

## Περιεχόμενα

ΠΡΟΛΟΓΟΣ .....	3
1. Περιγραφή του Θαλάσσιου περιβάλλοντος .....	5
1.1 Στρωματοποίηση του θαλασσινού νερού. ....	5
1.2 Η επιφάνεια της θάλασσας. ....	9
1.3 Ο πυθμένας της θάλασσας. ....	12
1.4 Στοιχεία από την ζωή στη θάλασσα. ....	13
2. Τα ακουστικά κύματα στο θαλάσσιο περιβάλλον .....	15
2.1 Η φύση των ακουστικών διαταραχών. ....	15
2.2 Ακουστικά κύματα. ....	15
2.3 Διάδοση του ήχου – Ακουστική εξίσωση. ....	16
2.3.1 Η εξίσωση συνέχειας. ....	16
2.3.2 Η εξίσωση του Euler. ....	18
2.3.3 Η καταστατική εξίσωση. ....	19
2.3.4 Η γραμμικοποιημένη κυματική εξίσωση. ....	19
2.4 Στοιχειώδεις λύσεις της ακουστικής εξίσωσης. ....	21
2.4.1 Χωρισμός μεταβλητών χώρου-χρόνου. ....	21
2.4.2 Χωρισμός μεταβλητών για την χωρική εξάρτηση της πίεσης. ....	23
2.5 Διάδοση σε ελαστικούς χώρους ακουστικών και διατμητικών κυμάτων. ....	26
2.6 Διάθλαση ακουστικών κυμάτων και Νόμος του Snell. ....	28
2.7 Ανάκλαση επίπεδων κυμάτων στην επιφάνεια ανάμεσα σε δύο κυματικά μέσα. Το πρόβλημα σε δύο διαστάσεις. ....	29
2.7.1 Εισαγωγή. ....	29
2.7.2 Ανάκλαση επίπεδων ακουστικών κυμάτων στην διεπιφάνεια ανάμεσα σε ένα ρευστό και ένα ελαστικό μέσον. ....	30
2.7.3 Ανάκλαση επίπεδων ακουστικών κυμάτων στην διεπιφάνεια ανάμεσα σε δύο ρευστά μέσα. ....	35
2.7.4 Ανάκλαση επίπεδου ηχητικού κύματος από πολυστρωματοποιημένο ρευστό μέσο. ....	38
3. Διάδοση της ηχητικής ενέργειας σε μεγάλες αποστάσεις. Γεωμετρική ακουστική .....	42
3.1 Ηχητικές ακτίνες. ....	42
3.2 Ακουστική πίεση και γεωμετρική ακουστική. ....	48
3.2.1 Εκπομπή ηχητικής ενέργειας. ....	48
3.2.2 Μονάδες μέτρησης της πίεσης και του ηχητικού πεδίου. ....	50
3.2.3 Απώλεια διάδοσης κατά μήκος μιας ηχητικής ακτίνας. ....	52
3.2.4 Ανακλάσεις στον πυθμένα. ....	54
3.3 Φυσική εξασθένηση της ηχητικής ενέργειας στο νερό και τα ιζήματα του πυθμένα. ....	55
3.4 Η εξίσωση SONAR. ....	58
4. Εισαγωγή στην επεξεργασία ακουστικών σημάτων. ....	61
4.1 Στοιχεία από την ανάλυση των ακουστικών σημάτων – Ανάλυση Fourier. ....	61
4.1.1 Ο Μετασχηματισμός Fourier. ....	62
4.1.2 Συνέλιξη. ....	64

4.1.3	Ο παλμός $\delta$ .....	65
4.1.4	Περιοδικά σήματα – Σειρές <i>Fourier</i> .....	66
4.1.5	Ο Διακριτός μετασχηματισμός <i>Fourier</i> .....	68
<b>4.2</b>	<b>Φίλτρα και θόρυβος</b> .....	73
4.2.1	Συστήματα .....	73
4.2.2	Φίλτρα .....	74
4.2.3	Θόρυβος .....	76
4.2.4	Ο θόρυβος του θαλάσσιου περιβάλλοντος .....	77
<b>4.3</b>	<b>Συσχέτιση ακουστικών σημάτων</b> .....	79
4.3.1	Διακριτά σήματα .....	79
4.3.2	Ολοκληρωτικές εκφράσεις .....	81
4.3.3	Σήματα και θόρυβος .....	82
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α. Σύνθεση αρμονικών πηγών .....		84
<b>A.1</b>	<b>Σύνθεση δύο πηγών</b> .....	86
<b>A.2</b>	<b>Σύνθεση τριών πηγών</b> .....	88
<b>A.3</b>	<b>Πολλαπλές πηγές</b> .....	89
<b>A.4</b>	<b>Πηγές κατανεμημένες συνεχώς</b> .....	91
Βιβλιογραφία .....		94

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το θαλάσσιο περιβάλλον αποτελεί μία γοητευτική περιοχή επιστημονικών αναζητήσεων, που συνδυάζουν πολλούς βασικούς τομείς της έρευνας, όπως η φυσική τα μαθηματικά και η βιολογία με τους επί μέρους κλάδους τους. Το νερό των ωκεανών και οι μεταβολές του είχε αποτελέσει πάντα αντικείμενο μελέτης ανάμεσα στους επιστήμονες μια και ουσιαστικά κυριαρχεί στη ζωή μας από τις πλέον εμφανείς εφαρμογές (ναυσιπλοΐα) μέχρι και τις πλέον αφανείς όπως η επίδραση του στις καιρικές μεταβολές. Επί πλέον η οικονομία η εθνική άμυνα και η οικολογία μιας θαλασσινής περιοχής εξαρτάται έμμεσα ή άμεσα με το νερό και τις ιδιότητές του.

Η θάλασσα είναι γενικά εχθρική σε κάθε μέσον που ο άνθρωπος επιβάλλει για την παρακολούθησή της : Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα εξασθενούν πολύ γρήγορα, τα υπόλοιπα όργανα διαβρώνονται ή αστοχούν λόγω των έντονων μεταβολών στο περιβάλλον, η τηλεπισκόπηση με δορυφόρους μόνο για επιφανειακά θαλάσσια στρώματα μπορεί να δώσει πληροφορίες ενώ ο ίδιος ο άνθρωπος δεν μπορεί να διεισδύσει σε μεγάλα βάθη. Έτσι, τα ηχητικά κύματα που μπορούν να διαδοθούν σε μεγάλες αποστάσεις στο θαλάσσιο περιβάλλον λόγω μικρής εξασθένησης, φαίνεται ότι είναι ένας φορέας πληροφορίας που μπορεί να αξιοποιηθεί για την μελέτη των ιδιοτήτων και των μεταβολών στη θάλασσα. Τα τελευταία χρόνια, ο τομέας της υποβρύχιας ακουστικής που έχει ως αντικείμενο την μελέτη των εφαρμογών διάδοσης του ήχου στη θάλασσα και συνδυάζει το θεωρητικό (μαθηματικό-φυσικό-βιολογικό) υπόβαθρο με το τεχνολογικό, αναπτύχθηκε ραγδαία και ήδη αποτελεί μια σημαντική ξεχωριστή περιοχή της ακουστικής τεχνολογίας. Στόχος της υποβρύχιας (ή θαλάσσιας) ακουστικής είναι η ανάπτυξη μεθοδολογίας και υποστηρικτικής τεχνολογίας για την αποδοτική χρήση του ήχου στη θάλασσα.

Σήμερα ο ήχος στη θάλασσα χρησιμοποιείται σε πολλές εφαρμογές που επιγραμματικά δίδονται στον επόμενο κατάλογο που κάθε άλλο παρά πλήρης μπορεί να θεωρηθεί :

- Επικοινωνίες
- Μετάδοση δεδομένων
- Αναγνώριση και εντοπισμός υποθαλάσσιων στόχων
- Αναγνώριση και εντοπισμός αντικειμένων στον βυθό (υποβρύχια αρχαιολογία)
- Αναγνώριση της σύστασης του θαλασσινού βυθού
- Παρακολούθηση των ωκεανογραφικών μεταβολών (ακουστική τομογραφία)
- Θαλάσσια βιολογία
- Αλιεία
- Ναυσιπλοΐα

Η Ακουστική Ωκεανογραφία ασχολείται με τις εφαρμογές και τα προβλήματα διάδοσης του ήχου που σχετίζονται με τις φυσικές παραμέτρους του θαλάσσιου ακουστικού μέσου στο οποίο περιλαμβάνεται η υδάτινη στήλη και ο πυθμένας.

Οι σημειώσεις του μαθήματος «Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία» που κρατάτε στα χέρια σας περιλαμβάνουν την ύλη που διδάσκεται στο ομώνυμο μάθημα του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Η επιλογή της ύλης έγινε

με τρόπο ώστε να δίδεται μία πραγματική εισαγωγή στην περιοχή της υποβρύχιας ακουστικής σε σχέση κυρίως με τις περιβαλλοντικές παραμέτρους που μελετώνται (ταχύτητα διάδοσης ήχου – θερμοκρασία, ταχύτητες διάδοσης κυμάτων συμπίεστικότητας και διατμητικών στον πυθμένα της θάλασσας). Έτσι έγινε μία επιλογή εφαρμογών που συνδυάζει την φυσική με απλά μαθηματικά μοντέλα ώστε να γίνει κατανοητό ότι η ακουστική μελέτη του θαλάσσιου περιβάλλοντος είναι εφικτή με κατάλληλη μαθηματική προσομοίωση. Για την ανάπτυξη της ύλης χρησιμοποιήθηκε η βιβλιογραφία που αναγράφεται στο τέλος των σημειώσεων.

Κάθε παρατήρηση και σχόλιο ως προς την διάρθρωση και τα περιεχόμενα των σημειώσεων είναι ευπρόσδεκτη όπως και κάθε πιθανή διόρθωση στο κείμενο. Να σημειωθεί τέλος ότι η ορολογία που χρησιμοποιήθηκε είναι η πλέον ευρέως χρησιμοποιούμενη στην περιοχή της ακουστικής αν και πολλοί αγγλικοί όροι εμφανίζονται στην ελληνική (περιορισμένη έτσι κι αλλιώς) βιβλιογραφία με διαφορετικούς τρόπους.

Η παρούσα δεύτερη έκδοση των σημειώσεων περιλαμβάνει, σε σχέση με την πρώτη, διορθώσεις και προσθήκες διευκρινήσεων σε πολλά κεφάλαια. Φυσικά απομένουν πολλά ακόμη να προστεθούν σε μελλοντική επέκταση του μαθήματος ώστε να αποτελέσει το παρόν κείμενο μια ολοκληρωμένη αναφορά στην Ακουστική Ωκεανογραφία.

