ για κάθε κέΜ.

Αν N είναι μια ακόμα πλάσιπλοση και $f: N \rightarrow M$ μια C^∞ απεικόνιση, τότε για κάθε k -μορφή ω στην M ορίζεται η k -μορφή $f^*\omega$ στην N με $(f^*\omega)(y) (v_1, \dots, v_k) = \omega(f(y)) (T_y f(v_1), \dots, T_y f(v_k))$, $y \in N, v_1, \dots, v_k \in T_y N$. Η $f^*\omega$ λέγεται pull-back της ω μέσω της f .

Εστω τώρα ω μια k -διαφορική μορφή στην M και $\varphi: W \rightarrow U \cap M$ ένα σύστημα τοπικών συντεταγμένων στην M . Τότε ορίζεται η k -διαφορική μορφή $\varphi^*\omega$ στο W . Αν η $\varphi^*\omega$ είναι C^r στο W , λέμε ω να είναι C^r για κάθε σύστημα τοπικών συντεταγμένων φ , τότε η ω λέγεται C^r . Στα επόμενα με τους όρους διανυσματικό πεδίο και διαφορική μορφή θα εννοούμε πάντα C^∞ διανυσματικό πεδίο και C^∞ διαφορική μορφή. Ο διανυσματικός χώρος των διανυσματικών πεδίων της M συμβολίζεται με $\mathfrak{X}(M)$ και ο διανυσματικός χώρος των k -διαφορικών μορφών της M με $\Omega^k(M)$. Ο διανυσματικός χώρος

$\Omega(M) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M)$ γίνεται αντιμεταθετική (διαβραβ. σέση) άλγεβρα
 αξιόλογα το εξωτερικό γινόμενο κατά σημείο. Η άλγεβρα $\Omega(M)$ λέγεται
 άλγεβρα βιαννιάν της M . Παρατηρούμε ότι ο $\Omega^0(M)$ είναι ο διανυσματικός
 χώρος όλων των C^∞ συναρτήσεων $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Εστω $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^∞ συνάρτηση. Τότε η παράγωγος της f στο x
 είναι μια γραμμική απεικόνιση $T_x f: T_x M \rightarrow T_x \mathbb{R} = [f(x)] \times \mathbb{R}$. Υπάρχει
 συνεπώς μια μοναδική γραμμική μορφή $df(x): T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε
 $T_x f(v_x) = (f(x), df(x)(v_x))$ για κάθε $v_x \in T_x M$. Ορίζεται λοιπόν μια
 1-μορφή df στην M που λέγεται διαφορικό της f . Αν $\varphi: W \rightarrow U \cap M$
 είναι ένα σύστημα τοπικών συντεταγμένων και $x = \varphi(y) \in U \cap M$, τότε από
 τον ορισμό της $T_x f$ και της df έχουμε:

$$df(x)(v_x) = D(f \circ \varphi)(y)u$$

όπου $D\varphi(y)u = v_x$. Συνεπώς

$$\varphi^*(df)(y)(u_x) = df(x)(u, D\varphi(y)u) = D(f \circ \varphi)(y)u = d(f \circ \varphi)(y)(u_x)$$

Από εκείνη στιγμή $\varphi^*(df) = d(f \circ \varphi)$

4.3. Θέματα Εστω M μια n -πλάκωτη πολλαπλότητα. Υπάρχει μια μοναδική
 αριστερή γραμμική απεικόνιση $d: \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

- (i) Αν $\omega \in \Omega^k(M)$, τότε $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$
- (ii) Αν $f \in \Omega^0(M)$, τότε df είναι το διαφορικό της f .
- (iii) Αν $\omega \in \Omega^k(M)$, $\theta \in \Omega^l(M)$, τότε $d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge d\theta$
- (iv) $d \circ d = 0$, δηλαδή $d(d\omega) = 0$ για κάθε $\omega \in \Omega(M)$.

Απόδειξη Εστω $\omega \in \Omega^k(M)$. Για κάθε σύστημα τοπικών συντεταγμένων
 $\varphi: W \rightarrow U \cap M$ της M αξιόλογα η $(k+1)$ -διαφορική μορφή

$$d\omega|_{U \cap M} = (\varphi^{-1})^*(d(\varphi^*\omega)) \quad \text{στο } U \cap M$$

όπου το d στο δεξιό μέλος είναι η εξωτερική παράγωγος στο W .

Για να αξιόλογα f αυτών των περιπτώσεων μια $(k+1)$ -διαφορική μορφή $d\omega$ στο
 M , θα πρέπει ο ορισμός να είναι ανεξάρτητος από το σύστημα των τοπικών
 συντεταγμένων. Αν λοιπόν $\psi: V \rightarrow U \cap M$ είναι ένα άλλο σύστημα τοπικών
 συντεταγμένων στην M με $U \cap U \cap M \neq \emptyset$, θα πρέπει να δείξουμε ότι
 $(\varphi^{-1})^*(d(\varphi^*\omega)) = (\psi^{-1})^*(d(\psi^*\omega))$ στο $U \cap U \cap M$.