Οκτώβριος 2009

Μιχάλης Ταρουδάκης  
Καθηγητής

## 1. Περιγραφή του Θαλάσσιου περιβάλλοντος

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε στην περιγραφή των στοιχείων που συνθέτουν το θαλάσσιο περιβάλλον από την άποψη της ακουστικής ωκεανογραφίας. Το θαλάσσιο περιβάλλον αποτελείται από τη στήλη του θαλασσινού νερού και τον πυθμένα, ενώ σημαντικό στοιχείο είναι η διεπιφάνεια νερού-αέρα, που στη συνέχεια θα την καλούμε «επιφάνεια» και θα την θεωρήσουμε ως το άνω σύνορο στο πεδίο ενδιαφέροντός μας. Οι βασικές παράμετροι ενδιαφέροντος για την ακουστική ωκεανογραφία είναι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στο νερό και τον πυθμένα, η ταχύτητα διάδοσης των διαμηθικών κυμάτων στον πυθμένα, η πυκνότητα των μέσων, η γεωμετρία των διαχωριστικών επιφανειών και η ανύψωση της επιφάνειας. Στις επόμενες ενότητες θα δούμε τα κύρια χαρακτηριστικά των παραμέτρων αυτών.

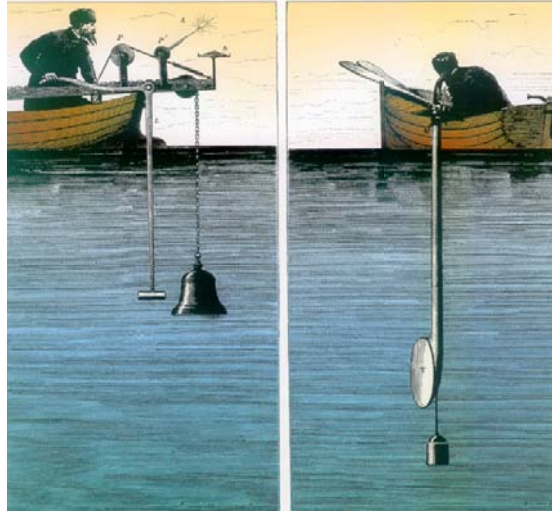
### 1.1 Στρωματοποίηση του θαλασσινού νερού.

Όταν αναφέρεται κανείς σε θέματα ακουστικής ωκεανογραφίας, η παράμετρος που συναντά σε όλα τα προβλήματα είναι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στη θάλασσα. Οι πρώτες μετρήσεις της ταχύτητας του ήχου στο νερό έγιναν πιθανότατα από τους Colladon και Sturm στη λίμνη της Γενεύης το Νοέμβριο του 1826, με χρήση απλών ακουστικών σε σχήμα χωνιού, ενός κώδωνα για την παραγωγή του ήχου και των απαραίτητων χρονομέτρων. Οι μετρήσεις που έγιναν τότε, έδωσαν τιμή 1435 m/sec πολύ κοντά στην πραγματική που σύμφωνα με τις εμπειρικές σχέσεις που θα δούμε στη συνέχεια είναι για τις δεδομένες περιβαλλοντικές συνθήκες της μέτρησης 1438 m/sec (Σχήμα 1.1). Ωστόσο η τιμή αυτή δεν είναι έτσι κι αλλιώς σταθερή, μια και εξαρτάται από διάφορες παραμέτρους του νερού, όπως η θερμοκρασία, η αλατότητα η πίεση και ακόμη το γεωγραφικό πλάτος της περιοχής. Εξ' αιτίας αυτού αλλάζει σημαντικά από περιοχή σε περιοχή, και μεταβάλλεται ακόμη και στον χρονικό ορίζοντα της ημέρας. Μία ημειμπειρική σχέση που δίδει με σημαντική ακρίβεια την ταχύτητα του ήχου σε μέσο γεωγραφικό πλάτος είναι

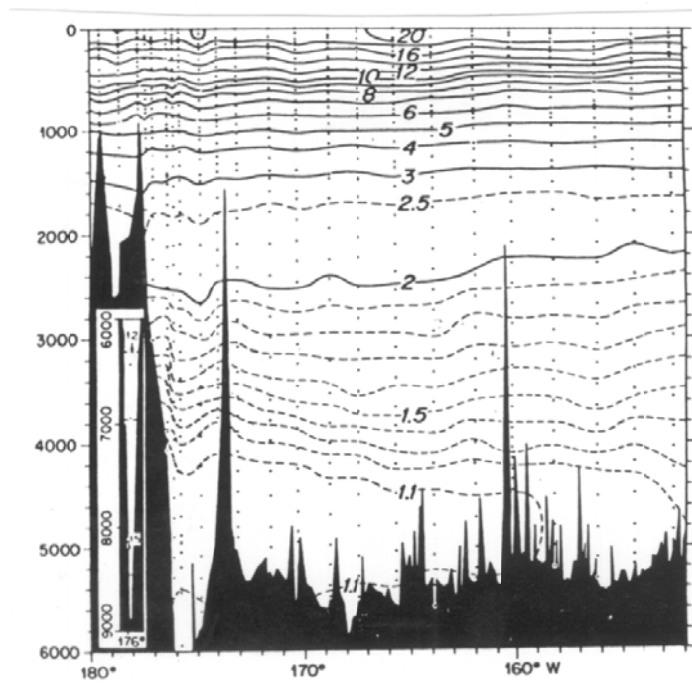
$$c = 1449.2 + 4.6 T - 0.055 T^2 + 0.00029 T^3 + (1.34 - 0.010T)(S - 35) + 0.016 z \quad (1.1.1)$$

όπου  $c$  = ταχύτητα του ήχου (m/s)  
 $T$  = θερμοκρασία (°C)  
 $S$  = αλατότητα (σε μέρη επί τοις χιλίοις)  
 $z$  = βάθος (m)

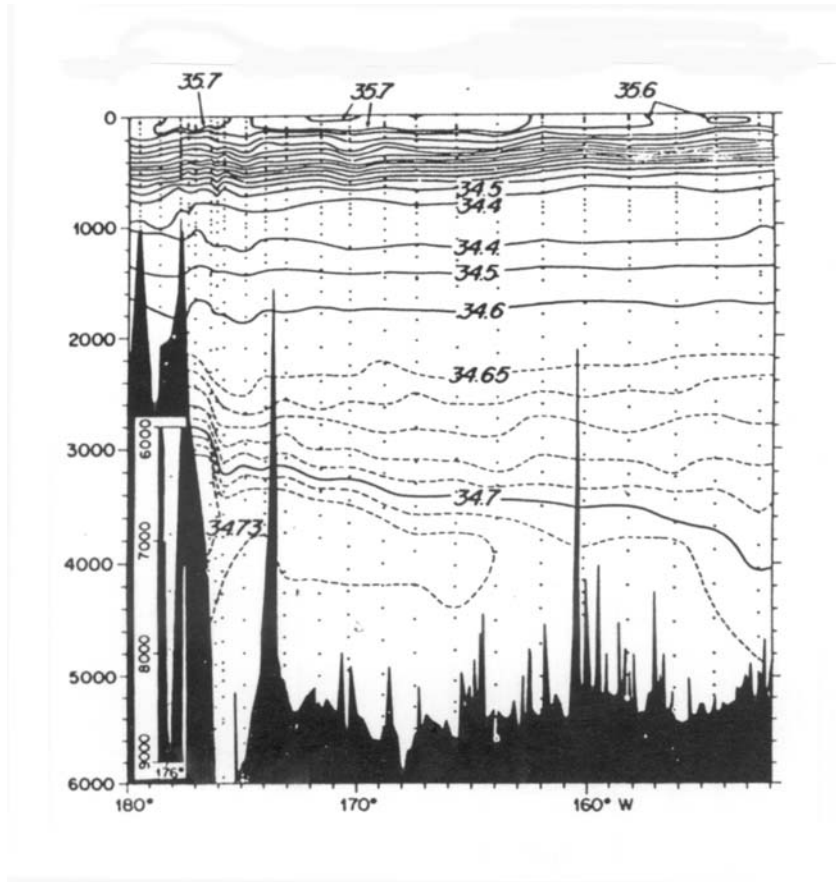
Μία αίσθηση της μεταβολής των παραμέτρων αυτών με το βάθος και κατά μήκος μιας τομής στη θάλασσα δίδουν τα σχήματα 1.2 και 1.3, ενώ στο σχήμα 1.4 βλέπουμε μία τυπική μεταβολή της ταχύτητας του ήχου με το βάθος και την απόσταση. Και οι τρεις εικόνες υποδηλώνουν το χαρακτηριστικό της οριζόντιας στρωματοποίησης της θάλασσας. Στο σχήμα 1.5 βλέπουμε ένα τυπικό προφίλ ταχύτητας για βαθιά θάλασσα, όπου έχουν χαρακτηριστεί περιοχές ανάλογα με τις μεταβολές της ταχύτητας του ήχου με το βάθος. Στο σημείο αυτό αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι οι μεταβολές αυτές είναι θεμελιώδους σημασίας για την διάδοση του ήχου στο νερό, όπως θα δούμε σε επόμενα κεφάλαια.