Η κ-μορφή $\varphi^* \omega$ στο W έχει μια μοναδική παράσταση

$$\varphi^* \omega = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

όπου $\alpha_{i_1, \dots, i_k} \in \mathcal{O}^*(W)$ και ομοίως στο V

$$\psi^* \omega = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n} \beta_{j_1, \dots, j_k} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$$

όπου $\beta_{j_1, \dots, j_k} \in \mathcal{O}^*(V)$.

Η $\varphi^{-1} \circ \psi = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : \psi^{-1}(U \cap U \cap M) \rightarrow \varphi^{-1}(U \cap U \cap M)$ είναι C^{∞} αμφιμόρφη και $D(\varphi^{-1} \circ \psi) = (\partial_i \gamma_j)_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$. Στο $\psi^{-1}(U \cap U \cap M)$ έχουμε

$$\psi^* \omega = (\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \psi)^* \omega = (\varphi^{-1} \circ \psi)^* (\varphi^* \omega)$$

και συνεπώς $\beta_{j_1, \dots, j_k} = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} \partial_{j_1} \gamma_{i_1} \dots \partial_{j_k} \gamma_{i_k} (\alpha_{i_1, \dots, i_k} \circ (\varphi^{-1} \circ \psi))$, $1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n$.

Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\begin{aligned} \partial_j \beta_{j_1, \dots, j_k} &= \sum_{\lambda=1}^n \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} \partial_{j_1} \gamma_{i_1} \dots \partial_{j_k} \gamma_{i_k} \partial_j (\alpha_{i_1, \dots, i_k} \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)) \\ &+ \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} \partial_{j_1} \gamma_{i_1} \dots \partial_{j_k} \gamma_{i_k} \partial_j (\alpha_{i_1, \dots, i_k} \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)) \end{aligned}$$

Επίσης, από το θεώρημα του Schwarz προκύπτει ότι $\sum_{\lambda=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_{j\lambda}^2 \gamma_{i_k} dx_j \wedge dx_\lambda = 0$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } d(\psi^* \omega) &= \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n} d\beta_{j_1, \dots, j_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \\ &= \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n} \sum_{j=1}^n \partial_j \beta_{j_1, \dots, j_k} dx_j \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \\ &= \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n} \sum_{j=1}^n \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} \partial_j \gamma_{i_1} \dots \partial_{j_k} \gamma_{i_k} \partial_j (\alpha_{i_1, \dots, i_k} \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)) dx_j \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \\ &= \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n} \sum_{j=1}^n \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} \partial_j (\alpha_{i_1, \dots, i_k} \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)) dx_j \wedge (\partial_{j_1} \gamma_{i_1} dx_{j_1}) \wedge \dots \wedge (\partial_{j_k} \gamma_{i_k} dx_{j_k}) \end{aligned}$$

Όπως $\sum_{j=1}^n \partial_j (\alpha_{i_1, \dots, i_k} \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)) dx_j = d(\alpha_{i_1, \dots, i_k} \circ (\varphi^{-1} \circ \psi))$ και από την πρόταση 2.1 (ii) $\sum_{j=1}^n \partial_{j_1} \gamma_{i_1} dx_{j_1} = (\varphi^{-1} \circ \psi)^* (dx_{i_1})$. Άρα

$$\begin{aligned} d(\psi^* \omega) &= \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n} d(\alpha_{i_1, \dots, i_k} \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)) \wedge (\varphi^{-1} \circ \psi)^* dx_{j_1} \wedge \dots \wedge (\varphi^{-1} \circ \psi)^* dx_{j_k} \\ &= (\varphi^{-1} \circ \psi)^* \left(\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} d\alpha_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right) = (\varphi^{-1} \circ \psi)^* (d(\varphi^* \omega)) \end{aligned}$$

και συνεπώς $(\varphi^{-1})^* (d(\psi^* \omega)) = (\varphi^{-1})^* (d(\varphi^* \omega))$ στο $U \cap U \cap M$.

Οι ιδιότητες των $(i), (ii), (iii), (iv)$ και η μοναδικότητα της d προκύπτουν αμέσως από το Θεώρημα 2.3.

Από την πρόταση 2.4 είναι επίσης άμεσα ότι:

4.4 Πρόταση Αν M, N είναι δύο πολλαπλότητες και $F: M \rightarrow N$ μια C^∞ απεικόνιση, τότε $F^*d = d \circ F^*$.