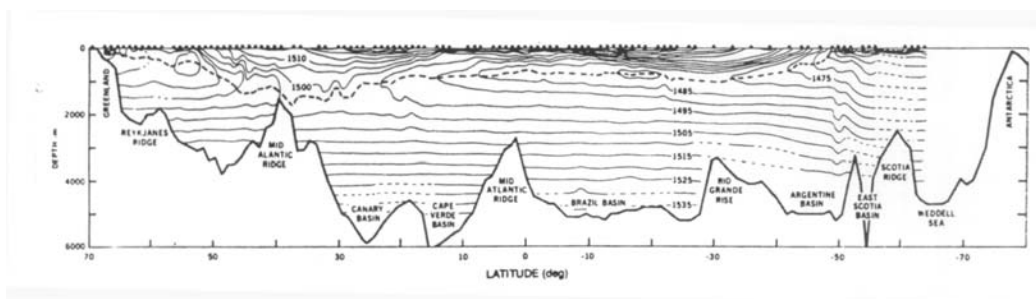
Σχήμα 1.1 Σχηματική απεικόνιση του πειράματος των Colladon και Sturm για την μέτρηση της ταχύτητας διάδοσης του ήχου στη λίμνη της Γενεύης



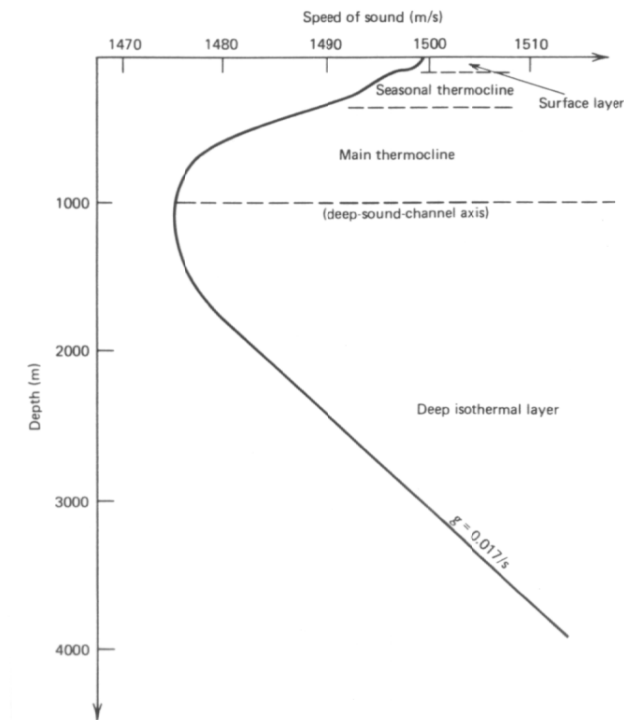
Σχήμα 1.2 Καμπύλες ίσης θερμοκρασίας στον Νότιο Ειρηνικό κατά μήκος του μεσημβρινού 28° Μετρήσεις 3-18 /7/1967



Σχήμα 1.3. Καμπύλες ίσης αλατότητας στον Νότιο Ειρηνικό κατά μήκος του μεσημβρινού 28° Μετρήσεις 3-18 /7/1967

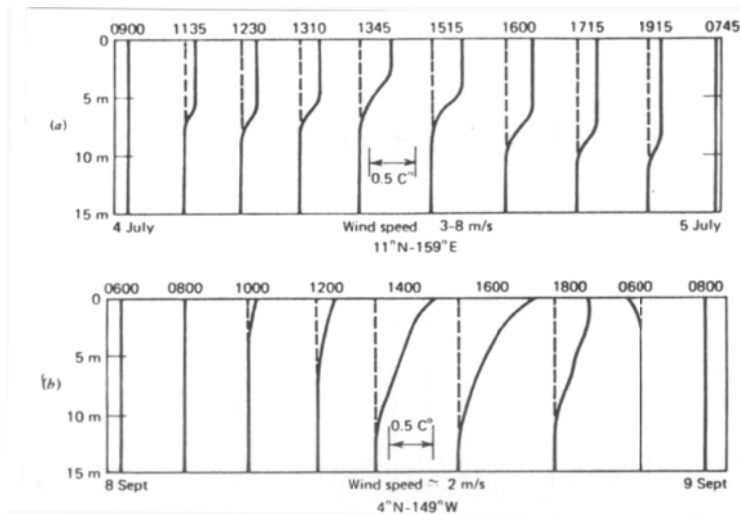


Σχήμα 1.4 Ισοταχείς κατά μήκος του Ατλαντικού Ωκεανού στον μεσημβρινό Δυτικά 30.50° Μετρήσεις του 1974. Φαίνεται το ηχητικό κανάλι που αντιστοιχεί σε τοπικά ελάχιστα της ταχύτητας διάδοσης του ήχου



Σχήμα 1.5 Τυπικό προφίλ ταχύτητας του ήχου σε βαθιά θάλασσα.

Στα σχήματα 1.6 βλέπουμε τις μεταβολές που υφίσταται το θερμοκρασιακό προφίλ κατά τη διάρκεια μιας ημέρας πολύ κοντά στην επιφάνεια. Οι μεταβολές αυτές έχουν ως συνέπεια την μεταφορά ενέργειας από την επιφάνεια σε βαθύτερα στρώματα και αντίστροφα, σε ποσό που εξαρτάται από τις τοπικές συνθήκες. Οι κρύες μάζες νερού είναι πυκνότερες, και επομένως βαρύτερες. Έχουν έτσι την τάση να καταβυθίζονται και να αντικαθίστανται από θερμότερες μάζες, εάν αυτές υπάρχουν, από βαθύτερα στρώματα. Η ανταλλαγή αυτή μαζών και η συνεπαγόμενη ανάμειξη μπορεί να δημιουργήσει τελικά ένα ισόθερμο στρώμα νερού κοντά στην επιφάνεια που ονομάζεται στρώμα ανάμειξης (mixed layer) που χαρακτηρίζεται από πρακτικά σταθερή ταχύτητα διάδοσης.



Σχήμα 1.6 Θερμοκρασιακά προφίλ σε δύο περιοχές όπως μετρήθηκαν κατά τη διάρκεια ενός 24 ώρου. Μετρήσεις του 1968.



Κάτω από το ισόθερμο στρώμα παρατηρείται γρήγορη μείωση της θερμοκρασίας με το βάθος που ισοδυναμεί με μείωση της ταχύτητας διάδοσης του ήχου. Η περιοχή αυτή ονομάζεται θερμοκλινής (Thermocline) και ακολουθείται από μία περιοχή με περίπου σταθερή θερμοκρασία. Μετά από αυτό το στρώμα η συνεχής αύξηση της πίεσης έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της ταχύτητας διάδοσης του ήχου. Το βάθος στο οποίο παρατηρείται το ελάχιστο της ταχύτητας διάδοσης του ήχου χαρακτηρίζει τον άξονα του ηχητικού καναλιού, το οποίο με τη σειρά του ορίζεται από βάθη στα οποία παρατηρείται ίση (αλλά τοπικά μέγιστη) ταχύτητα διάδοσης του ήχου πάνω και κάτω από τον ηχητικό άξονα. Ένα ηχητικό κανάλι παρουσιάζει εξαιρετικά χαρακτηριστικά ακουστικής διάδοσης, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Θα πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι στην πραγματικότητα η θάλασσα δεν είναι ακίνητη. Κινήσεις των μαζών της παρατηρούνται συνεχώς και σχετίζονται με πολυποίκιλες ωκεανογραφικές διεργασίες. Στις διεργασίες αυτές θα πρέπει να περιλάβουμε την κίνηση της επιφάνειας που δημιουργεί μεταβολές ακόμη και σε κλίμακα δευτερολέπτων, εσωτερικά κύματα με περιόδους από λεπτά σε ώρες, ημέρες, ή ακόμη και εποχιακές. Φαινόμενα κινήσεων όπως αυτά που αναφέραμε είναι περισσότερο συχνά κοντά στην επιφάνεια της θάλασσας, όπου παρατηρούνται και οι πιο έντονες θερμοκρασιακές μεταβολές, αλλά παρατηρούνται επίσης τύρβη και θερμοκρασιακές μικρομεταβολές ακόμη και σε μεγάλα βάθη που οδηγούν σε κινήσεις των υδάτινων μαζών και μεταβολές στην ταχύτητα διάδοσης του ήχου. Σε ό,τι αφορά στα εσωτερικά κύματα, αυτά οφείλονται σε βαρυτικές διαφορές ανάμεσα σε μάζες νερού διαφορετικής πυκνότητας και η επίδραση τους είναι εμφανής ακόμη και σε μεγάλες αποστάσεις από το σημείο στο οποίο γεννάται το φαινόμενο.

Γενικά οι μεταβολές της ταχύτητας του ήχου στο νερό είναι έντονες τόσο χωρικά όσο και χρονικά και πολλές φορές δεν είναι εφικτή η αντιμετώπιση προβλημάτων που σχετίζονται με την ταχύτητα του ήχου στα πλαίσια κάποιας ντετερμινιστικής θεώρησης. Στις περιπτώσεις αυτές η στοχαστική θεώρηση είναι περισσότερο κοντά στην πραγματική μοντελοποίηση του προβλήματος.

Η πυκνότητα του θαλασσινού νερού ( $\rho$ ) εξαρτάται κυρίως από την αλατότητα του ( $S$ ) και για τις συνήθεις εφαρμογές μπορεί να θεωρηθεί σταθερή συναρτήσε του βάθους και του χρόνου. Έτσι για τις εφαρμογές μας θεωρείται πρακτικά σταθερή. Μάλιστα η τιμή που συνήθως χρησιμοποιείται είναι  $1000 \text{ kg/m}^3$  αν και στο θαλασσινό νερό μία μέση τιμή είναι  $1025 \text{ kg/m}^3$ .

## 1.2 Η επιφάνεια της θάλασσας.

Η επιφάνεια της θάλασσας αποτελεί σύνορο στην μελέτη των προβλημάτων που σχετίζονται με την ωκεανογραφία. Αν και για την υποβρύχια ακουστική η επιφάνεια της θάλασσας αντιμετωπίζεται με απλουστευτικές παραδοχές όπως θα δούμε στη συνέχεια, σε πολλές περιπτώσεις (π.χ. στην μελέτη του θορύβου του περιβάλλοντος) θα πρέπει να ληφθούν υπ'οψιν πολλά από τα γεωμετρικά και κινητικά χαρακτηριστικά της που σχετίζονται με τα **κύματα επιφανείας** που είναι αυτά που παρατηρούμε με το μάτι. Τα κύματα αυτά ποικίλουν σε μέγεθος και συχνότητα αλλά και με βάση την ενέργεια που μεταφέρουν. Τα πιο μικρά σε μέγεθος κύματα με μήκος κύματος που συνήθως δεν υπερβαίνει τα 2 εκατοστά εξαρτώνται από την επιφανειακή τάση στο σύνορο νερού-αέρα. Ονομάζονται *κύματα επιφανειακής τάσης* (*capillary*



Σχήμα 1.7 Κύματα βαρύτητας στην επιφάνεια της θάλασσας

waves) και δεν μας απασχολούν ιδιαίτερα στα πλαίσια της ακουστικής ωκεανογραφίας.