Ο τελεστής d λέγεται εξωτερική παραγωγή και η $d\omega$ εξωτερική παράγωγο ή διαφορικό της μορφής ω . Μια μορφή ω στην πολλαπλότητα M λέγεται κλειστή αν $d\omega = 0$ και ακριβής αν υπάρχει $\theta \in \Omega(M)$ ώστε $d\theta = \omega$. Το παράδειγμα 2.5 δείχνει ότι ενώ κάθε ακριβής μορφή είναι κλειστή το αντίστροφο δεν ισχύει.

5. Διοκλήρωση σε πολλαπλότητες

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε το διοκλήρωμα μιας n -διαφορικής μορφής με ευπαγή φάρα σε μια n -πολλαπλότητα (ενδεχομένως με σύνορο) με ανάλογο τρόπο όπως ορίσαμε το γενικευμένο διοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του ευκλείδειου χώρου. Ο φάρας μιας διαφορικής μορφής ω στην πολλαπλότητα M είναι το σύνολο

$$\text{supp } \omega = \{x \in M : \omega(x) \neq 0\}$$

Η ω έχει ευπαγή φάρα αν το $\text{supp } \omega$ είναι ευπαγές υποσύνολο της M .

Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και ω μια n -μορφή στο A με ευπαγή φάρα. Τότε υπάρχει μια μονοσήμαντα ορισμένη C^∞ συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ και $\text{supp } \omega = \text{supp } f$. Ορίζουμε

$$\int_A \omega = \int_A f$$

Προκειμένου να επεκτείνουμε τον ορισμό σε πολλαπλότητες είναι απαραίτητο να δείξουμε ότι είναι ανεξάρτητος από C^∞ αμφιδιαφορίσεις, δηλαδή αλλαγές τοπικών συντεταγμένων στις πολλαπλότητες. Εστω λοιπόν $B \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $F: B \rightarrow A$ μια C^∞ αμφιδιαφορία. Τότε $F^*\omega = (\det DF) \cdot (f \circ F) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, από το Θεώρημα 2.2. Έτσι σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό

$$\int_B F^*\omega = \int_B (f \circ F) \cdot (\det DF)$$

Όπως από τον τύπο αλλαγής της μεταβλητής κατά την ολοκλήρωση έχουμε:

$$\int_A \omega = \int_A f = \int_{F(B)} f = \int_B (f \circ F) \cdot |\det DF|$$

Αν λοιπόν $\det DF > 0$, τότε πράγματι $\int_B F^* \omega = \int_A \omega$, ενώ αν $\det DF < 0$ τότε $\int_B F^* \omega = - \int_A \omega$. Έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό

5.1. Ορισμός Μια n -πολλαπλότητα (ευδοχομένου με σύνορο) λέγεται προσανατολισμένη αν υπάρχει μια οικογένεια ενσχημάτων τοπικών συντεταγμένων

$$A = \{ \varphi_i : W_i \rightarrow U_i \cap M ; i \in I \}$$

όστε $M \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ και $\det D(\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j) > 0$ στο $\varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j \cap M)$, όταν $U_i \cap U_j \cap M \neq \emptyset$. Η οικογένεια A λέγεται προσανατολισμένος ατλας της M .

Δύο προσανατολισμένοι ατλας A, B της M λέγονται ισοδυναμικοί ή σημειώνουν τον ίδιο προσανατολισμό, αν ο $A \cup B$ είναι επίσης προσανατολισμένος ατλας.

Αν η M είναι προσανατολισμένη τότε η σχέση αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας με τουλάχιστον δύο κλάσεις. Κάθε κλάση ισοδυναμίας λέγεται προσανατολισμός της M .

Μια προσανατολισμένη πολλαπλότητα είναι ένα ζευγάρι $(M, [A])$, όπου η M είναι μια προσανατολισμένη πολλαπλότητα και το $[A]$ η κλάση ισοδυναμίας του προσανατολισμένου ατλαντα A .

Έστω M μια προσανατολισμένη πολλαπλότητα με προσανατολισμό $[A]$, όπου $A = \{ \varphi_i : W_i \rightarrow U_i \cap M ; i \in I \}$. Υπάρχει μια διαμερίση της μονάδας $\Sigma = \{ \sigma_i : M \rightarrow [0, 1], i \in I \}$ ώστε $\text{supp } \sigma_i \subset U_i \cap M$, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2. Για κάθε n -μορφή ω με στήριγμα φερόμενο στην M , φερίζουμε το

$$\int_M \omega = \sum_{i \in I} \int_{W_i} \varphi_i^*(\sigma_i \omega)$$

ως ολοκλήρωση της ω πάνω στην M . Ο ορισμός αυτός εξαρτάται τόνον από τον προσανατολισμό $[A]$. Πράγματι: έστω $B = \{ \psi_j : V_j \rightarrow U_j \cap M ; j \in J \}$ ένα, άλλη προσανατολισμένος ατλας της M με $[A] = [B]$ και $\tau_j : M \rightarrow [0, 1]$ $j \in J$ μια διαμερίση της μονάδας με $\text{supp } \tau_j \subset U_j \cap M$. Τότε έχουμε:

$$\sum_{i \in I} \int_{W_i} \varphi_i^*(\sigma_i \omega) = \sum_{i \in I} \int_{W_i} \left(\sum_{j \in J} \tau_j \circ \varphi_i \right) \cdot \varphi_i^*(\sigma_i \omega) = \sum_{i \in I, j \in J} \int_{W_i} \varphi_i^*(\tau_j \sigma_i \omega) =$$

$$\sum_{i \in I} \int_{W_i} (\psi_j^{-1} \circ \varphi_i)^* \cdot \psi_j^* (\tau_j \circ \varphi_i \omega) = \sum_{(i,j) \in J} \int_{V_j} \psi_j^* (\tau_j \circ \varphi_i \omega) =$$

$$\sum_{j \in J} \int_{V_j} \left(\sum_{i \in I} \varphi_i \circ \psi_j \right) \psi_j^* (\tau_j \omega) = \sum_{j \in J} \int_{V_j} \psi_j^* (\tau_j \omega)$$

Αν $\partial M \neq \emptyset$, τότε σίδη είναι γινώσι η ∂M είναι $(n-1)$ -πλάσπλότητα χυρί ενόρο. Αν $\varphi: W \rightarrow U \cap M$ είναι ένα σύστημα τοπικών εντεταγμένων με $U \cap \partial M \neq \emptyset$, τότε $W = W' \cap \mathbb{H}^n$, όπου το $W' \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα αναχτο σύνολο και η φ C^∞ απεικόνιση του W' . Όπως προκίπτε απ' όσα ακολουθού του αρίστου 6.5 του κεφαλαίου II, $\varphi(W \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})) = U \cap \partial M$ και η $\tilde{\varphi} = \varphi|_{W \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})}$ αρίζει ένα σύστημα τοπικών εντεταγμένων της ∂M .

5.2 Λήμμα Έστω $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ένα αναχτά σύνολα και $F = (F_1, \dots, F_n): A \rightarrow \mathbb{R}^n$ με C^1 αφοδίαφορία τέτοια ώστε $F(A \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})) = B \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$. Αν $\tilde{F} = F|_{A \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})}$, τότε

$$DF(x) = \begin{pmatrix} D\tilde{F}(x) & * \\ 0 & \alpha(x) \end{pmatrix}$$

στον $\alpha(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in A \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$. Αν επιπλέον $F(A \cap \mathbb{H}^n) = V \cap \mathbb{H}^n$, τότε $\alpha(x) > 0$.

Απόδειξη Από την υπόθεση έχουμε $F_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0$ για κάθε $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in A \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$. Αρα $\partial_i F_n(x) = 0$, $1 \leq i \leq n-1$. Αρα λίσπου να θέσουμε $\alpha(x) = \partial_n F_n(x)$. Έστω τίσρα σε $F(A \cap \mathbb{H}^n) = V \cap \mathbb{H}^n$. Τότε $F_n(x_1, \dots, x_n) > 0$, όπου $x_n > 0$. Για κάθε $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in A \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ έχουμε τίσρα

$$\alpha(x) = \partial_n F_n(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F_n(x_1, \dots, x_{n-1}, h) - F_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F_n(x_1, \dots, x_{n-1}, h)}{h} \geq 0$$

Αφού $\det DF(x) \neq 0$, και' ανάρη $\alpha(x) > 0$.

Έστω τίσρα $\mathcal{A} = \{\varphi_i: W_i \rightarrow U_i \cap M; i \in I\}$ είναι προδυνασάσθενος ασάσ της προδυνασάσθιας n -πλάσπλότητα M , $n > 1$. Τότε από το Λήμμα 5.2 προκίπτε σε η σικογέρεια

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{\varphi}_i = \varphi_i|_{W_i \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})}: W_i \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) \rightarrow U_i \cap \partial M \text{ όπου } i \in I \text{ με } U_i \cap \partial M \neq \emptyset\}$$

είναι ένας προσανατολισμένος ατλας του ∂M . Συναρτώ το σύνολο μιας προσανατολισμένης πολλαπλότητας έναν προσανατολισμένη πολλαπλότητα. Επιπλέον κάθε προσανατολισμός $[A]$ της M ορίζει και φυσικό τρόπο ενός προσανατολισμού $[A]$ της ∂M .

5.3. Θεώρημα (Stokes): Έστω M μια προσανατολισμένη, n -πολλαπλότητα, $n \geq 1$, και ω μια $(n-1)$ -μορφή με αθροιστική φέρει στην M

(α) Αν $\text{supp } \omega \cap \partial M = \emptyset$, τότε $\int_M d\omega = 0$

(β) Αν $\text{supp } \omega \cap \partial M \neq \emptyset$, τότε $\int_M d\omega = (-1)^n \int_{\partial M} \iota^* \omega$

όπου $\iota: \partial M \rightarrow M$ είναι η ένθεση και στο ∂M θεωρούμε τον φυσικό προσανατολισμό.

Απόδειξη: Έστω $\varphi: W \rightarrow V \cap M$ ένα στοιχείο τοπικών συντεταγμένων, όπου το W είναι ανοιχτή περιοχή του $[0,1]^n$ στο \mathbb{H}^n της μορφής $W = W' \cap \mathbb{H}^n$ όπου το $W' \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό και η φ ορίζεται στο W' . Υποθέτουμε και αρχικά σε $\text{supp } \omega \subset \{ \varphi(x_1, \dots, x_n) : 0 < x_i < 1, 1 \leq i \leq n, 0 \leq x_n < 1 \} = Q$



Υπάρχουν C^∞ συναρτήσεις $f_j: W' \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$ ώστε

$$\varphi^* \omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} f_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_j \wedge \dots \wedge dx_n$$

Τότε $\varphi^{-1}(\text{supp } \omega) = \text{supp } \varphi^* \omega = \bigcup_{j=1}^n \text{supp } f_j$. Έτσι έχουμε:

$$\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^* \omega) = \left(\sum_{j=1}^n \partial_j f_j \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

και συνεπώς

$$\int_M d\omega = \int_W \varphi^* \omega = \int_{[0,1]^n} \left(\sum_{j=1}^n \partial_j f_j \right) = \sum_{j=1}^n \int_{[0,1]^n} \partial_j f_j(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{[0,1]^{n-1}} [f_j(x_1, \dots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_n) - f_j(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n)] dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

από το θεώρημα των Fubini και το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.

Όμως αφού $\text{supp } f_j \subset \varphi^{-1}(\text{supp } \omega)$ για κάθε $1 \leq j \leq n$ έχουμε

$$f_j(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n) = 0 \quad \text{για } 1 \leq j \leq n$$

$$f_j(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n) = 0 \quad \text{για } 1 \leq j \leq n-1$$

$$\int_M d\omega = - \int_{[0,1]^{n-1}} f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \dots dx_{n-1}$$

Αν $\text{supp } \omega \cap \partial M = \emptyset$, τότε και $f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0$, οπότε $\int_M d\omega = 0$. Έτσι

λειτουργεί στα $\text{supp } \omega \cap \partial M \neq \emptyset$. Τότε

$$\int_{\partial M} i^* \omega = \int_{[0,1]^{n-1}} \tilde{\varphi}^* (i^* \omega) = \int_{[0,1]^{n-1}} (i \circ \tilde{\varphi})^* \omega$$

και $i \circ \tilde{\varphi} = \varphi \circ g$, όπου $g: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι η εικόνα g του

$g(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$. Αν $g = (g_1, \dots, g_n)$, τότε $g_k(x_1, \dots, x_{n-1}) = x_k$ για $1 \leq k \leq n-1$ και $g_n(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$. Από την Πρόταση 2.1 (4) έχουμε λοιπόν

$$g^*(dx_k) = dx_k, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad \text{και} \quad g^*(dx_n) = 0$$

$$\text{Συνεπώς } (i \circ \tilde{\varphi})^* \omega = (i \circ g)^* \omega = g^*(\varphi^* \omega) = g^*\left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} f_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n\right)$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} (f_j \circ g) g^*(dx_1) \wedge \dots \wedge g^*(dx_{j-1}) \wedge \dots \wedge g^*(dx_n) = (-1)^n (f_n \circ g) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$$

$$\text{Άρα } \int_{\partial M} i^* \omega = (-1)^{n-1} \int_{[0,1]^{n-1}} f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \dots dx_{n-1}$$

$$\text{Από αυτό προκύπτει ότι } \int_M d\omega = (-1)^n \int_{\partial M} \omega$$

Επιπλέον προκύπτει ότι υπάρχει ένα προσανατολισμένο σύνολο $A = \{\varphi_i: W_i \rightarrow V_i \cap M\}$

του M ώστε κάθε W_i να είναι ανοιχτή περιοχή του $[0,1]^n$ στο \mathbb{R}^n ή στο \mathbb{H}^n

και $M = \bigcup_{i \in I} Q_i$, όπου το Q_i ορίζεται όπως το Q παραπάνω. Έτσι

$\{\sigma_i: i \in I\}$ για διαίρεση της μονάδας ώστε $\text{supp } \sigma_i \subset Q_i$ για κάθε $i \in I$

Τότε $\omega = \sum_{i \in I} \sigma_i \omega$ και $\text{supp } (\sigma_i \omega) \subset \text{supp } \sigma_i \subset Q_i$. Από τα προηγούμενα