Αντίθετα, τα κύματα βαρύτητας (*gravity waves*) που είναι εκείνα που παρατηρεί κανείς περισσότερο, σχετίζονται με την βαρύτητα που είναι η αιτία που τα διατηρεί μετά την δημιουργία τους. Οι έννοιες «πλάτος» και «περίοδος» των κυμάτων αυτών ενδιαφέρουν την θαλάσσια υδροδυναμική καθώς καθορίζουν και την συμπεριφορά των πλωτών μέσων. Επειδή τα κύματα αυτά είναι σύνθετα από την άποψη της ανάλυσής τους σε «μήκος» και «συχνότητα», η μελέτη τους ξεκινά από την θεώρηση των χαρακτηριστικών τους σε μία συχνότητα και στη συνέχεια γίνεται η σύνθεσή των συνιστωσών τους. Έτσι, μπορούμε να αναφερθούμε σε μία τυπική συχνότητα  $f$  και να ορίσουμε μεγέθη όπως η *φασική ταχύτητα* που είναι η ταχύτητα διάδοσης της συνιστώσας του κύματος βαρύτητας συχνότητας  $f$  από τη σχέση

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad (1.2.1)$$

όπου  $g$  είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας  $= 9.8 \text{ m/s}^2$  και  $k$  είναι ο «αριθμός κύματος» οριζόμενος ως

$$k = \omega / c, \quad (1.2.2)$$

όπου  $\omega$  είναι η κυκλική συχνότητα ( $\omega = 2\pi f$ )  
 $f$  είναι η συχνότητα σε Hz

Στην περίπτωση που θεωρηθεί και η επιφανειακή τάση στον κυματισμό τότε η φασική ταχύτητα δίδεται από την σχέση

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho}} \quad (1.2.3)$$

όπου

$\sigma$  είναι η επιφανειακή τάση (τυπική τιμή  $7.4 \times 10^{-2} \text{ N/m}$ ) και  
 $\rho$  είναι η πυκνότητα του νερού ( $\text{kg/m}^3$ ).

Από την σχέση (1.2.3) βλέπουμε ότι όταν η συχνότητα είναι μεγάλη ( $k$  μεγάλο), ο δεύτερος όρος στην ρίζα της ανωτέρω σχέσης κυριαρχεί στην έκφραση της ταχύτητας

και συνεπώς η φασική ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων επιφανείας καθορίζεται από την ταχύτητα των κυμάτων της επιφανειακής τάσης.

Η περίοδος ενός κύματος είναι

$$T = 1/f \quad (1.2.4)$$

και το μήκος κύματος

$$\lambda = cT \quad (1.2.5)$$

Για τους ωκεανογράφους, βαθύ θεωρείται το νερό όταν το βάθος του ( $D$ ) υπερβαίνει το ήμισυ του μέγιστου μήκους κύματος του φάσματος των επιφανειακών κυματισμών ( $D > \lambda/2$ ).

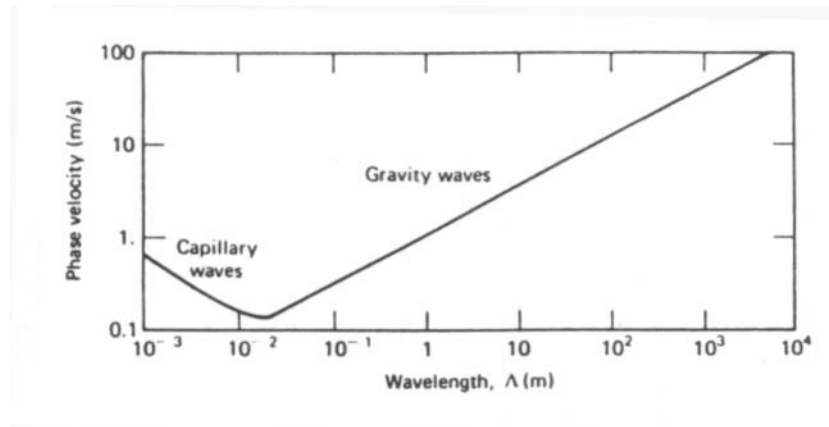
Είναι προφανές ότι η φασική ταχύτητα των κυμάτων βαρύτητας αυξάνει με το μήκος κύματος ενώ αντίθετα στα κύματα επιφανειακής τάσης μειώνεται με το μήκος κύματος. Το ελάχιστο παρατηρείται σε μήκος κύματος 1.73 cm και είναι της τάξης των 23.1 m/sec (Σχήμα 1.8).

Στην πραγματικότητα βέβαια τα κύματα επιφανείας της θάλασσας δεν χαρακτηρίζονται από ένα μόνο μήκος κύματος ούτε από μία μόνο διεύθυνση διάδοσης. Περισσότεροι κυματικοί σχηματισμοί διαφορετικού πλάτους μπορεί να συνθέτουν τη σύνθετη διαδικασία από την οποία προκύπτει το σχήμα και η χρονική μεταβολή της επιφάνειας της θάλασσας. Οι πολλές συχνότητες που συμμετέχουν στο φαινόμενο συνθέτουν ένα σύνθετο φάσμα και ένα πολύπλοκο κυματισμό στον οποίο πρέπει να ορισθεί ένα πλάτος και μία περίοδος.

Η ταχύτητα διάδοσης ενός σύνθετου κυματισμού, καθορίζεται από την ταχύτητα ομάδας (*group velocity*) που δίδεται από την σχέση

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (1.2.6)$$

Με βάση τα παραπάνω είναι φανερό ότι δεν είναι δυνατός ο ντετερμινιστικός υπολογισμός του σχήματος της επιφάνειας της θάλασσας. Παρ' όλα αυτά απλοποιημένα γεωμετρικά σχήματα (π.χ. ημιτονοειδείς ανυψώσεις) έχουν χρησιμοποιηθεί για την μελέτη ακουστικών φαινομένων που σχετίζονται με την επιφάνεια της θάλασσας, έχοντας υπ' όψιν ότι το πραγματικό φαινόμενο μπορεί να μελετηθεί με επαλληλία λύσεων που κάθε μία από αυτές αφορά συγκεκριμένο ημιτονοειδές σχήμα επιφανείας, (σύνθεση Fourier). Σε άλλες πάλι περιπτώσεις, και ιδιαίτερα όταν το ακουστικό κύμα έχει μεγάλο μήκος σε σχέση με την μέγιστη ανύψωση της επιφανείας, χρησιμοποιείται η έννοια της τραχύτητας που την χαρακτηρίζει ένα μέσο ύψος ανύψωσης, και τα σχετικά προβλήματα επιλύονται με αναφορά σε μία επίπεδη επιφάνεια και η λύση διαταράσσεται με βάση την θεωρούμενη τραχύτητα της επιφανείας.



Σχήμα 1.8 Φασική ταχύτητα κυμάτων τριβής και βαρύτητας ως συνάρτηση του μήκους κύματος.

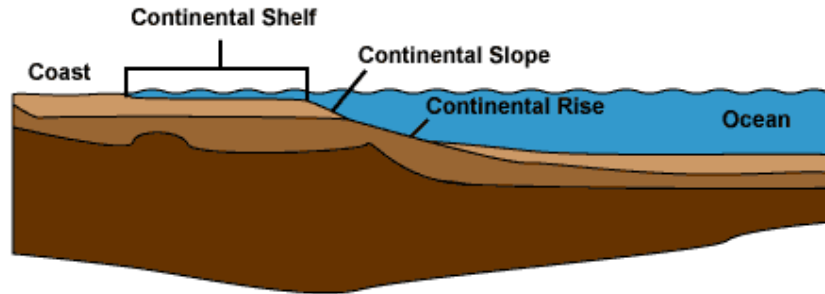
### 1.3 Ο πυθμένας της θάλασσας.

Ο πυθμένας της θάλασσας παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην ακουστική ωκεανογραφία. Δεν είναι τόσο η γεωλογική του συμπεριφορά που θα μας απασχολήσει εδώ, όσο εκείνη ενός ακουστικού μέσου και για το λόγο αυτό θα δώσουμε αργότερα μία γεωμετρική περιγραφή και ένα κατάλογο των ιδιοτήτων του που αφορούν τη διάδοση των ακουστικών και διατμητικών κυμάτων σ' αυτόν.

Περίληπτικά, μπορούμε να πούμε ότι γεωλογικά η προέλευση του θαλασσινού βυθού είναι το εσωτερικό της γης και το μάγμα το οποίο ανέρχεται από το κέντρο της γης και δημιουργεί μικρές ανυψώσεις υλικών, οι οποίες μίκραιναν σιγά-σιγά, καθώς τα υλικά μετακινούνται και εξαπλώνονται σε διπλανούς χώρους. Παράλληλα υπάρχουν καταβυθίσεις υλικών σε κοιλάδες και η όλη διαδικασία είναι αργή μεν σε απόλυτο χρόνο, γρήγορη δε στον γεωλογικό χρόνο καθώς η εξάπλωση των υλικών μπορεί να είναι μέχρι και 10 cm/χρόνο. Τα στρώματα της θάλασσας που έλκουν την προέλευσή τους από τις ως άνω διαδικασίες θεωρούνται ηφαιστειογενούς προέλευσης.

Παράλληλα καθιζάνουν στον πυθμένα της θάλασσας υλικά βιολογικής προέλευσης (ζωικής ή φυτικής), ενώ υπάρχει και παράσυρση και καθίζηση υλικών από την ξηρά, ιδιαίτερα κοντά στις εκβολές ποταμών. Κοντά στις ακτές η διαδικασία ιζηματογένεσης είναι ασταθής ενώ τα θαλασσινά ιζήματα δεν έχουν αρκετή ακαμψία και συμπεριφέρονται πρακτικά ως ρευστά. Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία στην μοντελοποίηση της αλληλεπίδρασης των κυματικών φαινομένων που σχετίζονται με την διάδοση του ήχου από το νερό στα θαλασσινά ιζήματα και αντίστροφα. Ιδιαίτερα, επειδή όπως θα δούμε στη συνέχεια η ανάκλαση και η διάδοση της ακουστικής ενέργειας στον πυθμένα εξαρτάται από τις παραμέτρους του, η ακουστική διακρίβωση της σύστασης του βυθού είναι συνήθως πρακτική στην θαλάσσια γεωφυσική.

Να σημειώσουμε τέλος ότι η τραχύτητα της διαχωριστικής επιφάνειας νερού-πυθμένα είναι ιδιαίτερα σημαντικός παράγοντας που άλλοτε επιδρά θετικά και άλλοτε αρνητικά στις εφαρμογές της ακουστικής ωκεανογραφίας.



Σχήμα 1.9 Σχηματικό διάγραμμα τομής του θαλάσσιου περιβάλλοντος σε παράκτια περιοχή.

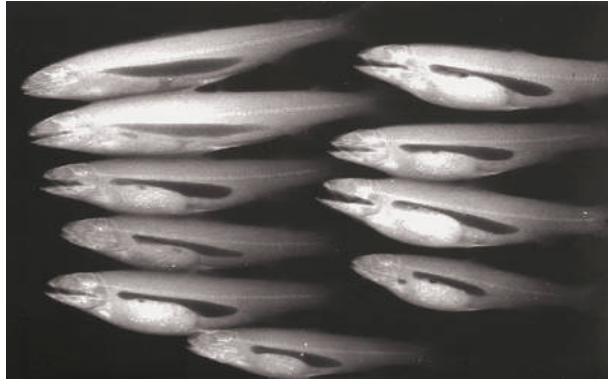
Στο σχήμα 1.9 βλέπουμε ένα σχηματικό διάγραμμα που απεικονίζει την δομή του πυθμένα κοντά σε μία ακτή. Τα ανοικτά χρώματα αντιστοιχούν σε μαλακά υλικά (μικρής πυκνότητας και μεγάλης περιεκτικότητας σε νερό - για τα θαλασσινά ιζήματα) ενώ τα πιο σκούρα χρώματα αντιστοιχούν σε σκληρά υλικά. Παρατηρείστε την στρωματοποίηση των ιζημάτων που λόγω βαρύτητας είναι σχεδόν οριζόντια κάτω από την υδάτινη στήλη.