λοιπόν έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_M d\left(\sum_{i \in I} \sigma_i \omega\right) = \sum_{i \in I} \int_M d(\sigma_i \omega) = (-1)^n \sum_{i \in I} \int_{\partial M} i^*(\sigma_i \omega) = (-1)^n \int_{\partial M} i^*\left(\sum_{i \in I} \sigma_i \omega\right) \\ &= (-1)^n \int_{\partial M} i^* \omega \end{aligned}$$

γιατί αφού η $\text{supp } \omega$ έχει ελάχιστη ποσότητα άθροισμα $\sum_{i \in I} \sigma_i \omega$ είναι πεπερασμένο

(εξαιτίας των παρατήρησης που ακολουθεί το Θεώρημα 4.4 του κεφαλαίου III).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν $\omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i$ και $\theta = \sum_{j=1}^n \beta_j dx_j$, δείξτε ότι $\omega \wedge \theta = \sum_{i < j} (\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i) dx_i \wedge dx_j$.

2. Να υπολογιστούν τα διαφορικά των παρακάτω διαφορικών μορφών:

$$x^2 y dy - xy dx$$

$f(x,y) dx$, όπου $\gamma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι C^∞ σωάρτηση

$P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$, όπου οι $P, Q, R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^∞ σωάρτησεις

3. Να βρεθεί μια $(n-1)$ -μορφή θ τέτοια ώστε $d\theta = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

(Υπόδειξη: $\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n$)

4. Εστω ω, θ δυο κλειστές μορφές. Δείξτε ότι η $\omega \wedge \theta$ είναι κλειστή. Αν επιπλέον για απο τις ω, θ είναι ακριβής, δείξτε ότι η $\omega \wedge \theta$ είναι ακριβής.

5. Εστω ω μια 1-μορφή στο ανοιχτό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^∞ σωάρτηση με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Αν η $f\omega$ είναι κλειστή, δείξτε ότι $\omega \wedge d\omega = 0$.

6. Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και ω μια 1-μορφή στο A ώστε $\omega \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = 0$, $x \in A$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν C^∞ σωάρτησεις $f_1, \dots, f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$.

7. Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και ω μια 2-μορφή στο A ώστε $\omega \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = 0$, $x \in A$. Ν' αποδειχθεί ότι υπάρχουν 1-μορφές $\omega_1, \dots, \omega_k$ στο A ώστε $\omega = \omega_1 \wedge dx_1 + \dots + \omega_k \wedge dx_k$.

8. Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και ω μια 1-μορφή στο A ώστε $\omega(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Αν θ είναι μια k -μορφή στο A ώστε $\omega \wedge \theta = 0$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $(k-1)$ -μορφή η στο A ώστε $\theta = \omega \wedge \eta$.

9. Εστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και γ ένας k -κύβος στο A . Εστω V, W δυο ανοιχτές περιοχές του $[0,1]^k$ στο \mathbb{R}^k και $f: V \rightarrow W$ μια C^∞ κτηνιδιαφορία με $\det DF(x) > 0$ για κάθε $x \in V$. Ν' αποδειχθεί ότι

$$\int_\gamma \omega = \int_{f \circ \gamma} \omega$$

για κάθε k -μορφή ω στο A .

10. Ν' αποδειχθεί ότι για κάθε 1-μορφή ω στο \mathbb{R}^n υπάρχει μια C^∞ σωάρτηση $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\omega = dg$.

11. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο. Για κάθε $k \geq 0$, θεωρούμε την αβελιανή ομάδα $C^k(A) = \text{Hom}(C_k(A), \mathbb{R})$, που αποτελείται από τους διαφορίσιμους της k -αβελιανής ομάδας $C_k(A)$ στην προσθετική ομάδα των πραγματικών αριθμών. Για κάθε $f \in C^k(A)$ ορίζεται ο διαφορίσιμος $df \in C^{k-1}(A)$ με τύπο

$$(df)(c) = f(\partial c), \quad c \in C_{k-1}(A).$$

(α) Να αποδειχθεί ότι $df \circ d = 0$

(β) Να αποδειχθεί ότι το d είναι

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \mathcal{O}^k(A) & \xrightarrow{d} & \mathcal{O}^{k-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\ & & \int \downarrow & & \int \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & C^k(A) & \xrightarrow{d} & C^{k-1}(A) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

είναι μεταθετικό, όπου $\int: \mathcal{O}^k(A) \ni \omega \mapsto \int \omega \in \text{Hom}(C_k(A), \mathbb{R})$.