#### 1.4 Στοιχεία από την ζωή στη θάλασσα

Η ζωή στη θάλασσα αποτελείται από μονάδες που ως προς τις διαστάσεις ποικίλουν από τις εξαιρετικά μικρές διαστάσεις των στοιχείων που αποτελούν το πλανκτόν, έως τις διαστάσεις των μεγάλων κυτών. Οι μικρών διαστάσεων βιολογικές μάζες εμφανίζονται στη θάλασσα ως συγκεντρώσεις ρευστού διαφορετικής πυκνότητας σε σχέση με το νερό και αποτελούν την βασική πηγή ανομοιογενειών σ' αυτό. Εάν ο ερευνητής ακουστικός δεν ενδιαφέρεται για την διακρίβωση της σύνθεσης των υλικών αυτών, οι βιολογικές αυτές συγκεντρώσεις αποτελούν ανεπιθύμητους σχηματισμούς που περιορίζουν την εμβέλεια των ακουστικών συσκευών, καθώς επηρεάζουν αρνητικά τη διάδοση του ήχου στη θάλασσα.

Πηγαίνοντας σε μεγαλύτερα μεγέθη θαλάσσιας ζωής, συζητάμε για την πιθανότητα σκέδασης της ακουστικής ενέργειας από τα στοιχεία, των οποίων το μέγεθος σε σχέση με το μήκος κύματος καθορίζουν την έντασή τους ως στόχων στη θάλασσα. Η έντασή τους εξαρτάται επίσης από το πόσο διαφέρει η πυκνότητά τους αλλά και οι υπόλοιπες ακουστικές παράμετροι σε σχέση με το περιβάλλον νερό. Ένας απλοποιημένος κανόνας ορίζει ότι ένας θαλάσσιος οργανισμός είναι ενεργός ως σκεδαστής εάν η ισοδύναμη διάστασή του είναι μεγαλύτερη από το μήκος κύματος. Είναι αυτονόητο ότι μία συγκέντρωση οργανισμών είναι πολύ περισσότερο ενεργή ως σκεδαστής, ανεξάρτητα από το μέγεθος των μεμονωμένων οργανισμών.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι θαλάσσιοι οργανισμοί πολλές φορές διαθέτουν ένα εσωτερικό κοίλωμα (νηκτική κύστη), το οποίο χρησιμοποιείται από αυτούς ως στοιχείο πλευστότητας και το οποίο παίζει επίσης ένα σημαντικό ρόλο στην ακουστική διάδοση. Είναι χαρακτηριστικό ότι η αναγνώριση πολλών ειδών θαλάσσιας ζωής γίνεται μέσω της νηκτικής κύστης και είναι τόσο περισσότερο αποδοτική όσο πιο κοντά είναι η συχνότητα του ακουστικού κύματος στην ιδιοσυχνότητα της κύστης (Σχήμα 1.10). Να σημειώσουμε εδώ ότι οι ακουστικές ιδιότητες των θαλάσσιων οργανισμών και ιδιαίτερα των κητωδών (φάλαινες, δελφίνια κ.λ.π.) συνιστούν τον ιδιαίτερα ενδιαφέροντα κλάδο της **θαλάσσιας βιοακουστικής**



Σχήμα 1.10 Η ηχητική κύστη ομάδας ψαριών όπως αυτή διακρίνεται σε σχετική ακτινογραφία



## 2. Τα ακουστικά κύματα στο θαλάσσιο περιβάλλον

**Η** ακουστική ωκεανογραφία επικεντρώνεται γύρω από την διάδοση της ακουστικής ενέργειας στο νερό και στα γειτονικά μέσα του νερού και επομένως η μελέτη των συνθηκών διάδοσης και αλληλεπίδρασης με τα σύνορα ενός ακουστικού μέσου είναι η βάση της έρευνας στην συγκεκριμένη θεματική περιοχή. Στα κεφάλαιο 2 θα παρουσιάσουμε τα βασικά σημεία της κυματικής θεωρίας περιορίζοντας την μαθηματική ανάλυση στα επίπεδα κύματα και στα φαινόμενα τοπικής διάδοσης και ανάκλασης κυμάτων ανάμεσα σε διεπιφάνειες. Στο επόμενο κεφάλαιο 3 θα παρουσιάσουμε στοιχεία της γεωμετρικής ακουστικής με βάση την οποία μπορεί με ένα σχετικά απλό και κατανοητό τρόπο να μελετήσει την διάδοση του ήχου σε ένα ακουστικό μέσο.

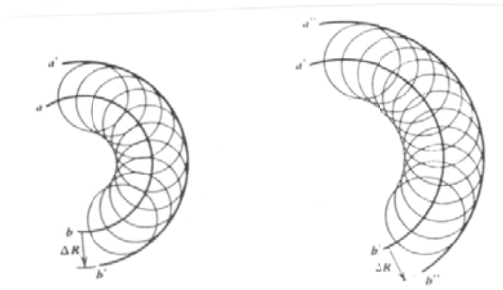
### 2.1 Η φύση των ακουστικών διαταραχών.

Ένα ακουστικό κύμα είναι μία διαταραχή της πίεσης ενός μέσου που διαδίδεται μέσα στο μέσον αυτό. Για να γίνει δυνατή η μετάδοση της διαταραχής, το μέσον πρέπει να είναι συμπίεστο (να επιτρέπει αυξομειώσεις της πυκνότητας) και τα ακουστικά κύματα χαρακτηρίζονται ως κύματα συμπίεστικότητας (compressional waves). Η διαταραχή προέρχεται από την ακουστική πηγή που με κάποιο φυσικό τρόπο (π.χ. ταλάντωση ή έκρηξη) διαταράσσει την κατάσταση ισορροπίας του μέσου με έμφαση στα κινητικά χαρακτηριστικά των στοιχειωδών σωματιδίων που το αποτελούν και προκαλεί αυξομειώσεις των μεγεθών που υπεισέρχονται στην μηχανική συμπεριφορά του υλικού, όπως είναι η πυκνότητα, η πίεση, ή η ταχύτητα των στοιχειωδών σωματιδίων. Ανάλογα με το μέγεθος της διαταραχής η πηγή χαρακτηρίζεται ως μεγάλης ή μικρής έντασης. Είναι αυτονόητο ότι η ακουστική διαταραχή προσδίδει ενέργεια στο σύστημα που χαρακτηρίζεται ως “ακουστική ενέργεια”.

### 2.2 Ακουστικά κύματα.

Η ακουστική διαταραχή διαδίδεται στο ακουστικό μέσον με μία διαδικασία που πολύ απλά μπορεί να περιγραφεί ως μία διαδοχική διέγερση των στοιχειωδών σωματιδίων του ακουστικού μέσου. Εάν θεωρήσουμε μία σημειακή πηγή, η αρχή του Huygens μας δίνει παραστατικά τη διαδικασία αυτή για ομογενή και ισότροπα μέσα. Σύμφωνα λοιπόν με αυτήν, μία διαταραχή που έχει φτάσει σε συγκεκριμένο σημείο του ακουστικού χώρου δρα ως νέα πηγή που λόγω συμμετρίας στέλνει ακουστική ενέργεια σε μέτωπα που έχουν τη μορφή σφαιρικών επιφανειών. Συνθέτοντας τις νέες αυτές επιφάνειες παίρνει κανείς το νέο «μέτωπο κύματος»<sup>1</sup> κ.ο.κ.. Η ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής παίρνει συγκεκριμένη τιμή που μπορεί να μεταβάλλεται με τον χώρο και τον χρόνο. Εάν η ταχύτητα θεωρηθεί σταθερή και ίση με  $c$ , η διανυθείσα από το μέτωπο κύματος απόσταση σε χρόνο  $\Delta t$  είναι  $\Delta R = c \Delta t$ .

<sup>1</sup> Για ένα αυστηρότερο ορισμό του μετώπου κύματος παραπέμπουμε στο Κεφάλαιο 2.4.



Σχήμα 2.1 Η αρχή του Huygens σε ότι αφορά την εκπομπή κυμάτων από σημειακή πηγή

### 2.3 Διάδοση του ήχου – Ακουστική εξίσωση.

Η μελέτη των χαρακτηριστικών διάδοσης των κυμάτων προϋποθέτει τη διατύπωση των εξισώσεων που διέπουν τη μεταβολή των χαρακτηριστικών μεγεθών του μέσου. Τα μεγέθη αυτά είναι η **πίεση**  $p$ , η **ταχύτητα** των στοιχειωδών σωματιδίων του μέσου  $\vec{u}$  (διανυσματικό μέγεθος) και η **πυκνότητα**  $\rho$ , που είναι συναρτήσεις των χωρικών μεταβλητών και του χρόνου,  $p = p(\vec{x}, t)$ ,  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ ,  $\rho = \rho(\vec{x}, t)$  όπου με  $\vec{x}$  συμβολίζουμε τις χωρικές μεταβλητές. Δεδομένου ότι θα ασχοληθούμε με τη διάδοση του ήχου στο νερό, θα παράγουμε την ακουστική εξίσωση μόνο για ρευστά ακουστικά μέσα, στα οποία τα ακουστικά κύματα είναι διαμήκη.

Το πρόβλημα θα το μελετήσουμε κατ' αρχήν στις τρεις διαστάσεις και στη συνέχεια θα περιοριστούμε στις δύο διαστάσεις όπου και θα μελετήσουμε μερικές χαρακτηριστικές λύσεις. Η ακουστική εξίσωση προκύπτει από την εφαρμογή των βασικών εξισώσεων των ρευστών που διέπουν τις μεταβολές των χαρακτηριστικών μεγεθών του μέσου. Παρατηρώντας ότι έχουμε τρεις ανεξάρτητες ποσότητες των οποίων ζητούμε τον υπολογισμό, μπορεί κανείς να διατυπώσει την απαίτηση για την εφαρμογή τριών ανεξαρτήτων μεταξύ τους εξισώσεων που θα μας δώσουν τη δυνατότητα να διατυπώσουμε ισάριθμες εξισώσεις ανά μία για κάθε μία από τις ανωτέρω ποσότητες.