12. Έστω $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ ένα μιγαδικό πολυώνυμο και $\gamma_{R,n}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ο k -κύβος με τύπο

$$\gamma_{R,n}(s) = (R \cos 2\pi ns, R \sin 2\pi ns), \quad R > 0, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0.$$

Θετούμε $\gamma_{R,t} = f \circ \gamma_{R,t}$. Έστω $\gamma: [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ο 2 -κύβος με τύπο

$$\gamma(s,t) = t \gamma_{R,n}(s) + (1-t) \gamma_{R,t}(s)$$

(α) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $R > 0$ ώστε $\gamma([0,1]^2) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(β) Να δείχθεί ότι $\partial \gamma = \gamma_{R,t} - \gamma_{R,n}$

(γ) Έστω $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Να αποδειχθεί ότι ω είναι f -εξίτητο για κάθε $|z| \in \mathbb{R}$ τότε $\int_{\partial \gamma} \omega = 0$

(δ) Να αποδειχθεί ότι το f έχει ταλάνιστρον για $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ στο \mathbb{C} .

13. Έστω $A, B \subset \mathbb{R}^n$ δυο ανοιχτά σύνολα και $F: A \rightarrow B$ μια C^∞ αμφιδιαφορισή. Δείξτε ότι η $F^*: \mathcal{O}(B) \rightarrow \mathcal{O}(A)$ είναι ισομορφισμός

14. Έστω $A \subset \mathbb{C}$ ένα ανοιχτό σύνολο. Μια μιγαδική k -μορφή στο A είναι της μορφής $\omega + i\theta$, όπου $i = \sqrt{-1}$ και οι ω, θ είναι πραγματικές k -μορφές στο A , $k=0,1,2$. Ορίζεται

$$(\omega + i\theta) \wedge (\eta + i\lambda) = (\omega \wedge \eta - \theta \wedge \lambda) + i(\theta \wedge \eta + \omega \wedge \lambda)$$

$$d(\omega + i\theta) = d\omega + id\theta \quad \text{και}$$

$$\int_{\gamma} \omega + i\theta = \int_{\gamma} \omega + i \int_{\gamma} \theta \quad \text{για κάθε } k\text{-κύβο } \gamma \text{ στο } A.$$

Θέτουμε επίσης $dz = dx + i dy$, όπου dx, dy είναι οι βασικές 1-μορφές (τυχαφαικικές) στο A .

(α) Να αποδειχθεί ότι για συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ολοκλήρωτη τότε και μόνο τότε όταν $d(f dz) = 0$

(β) Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ μια ολοκλήρωτη συνάρτηση, και $\gamma: [0, 1] \rightarrow A$ ένας 1-κύβλος για τον οποίο υπάρχει 2-κύβλος $C \in \mathcal{O}_2(A)$ ώστε $\gamma = \partial C$. Να αποδειχθεί ότι $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

(γ) Έστω $z_0 \in A$ και $0 < r \leq R$ ώστε $S(z_0, R) \subset A$. Αν $h: f: A \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ολοκλήρωτη να δείχθει ότι

$$\int_{C(z_0, R)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

όπου $C(z_0, R) = \partial S(z_0, R)$ και $C(z_0, r) = \partial S(z_0, r)$. Συμπεράζετε απ' αυτό ότι

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, R)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

(δ) Αποδείξτε με τρόπο ανάλογο της απόδειξης του (γ) ότι

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, R)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

(ε) Να αποδειχθεί ότι κάθε φραγμένη, ολοκλήρωτη συνάρτηση $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι σταθερή (Θεώρημα του Liouville)

(Υπόδειξη: Αν $M > 0$ είναι ένα δικό φράγμα της f , αποδείξτε χρησιμοποιώντας το (δ) ότι $|f'(z)| \leq M/R$ για κάθε $R > 0$ και $z \in \mathbb{C}$, και όταν προκύπτει ότι $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$)

(στ) Να αποδειχθεί το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας.

(Υπόδειξη: αν $p(z)$ είναι ένα πολυώνυμο χωρίς κοίτες ρίζες, θεωρήστε την συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ και αποδείξτε ότι είναι φραγμένη.)

15. Δίνεται στον \mathbb{R}^3 η 2-μορφή

$$\omega = 2xz \, dy \wedge dz + dz \wedge dx - (z^2 + e^x) \, dx \wedge dy$$

Υπάρχει 1-μορφή η στο \mathbb{R}^3 ώστε $d\eta = \omega$; Αν ναι να ευρεθεί μια τέτοια 1-μορφή.

16. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο που είναι αστερόμορφο ως προς το 0.

Για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ο 1-κύβλος $\gamma_\alpha \in \mathcal{O}_z(A)$ με τύπο $\gamma_\alpha(t) = t\alpha$, $t \in [0, 1]$. Αν ω είναι μια κλειστή 1-τομή στο A , θεωρούμε την συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \int_{\gamma_x} \omega$. Να αποδειχθεί ότι $df = \omega$.