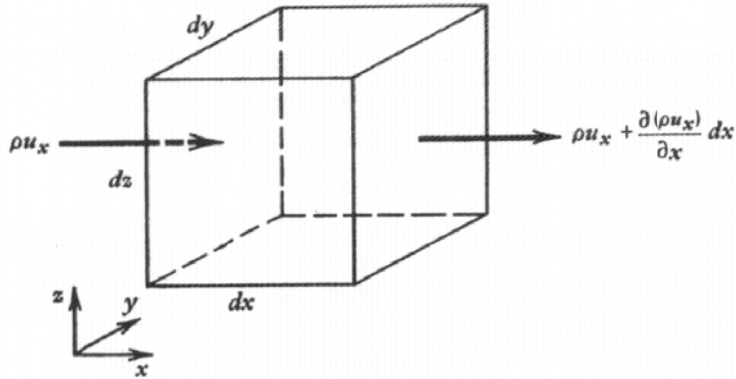
Οι τρεις εξισώσεις που θα επεξεργαστούμε είναι:

- Η εξίσωση της συνέχειας
- Η εξίσωση του Euler και
- Η καταστατική εξίσωση

#### 2.3.1 Η εξίσωση συνέχειας

Θεωρούμε έναν όγκο ρευστού  $dV = dx dy dz$  όπως στο Σχήμα 2.2 που είναι σταθερός στο χώρο και μέσω του οποίου διέρχεται το ρευστό. Ο ρυθμός ροής του υγρού διαμέσου του όγκου αυτού, πρέπει να είναι ίσος με το ρυθμό αύξησης ή μείωσης της μάζας του ρευστού στον όγκο.





Σχήμα 2.2 Στοιχειώδης όγκος ρευστού για την εφαρμογή των νόμων συνέχειας και Euler.

Η καθαρή ροή του ρευστού κατά τον άξονα των  $x$  είναι:

$$\{\rho u_x - [\rho u_x + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx]\} dydz = -\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dV \quad (2.3.1)$$

όπου  $u_x$  είναι η συνιστώσα της ταχύτητας κατά τον άξονα των  $x$ .

Εντελώς αντίστοιχα παίρνουμε τις εξισώσεις για τους υπόλοιπους άξονες και αθροίζοντας οδηγούμαστε στην ακόλουθη έκφραση για την καθαρή ροή διαμέσου του όγκου  $dV$ :

$$-\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\right] dV = -[\nabla \cdot (\rho \vec{u})] dV \quad (2.3.2)$$

Η καθαρή ροή διαμέσου του όγκου ισοδυναμεί με την μεταβολή της μάζας του όγκου στη μονάδα του χρόνου που είναι  $\frac{\partial \rho}{\partial t} dV$ . Εξισώνοντας τους ανωτέρω όρους παίρνουμε:

$$-[\nabla \cdot (\rho \vec{u})] = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.3.3)$$

που καλείται εξίσωση συνέχειας.

Όπως είναι διατυπωμένη είναι μη γραμμική μια και στον πρώτο όρο εμφανίζεται το γινόμενο της πυκνότητας επί την ταχύτητα που είναι και οι δύο άγνωστες συναρτήσεις. Στην συνέχεια θα δούμε πως μπορεί να εφαρμοστεί μία διαδικασία γραμμικοποίησης που θα μας οδηγήσει στην γραμμικοποιημένη ακουστική εξίσωση που είναι γνωστή απλά ως «ακουστική εξίσωση».

### 2.3.2 Η εξίσωση του Euler

Θεωρούμε τώρα ένα στοιχειώδη όγκο ρευστού  $dV=dx dy dz$  που όμως κινείται με αυτό. Η επιτάχυνση της στοιχειώδους μάζας του ρευστού που περιέχεται στο όγκο είναι  $\vec{a}(\vec{x}, t) = \vec{a}(x, y, z, t)$  και σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Newton συνδέεται με την δύναμη που ενεργεί στη μάζα, μέσω της σχέσης:

$$d\vec{f} = \vec{a} dm \quad (2.3.4)$$

Εάν αμελήσουμε την συνεκτικότητα, η καθαρή δύναμη που επενεργεί στο στοιχειώδη όγκο κατά τη διεύθυνση  $x$ , οφείλεται στην καθαρή πίεση που επενεργεί στην πλευρά  $dy dz$  και είναι:

$$df_x = [p - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx)] dy dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dV \quad (2.3.5)$$

και στις τρεις διαστάσεις:

$$d\vec{f} = -\nabla p dV \quad (2.3.6)$$

Η επιτάχυνση σύμφωνα με τον ορισμό της είναι:

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(x + u_x dt, y + u_y dt, z + u_z dt, t + dt) - \vec{u}(x, y, z, t)}{dt} \quad (2.3.7)$$

Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor την ταχύτητα και κρατώντας όρους πρώτης τάξης παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (x + u_x dt, y + u_y dt, z + u_z dt, t + dt) = \\ &\vec{u}(x, y, z, t) + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} u_x dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} u_y dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} u_z dt \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

με τις παραγώγους να υπολογίζονται στο  $(x, y, z, t)$ , οπότε η επιτάχυνση είναι:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} u_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} u_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} u_z \quad (2.3.9)$$

που γράφεται:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \quad (2.3.10)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της δύναμης (σχέση 2.3.4) και τις σχέσεις 2.3.6 και 2.3.10 παίρνουμε μία σχέση ανάμεσα στην πίεση, την πυκνότητα και την ταχύτητα του μέσου:

$$-\nabla p = \rho \left\{ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right\} \quad (2.3.11)$$

Η εξίσωση αυτή γνωστή ως Εξίσωση Euler είναι και πάλι μη γραμμική.

### 2.3.3 Η καταστατική εξίσωση

Η καταστατική εξίσωση είναι χαρακτηριστική του μέσου στο οποίο διαδίδεται η κυματική διαταραχή και συσχετίζει τις μεταβολές της πίεσης και της πυκνότητας. Πολύ απλά η σχέση αυτή αποδίδεται με την εξίσωση

$$p = g(\rho) \quad (2.3.12)$$

Επαναλαμβάνεται ότι η μορφή της συνάρτησης  $g$  εξαρτάται από το υλικό μέσα στο οποίο πραγματοποιείται η διάδοση.

### 2.3.4 Η γραμμικοποιημένη κυματική εξίσωση

Στη φύση, η μεταβολή της πίεσης ενός ακουστικού μέσου που προέρχεται από μια ηχητική πηγή δημιουργεί μικρές μεταβολές των παραμέτρων του ακουστικού μέσου. Έτσι με αφετηρία τις τιμές των παραμέτρων στο μέσον όταν δεν υπάρχει ακουστική διαταραχή, μπορούμε να γράψουμε τις αντίστοιχες ποσότητες ως αθροίσματα τιμών ισορροπίας και μικρών μεταβολών:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0(\vec{x}, t) + \varepsilon \rho_1(\vec{x}, t) \\ p &= p_0(\vec{x}, t) + \varepsilon p_1(\vec{x}, t) \\ \vec{u} &= \vec{u}_0(\vec{x}, t) + \varepsilon \vec{u}_1(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

όπου η παράμετρος  $\varepsilon$  χαρακτηρίζει τις μικρές μεταβολές. Ο δείκτης 0 χαρακτηρίζει τις τιμές στο ακουστικό αδιατάρακτο μέσον, ενώ ο δείκτης 1 χαρακτηρίζει τις μεταβολές λόγω της ακουστικής διέγερσης.

Αντικαθιστώντας τις αναπαραστάσεις 2.3.13 στην εξίσωση συνέχειας 2.3.4 παίρνουμε:

$$\frac{\partial(\rho_0 + \varepsilon \rho_1)}{\partial t} + \nabla \cdot \{(\rho_0 + \varepsilon \rho_1)(\vec{u}_0 + \varepsilon \vec{u}_1)\} = 0 \quad (2.3.14)$$

Εξισώνοντας όρους ίδιας δύναμης του  $\varepsilon$  παίρνουμε:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot \{\rho_0 \vec{u}_0\} = 0 \quad (2.3.15)$$

Εάν υποθέσουμε αδιατάρακτο ρευστό σε ισορροπία ( $\vec{u}_0 = 0$ ), παίρνουμε και  $\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$  οπότε η πυκνότητα ισορροπίας δεν εξαρτάται από το χρόνο ( $\rho_0 = \rho(\vec{x})$ )

Με την ίδια υπόθεση, εξισώνουμε τους όρους πρώτης δύναμης ως προς  $\varepsilon$  :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot \{ \rho_0 \vec{u}_1 \} = 0 \quad (2.3.16)$$

Εντελώς αντίστοιχα παίρνουμε για την εξίσωση του Euler:

$$-\nabla p_1 = \rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} \quad (2.3.17)$$

όπου έχουμε επίσης αμελήσει όρους δεύτερης τάξης ως προς  $\varepsilon$  και βέβαια έχοντας επαναλάβει την υπόθεση για μηδενική ταχύτητα ισορροπίας.

Όσον αφορά στην καταστατική εξίσωση μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στη σχέση :

$$p_1 = \frac{\partial p_0}{\partial \rho_0} \rho_1 \quad (2.3.18)$$

Οι εξισώσεις 2.3.16-2.3.18 είναι αρκετές για να μας οδηγήσουν στην ακουστική εξίσωση:

Παίρνοντας την απόκλιση των δύο όρων της Euler έχουμε:

$$-\nabla^2 p_1 = \nabla \cdot \left( \rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} \right) \quad (2.3.19)$$

Παραγωγίζοντας ως προς χρόνο την εξίσωση της συνέχειας παίρνουμε:

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} + \nabla \cdot \left( \rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.3.20)$$

Από τις τελευταίες δύο εξισώσεις παίρνουμε :

$$-\nabla^2 p_1 = -\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} \quad (2.3.21)$$

Από την καταστατική εξίσωση παίρνουμε:

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{1}{\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0}} \quad (2.3.22)$$

Ορίζουμε  $\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0} \equiv c^2$  και αντικαθιστώντας την 2.3.22 στην 2.3.21 καταλήγουμε στη σχέση :

$$\nabla^2 p_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \quad (2.3.23)$$

Παρατηρούμε ότι οδηγηθήκαμε σε μια κυματική εξίσωση. Ο συντελεστής  $c$  που ορίστηκε ανωτέρω είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος και τον συναντήσαμε ήδη στην φαινομενολογική ανάλυση του προηγούμενου κεφαλαίου. Αξίζει να σημειωθεί ότι οδηγηθήκαμε σ' αυτόν μέσω της καταστατικής εξίσωσης και γι αυτό καμιά φορά η σχέση 2.3.22 λέμε ότι οδηγεί στον «θερμοδυναμικό ορισμό» της ταχύτητας διάδοσης του ήχου. Αντίστοιχα μπορούμε να οδηγηθούμε σε εξισώσεις ως προς την ταχύτητα ή την πυκνότητα που είναι και αυτές κυματικής μορφής.

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι στην εξίσωση 2.3.23 δεν υπάρχει κάποιος όρος που να μας δίδει πληροφορία για την πηγή ενέργειας (ακουστική πηγή). Αυτό συμβαίνει γιατί στην διατύπωση της εξίσωσης δεν λάβαμε υπ' όψιν μας είσοδο ενέργειας στο σύστημα. Απλά θεωρήσαμε ότι στο πεδίο διατύπωσης του προβλήματος, υπάρχει μια διαταραχή της πίεσης που έχει προκύψει με μη συγκεκριμένο τρόπο.

Με βάση την εξίσωση 2.3.23, συμπεραίνουμε ότι μία μικρή διαταραχή της δυναμικής κατάστασης ενός μέσου, οδηγεί στην παραγωγή ενός κύματος που διαδίδεται στο μέσον με ταχύτητα  $c$ . Με βάση τις υποθέσεις που έχουμε κάνει, η ταχύτητα διάδοσης εξαρτάται εν γένει από τις χωρικές μεταβλητές  $\vec{x}$ .

Η κυματική εξίσωση 2.3.23 έχει προέλθει από την γραμμικοποίηση των εξισώσεων των ρευστών (παράλειψη όρων τάξης υψηλότερης του  $\epsilon'$ ) και καλείται **γραμμικοποιημένη ακουστική εξίσωση**. Η υπόθεση ωστόσο για μικρές μεταβολές των παραμέτρων της κινηματικής κατάστασης του ρευστού στην οποία στηρίζεται δεν απέχει από την πραγματικότητα και εκφράζει την φύση των ακουστικών διαταραχών.

Να πούμε ακόμη ότι η διατύπωση ενός προβλήματος κυματικής διάδοσης στο θαλάσσιο περιβάλλον περιλαμβάνει εκτός από την βασική εξίσωση και τις κατάλληλες οριακές συνθήκες για τη συμπεριφορά της άγνωστης συνάρτησης στα σύνορα, που στην περίπτωση μας είναι η επιφάνεια της θάλασσας και οι διεπιφάνειες του πυθμένα, ενώ απαιτείται ακόμη η γνώση της επ' άπειρον συμπεριφοράς της λύσης στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού είναι εκτείνεται μέχρι εκεί. Αναλυτική παρουσίαση του προβλήματος της κυματικής διάδοσης στη θάλασσα γίνεται στο μάθημα “Κυματική Διάδοση”.

Στη συνέχεια θα δούμε λύσεις της κυματικής εξίσωσης χωρίς ειδική αναφορά σε σύνορα και άρα σε συνοριακές συνθήκες.

## 2.4 Στοιχειώδεις λύσεις της ακουστικής εξίσωσης

### 2.4.1 Χωρισμός μεταβλητών χώρου-χρόνου

Μια τεχνική για τη λύση των μερικών διαφορικών εξισώσεων υπό ορισμένες συνθήκες είναι η μέθοδος του χωρισμού μεταβλητών. Με βάση τη μέθοδο αυτή μια μερική διαφορική εξίσωση για μία συνάρτηση πολλών μεταβλητών μπορεί να χωριστεί σε μια ομάδα συνήθων διαφορικών εξισώσεων κάθε μια από τις οποίες

ορίζεται για μια συνάρτηση που εξαρτάται από μία μόνο μεταβλητή (συναρτήσεις που μεταβάλλονται ανεξάρτητα ή μία από την άλλη). Ο χωρισμός μεταβλητών δεν είναι βέβαια δυνατός σε κάθε περίπτωση. Ειδικά για την κυματική εξίσωση ο χωρισμός είναι δυνατός σε 11 συστήματα συντεταγμένων (βλ. Morse and Feshbach) και μόνον εάν οι διεπιφάνειες του προβλήματος συμπίπτουν με μία επιφάνεια συντεταγμένων των ως άνω 11 συστημάτων, Επιπλέον ο όρος  $1/c^2$  της κυματικής εξίσωσης θα πρέπει να είναι είτε άθροισμα όρων καθένας από τους οποίους εξαρτάται από μια μόνο μεταβλητή, ή να είναι ο ίδιος συνάρτηση μιας μόνο μεταβλητής. Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε ότι οι ανωτέρω όροι πληρούνται και θα οδηγηθούμε σε συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων που θα μας δώσουν τη λύση απλών σχετικά προβλημάτων που αναφέρονται στη διάδοση του ήχου στη θάλασσα.

Θα προσπαθήσουμε κατ' αρχήν να απομονώσουμε την χρονική εξάρτηση.

Θεωρούμε ότι η ακουστική πίεση μπορεί να γραφεί ως:

$$p_1(\vec{x}, t) = \bar{p}(\vec{x})T(t) \quad (2.4.1)$$

Σημειώνουμε ότι από το σημείο αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό  $p$  για τη χωρική συνιστώσα της ακουστικής πίεσης ( $p(\vec{x}) \equiv \bar{p}(\vec{x})$ ) και δεν θα πρέπει να συγχέεται με την ολική πίεση του μέσου όπως εκφράζεται από την εξίσωση 2.3.13. Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου  $c$  θα θεωρηθεί όπως έχουμε ήδη σημειώσει συνάρτηση μόνο των χωρικών μεταβλητών  $c = c(\vec{x})$ . Έτσι μπορούμε να αντικαταστήσουμε την 2.4.1 στην ακουστική εξίσωση 2.3.23 και να πάρουμε:

$$T\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} p \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (2.4.2)$$

ή

$$\frac{c^2}{p} \nabla^2 p = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (2.4.3)$$

Μια και ο αριστερός όρος της 2.4.3 είναι συνάρτηση μόνο των χωρικών μεταβλητών και ο δεξιός όρος συνάρτηση μόνο του χρόνου, για να ισχύει πάντοτε η εξίσωση, θα πρέπει κάθε όρος να ισούται με μια σταθερά. Έτσι παίρνουμε :

$$\frac{c^2}{p} \nabla^2 p = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\omega^2 \quad (2.4.4)$$

όπου το αρνητικό σημείο αλλά και η ίδια η μορφή της σταθεράς  $\omega^2$  έχουν επιλεγεί έτσι ώστε να διευκολύνονται οι μαθηματικοί χειρισμοί αφ' ενός αλλά και η φυσική ερμηνεία αφ' ετέρου. Έτσι, στην 2.4.4 αναγνωρίζει κανείς στην σταθερά  $\omega$  την κυκλική συχνότητα του κύματος.

Από την 2.4.4 παίρνουμε δύο εξισώσεις :

$$\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad (2.4.5)$$

και

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 . \quad (2.4.6)$$

Από τις εξισώσεις αυτές η πρώτη είναι γνωστή ως εξίσωση Helmholtz και διέπει την χωρική εξάρτηση της ακουστικής πίεσης για «μονοχρωματική πηγή<sup>2</sup>» ενώ η λύση της δεύτερης δίνει την χρονική εξάρτηση της ακουστικής πίεσης

Η 2.4.6 έχει ως γνωστόν δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους λύσεις :

$$T = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} , \quad (2.4.7)$$

με  $A, B$  σταθερές.

Χωρίς να χαθεί η γενικότητα της λύσης θα θεωρήσουμε ότι η σταθερά  $A$  είναι 1, και θα δεχθούμε από τις δύο πιθανές λύσεις εκείνη που αντιστοιχεί σε αρνητικό πρόσημο στον εκθέτη. Αυτό σημαίνει ότι θα μελετήσουμε πηγές οι οποίες εκπέμπουν ενέργεια στο περιβάλλον με χρονική εξάρτηση  $e^{-i\omega t}$ . Καταλήγουμε δηλαδή σε λύσεις της μορφής

$$T = e^{-i\omega t} \quad (2.4.8)$$

Κατόπιν αυτών, η λύση μας για την πίεση διαταραχής γράφεται

$$p_1(\vec{x}, t) = p(\vec{x})e^{-i\omega t} \quad (2.4.9)$$

#### 2.4.2 Χωρισμός μεταβλητών για την χωρική εξάρτηση της πίεσης

Ο λόγος που αναφερόμαστε στην ειδική μορφή της λύσης για τη συνάρτηση  $p$  είναι ότι μας ενδιαφέρει να βρούμε έκφραση για επίπεδα κύματα που θα αποτελέσουν το πρώτο ειδικό αντικείμενο της μελέτης μας. Το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο θα αναφερόμαστε είναι το καρτεσιανό, για το οποίο ο τελεστής  $\nabla^2$  παίρνει τη μορφή  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ . Θεωρώντας ακόμη ότι

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 , \quad (2.4.10)$$

όπου κάθε ένας από τους προσθετέους  $k_i$  εξαρτάται από μία μόνο μεταβλητή (την αντίστοιχη στο συμβολισμό που υιοθετήθηκε), θα κάνουμε χωρισμό των μεταβλητών και θα ζητήσουμε λύσεις της μορφής

$$p(x, y, z) = p_x(x)p_y(y)p_z(z) \quad (2.4.11)$$

Αντικαθιστώντας την ανωτέρω έκφραση στην Helmholtz και χρησιμοποιώντας την 2.4.10, παίρνουμε

<sup>2</sup> Μονοχρωματική (monochromatic) χαρακτηρίζεται μία πηγή όταν εκπέμπει σε συγκεκριμένη συχνότητα

$$\frac{\partial^2 p_x}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{p_x} + \frac{\partial^2 p_y}{\partial y^2} \cdot \frac{1}{p_y} + \frac{\partial^2 p_z}{\partial z^2} \cdot \frac{1}{p_z} + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0 \quad (2.4.12)$$

Παρατηρούμε ότι στο ανωτέρω άθροισμα έχουμε εξ προσθετέους οι οποίοι ανά δύο είναι συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Ζητάμε τα ζεύγη των όρων αυτών να είναι 0 (σταθερά χωρισμού), οπότε καταλήγουμε σε σύστημα τριών εξισώσεων :

$$\frac{d^2 p_x}{dx^2} + k_x^2 p_x = 0 \quad (2.4.13\alpha)$$

$$\frac{d^2 p_y}{dy^2} + k_y^2 p_y = 0 \quad (2.4.13\beta)$$

$$\frac{d^2 p_z}{dz^2} + k_z^2 p_z = 0 \quad (2.4.13\gamma)$$

Προσέξτε την αλλαγή στο συμβολισμό της παραγώγου που πλέον είναι συνήθης και όχι μερική παράγωγος με δεδομένο ότι κάθε μία από τις συναρτήσεις  $p_i$ ,  $i = x, y, z$  είναι συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