17. Έστω $A \subset \mathbb{C}$ ένα ανοιχτό σύνολο, $z_0 \in A$ και $f: A - \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ μια δόφορφη συνάρτηση της μορφής

$$f(z) = \frac{\alpha}{z - z_0} + \varphi(z)$$

όπου $\alpha \in \mathbb{C}$ και $\varphi: A \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μια δόφορφη συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $R > 0$ ισχύει $\overline{S(z_0, R)} \subset A$ ισχύει

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(z, R)} f(z) dz = \alpha$$

18. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και \mathcal{F} μια διανυσματική πεδίο στο A με κύριο μέρος $f = (f_1, \dots, f_n)$. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$i_f: \mathcal{O}(A) \rightarrow \mathcal{O}(A)$ ώστε αν $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ τότε

$$i_f \omega = \begin{cases} 0 & , \text{ αν } k=0 \\ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k} \sum_{p=1}^k (-1)^{p-1} f_{i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_p}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \end{cases}$$

Τότε $i_f(\mathcal{O}^k(A)) \subset \mathcal{O}^{k-1}(A)$

α) Να αποδειχθούν οι παρακάτω ιδιότητες των τελεστών i_f :

$$i_f(\omega \wedge \theta) = i_f \omega \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge i_f \theta, \text{ αν } \omega \in \mathcal{O}^k(A), \theta \in \mathcal{O}^l(A) \text{ και}$$

$$i_f \circ i_f = 0$$

β) Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $L_f = i_f \circ d + d \circ i_f: \mathcal{O}(A) \rightarrow \mathcal{O}(A)$

Να αποδειχθούν οι παρακάτω ιδιότητες των τελεστών L_f :

$$L_f \circ i_f = i_f \circ L_f$$

$$L_f \circ d = d \circ L_f \quad \text{και}$$

$$L_f(\omega \wedge \theta) = L_f \omega \wedge \theta + \omega \wedge L_f \theta \quad \text{για κάθε } \omega, \theta \in \mathcal{O}(A).$$

γ) Έστω \mathcal{F} το διανυσματικό πεδίο στο \mathbb{R}^n με κύριο μέρος $f(x) = x$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε C^∞ συνάρτηση $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$L_f(g dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = (k \cdot g + \sum_{i=1}^k x_i \partial_i g) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

(δ) Έστω $\varepsilon > 0$ και $f: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ για C^1 συνάρτηση. Αν $\varepsilon f(\varepsilon) + \kappa f(-\varepsilon) = 0$ για κάθε $|\varepsilon| < \varepsilon$, να αποδειχθεί ότι $f = 0$

(ε) Έστω ότι το A είναι αβελιανό ως προς το 0 στο \mathbb{R}^n . Αν $L: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια δεδομένη συνεχής συνάρτηση, να αποδειχθεί ότι η κλειστή διαφορική εξίσωση

$$\kappa \cdot u + \sum_{i=1}^n \pi_i \partial_i u = h$$

έχει μια μοναδική C^1 λύση στο A που φαίνεται δίνεται από τον τύπο

$$u(x) = \int_0^1 L(tx) t^{k-1} dt$$

Πρόκύπτει λοιπόν ότι για κάθε κ -τομή θ στο A , $\kappa \geq 1$, υπάρχει μια μοναδική αντιστροφή κ -τομή ω στο A ώστε $L_\gamma \omega = \theta$, όπου γ είναι το διανυσματικό πεδίο του (8). Ορίζεται λοιπόν ο τελεστής $L_\gamma^{-1}: \mathcal{O}^k(A) \rightarrow \mathcal{O}^k(A)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

(στ) Να αποδειχθεί ότι $L_\gamma^{-1} \circ i_\gamma = i_\gamma \circ L_\gamma^{-1}$ και $d \circ L_\gamma^{-1} = L_\gamma^{-1} \circ d$, όπου γ είναι πάντα το διανυσματικό πεδίο του (8).

(ζ) Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $K: \mathcal{O}^k(A) \rightarrow \mathcal{O}^{k-1}(A)$ με τύπο

$$K\omega = \begin{cases} (i_\gamma \circ L_\gamma^{-1})\omega & , \quad \kappa \geq 1 \\ 0 & , \quad \kappa = 0 \end{cases}$$

όπου το A θεωρείται αβελιανό και το διανυσματικό πεδίο γ όπως στο (8).

Να αποδειχθεί ότι $\omega = d(K\omega) + K(d\omega)$ για κάθε κ -τομή ω , $\kappa \geq 1$,

του A . Να αποδειχθεί επίσης ότι ο τελεστής K είναι ο ίδιος όπως στην

απόδειξη του Λήμματος του Poincaré. Αυτός είναι ένας άλλος τρόπος περιγραφή

της απόδειξης του Λήμματος του Poincaré.