Στο σημείο αυτό να υπενθυμίσουμε ότι δεν έχουμε λάβει υπ' όψιν μας οριακές ή αρχικές συνθήκες στην μέχρι τώρα ανάλυση. Επομένως δεν μιλάμε ακόμη για λύση ενός προβλήματος αλλά λύσεις μιας εξίσωσης, κάνοντας ακόμη την υπόθεση ότι δεν υπάρχει πρόβλημα ως προς την εφαρμογή του χωρισμού των μεταβλητών. Κατόπιν αυτών, προχωράμε στην διατύπωση λύσεων για τις εξισώσεις 2.4.13(α-γ) που για  $k_i$  ( $i = x, y, z$ )  $\neq 0$  είναι

$$p_x(x) = A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x} \quad (2.4.14\alpha)$$

$$p_y(x) = B_1 e^{ik_y y} + B_2 e^{-ik_y y} \quad (2.4.14\beta)$$

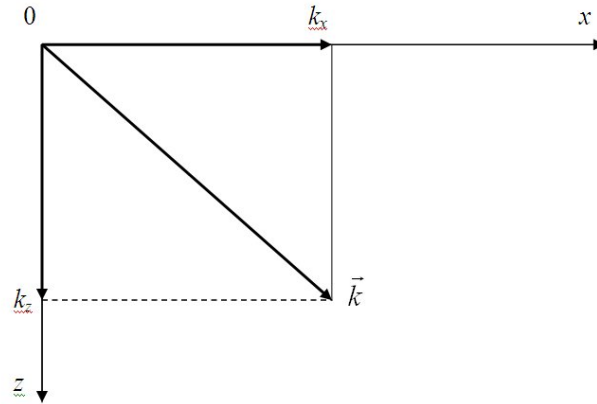
$$p_z(x) = C_1 e^{ik_z z} + C_2 e^{-ik_z z} \quad (2.4.14\gamma)$$

όπου οι συντελεστές θα υπολογιστούν εφ' όσον έχει οριστεί πλήρως το πρόβλημα και σε συνδυασμό με τις οριακές συνθήκες και τη συνθήκη της πηγής για την οποία δεν έχουμε ακόμη αναφέρει κάτι.

Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η φυσική της κυματικής διάδοσης, θα υποθέσουμε προς στιγμήν ότι η ακουστική πίεση εξαρτάται μόνο από μία μεταβλητή, έχουμε διάδοση προς μία μόνο διεύθυνση. Θεωρώντας  $x$  την διεύθυνση αυτή η ακουστική πίεση γράφεται :

$$p_1(x, t) = p_x(x) e^{-i\omega t} = (A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x}) e^{-i\omega t} = A_1 e^{i(k_x x - \omega t)} + A_2 e^{i(-k_x x - \omega t)} \quad (2.4.15)$$





Σχήμα 2.3 Ο αριθμός κύματος ως διανυσματικό μέγεθος σε δύο διαστάσεις

Από τους δύο τελευταίους όρους, και με δεδομένη την χρονική εξάρτηση της πίεσης που έχουμε επιλέξει, ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει κύμα οδεύον προς τα αυξανόμενα (θετικά)  $x$  και ο δεύτερος, κύμα οδεύον προς τα μειούμενα (αρνητικά)  $x$ . Οι συντελεστές  $A_1$  και  $A_2$  αντιπροσωπεύουν το πλάτος του κύματος και το όρισμα στην εκθετική συνάρτηση την *φάση*.

Για τις ανάγκες της θεωρίας μας θα πρέπει να ορίσουμε τα *επίπεδα κύματα*. Ένα κύμα λέγεται επίπεδο, εάν το κύμα οδεύει στον χώρο και η επιφάνεια σταθερής φάσης σε μία δεδομένη χρονική στιγμή είναι επίπεδο. Παρατηρώντας την λύση της ακουστικής εξίσωσης όπως δίδεται από την 2.4.15, βλέπουμε ότι για  $t$  σταθερό, η φάση του κύματος είναι σταθερή όταν  $x$  είναι σταθερό. Από την Αναλυτική Γεωμετρία, γνωρίζουμε ότι η επιφάνεια (στον χώρο) που ορίζεται από την εξίσωση ( $x=c$ ) είναι μία επίπεδη επιφάνεια κάθετη στον άξονα των  $x$  σε οποιοδήποτε σημείο του άξονα. Συνεπώς η λύση 2.4.15 αντιπροσωπεύει ένα επίπεδο κύμα.

Θεωρώντας το πρόβλημά μας στις τρεις διαστάσεις και κρατώντας τον πρώτο από τους δύο όρους της λύσης μας για κάθε μία από τις συναρτήσεις  $p_x, p_y, p_z$ , που σημαίνει ότι δεχόμαστε διάδοση προς μία κατεύθυνση, βλέπουμε ότι η ακουστική πίεση παίρνει τη μορφή

$$p_1(x, y, z, t) = A_1 B_1 C_1 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \quad (2.4.16)$$

και σε διανυσματική μορφή ως προς τον εκθέτη του  $e$ ,

$$p_1(x, y, z, t) = D e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (2.4.17)$$

όπου  $D = A_1 B_1 C_1$

Βλέπουμε δηλαδή ότι ο αριθμός κύματος  $k$  μπορεί να θεωρηθεί ως διανυσματικό μέγεθος με συνιστώσες  $k_x, k_y, k_z$  κατά τους αντίστοιχους άξονες. Η θεώρηση αυτή είναι συμβατή με την εξίσωση 2.4.10 που μας δίνει μία έκφραση του τετραγώνου του μέτρου του αριθμού κύματος. Στο σχήμα 2.3 βλέπουμε την γεωμετρική απεικόνιση του αριθμού κύματος με τις αντίστοιχες συνιστώσες. Παρατηρούμε τέλος ότι επιφάνειες

σταθερής φάσης είναι επίπεδα κάθετα στο διάνυσμα  $\vec{k}$ . Επομένως η 2.4.17 αντιπροσωπεύει επίσης λύση για επίπεδα κύματα, με το διάνυσμα του αριθμού κύματος να είναι κάθετο στην επιφάνεια σταθερής φάσης (μέτωπο κύματος).

## 2.5 Διάδοση σε ελαστικούς χώρους ακουστικών και διατμητικών κυμάτων.

Το ακουστικό κύμα είναι διάμηκες κύμα που διαδίδεται σε κάθε συμπιεστό μέσον. Μπορεί να δείξει κανείς ότι όλα τα βασικά μεγέθη που υπεισέρχονται σε ένα κυματικό πρόβλημα δηλαδή η πίεση, η ταχύτητα των σωματιδίων και η πυκνότητα, μπορούν να εκφραστούν μέσω μιας πραγματικής συνάρτησης που καλείται «δυναμικό μετατόπισης» (displacement potential) η κλίση του οποίου μας δίνει την μετατόπιση των στοιχειωδών σωματιδίων

$$\vec{d} = \nabla\Phi \quad (2.5.1)$$

Η μεταβολή της πίεσης του στοιχειώδους σωματιδίου ενός ελαστικού μέσου, συνδέεται με την προκαλούμενη μετατόπιση μέσω του νόμου του Hooke

$$p_1 = -\lambda\nabla \cdot d \quad (2.5.2)$$

όπου  $\lambda$  είναι το μέτρο διόγκωσης (bulk modulus) και δεν πρέπει να συγχέεται με το μήκος κύματος. Από τις 2.5.1 και 2.5.2 παίρνουμε

$$p_1 = -\lambda\nabla^2\Phi \quad (2.5.3)$$

Το δυναμικό μετατόπισης υπόκειται επίσης στην κυματική εξίσωση

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \quad (2.5.4)$$

ενώ για το μέτρο διόγκωσης ισχύει

$$\lambda = \rho c^2 \quad (2.5.5)$$

και η πίεση γράφεται στην μορφή

$$p_1 = -\rho \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \quad (2.5.6)$$

Όταν το μέσον διάδοσης της ακουστικής διαταραχής διαθέτει επαρκή ακαμψία, μπορεί να δεχθεί τη διάδοση και *διατμητικών κυμάτων* (shear waves). Η διαφορά των ακουστικών από τα διατμητικά κύματα είναι ότι τα μεν πρώτα αφορούν διαμήκεις μετατοπίσεις των στοιχειωδών σωματιδίων του μέσου διάδοσης, ενώ τα διατμητικά αφορούν εγκάρσιες μετατοπίσεις. Με άλλα λόγια στα διαμήκη κύματα (P-waves στην σεισμολογία και την γεωλογία) η διεύθυνση μετατόπισης των στοιχειωδών σωματιδίων είναι κατά την διεύθυνση διάδοσης του κύματος, ενώ στα διατμητικά κύματα (S-waves) η διεύθυνση μετατόπισης είναι κάθετη σε εκείνη της διεύθυνσης διάδοσης. Το νερό όπως και άλλα υλικά δεν διαθέτουν επαρκή ακαμψία και συνεπώς

δεν υποστηρίζουν την διάδοση διατμητικών κυμάτων. Κάτι τέτοιο όμως δεν ισχύει στην μεγάλη πλειοψηφία των θαλασσινών ιζημάτων τα οποία είναι αρκετά «άκαμπτα», υποστηρίζουν την διάδοση διατμητικών κυμάτων και επομένως σε κάθε ωκεανογραφικό σύστημα θα πρέπει να περιλάβουμε και τη μελέτη των διατμητικών κυμάτων καθώς και την αλληλεπίδρασή τους με τα ακουστικά κύματα. Δεν πρόκειται να επεκταθούμε στη σχετική ανάπτυξη μια και το μεγαλύτερο ενδιαφέρον μας είναι στην διάδοση του ήχου στο νερό και παραπέμπουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη σε εγχειρίδια μηχανικής που περιγράφουν το φαινόμενο της διάδοσης διατμητικών κυμάτων με πληρότητα. Στα πλαίσια του μαθήματός μας όμως θα δούμε το πώς η διέγερση διατμητικών κυμάτων στον πυθμένα επηρεάζει την διάδοση του ήχου στο νερό και συνεπώς είναι απαραίτητη μια μικρή εισαγωγή στην θεωρία διάδοσης και των διατμητικών κυμάτων.

Έτσι, για ομογενή και ισοτροπικά στερεά σώματα, οι εξισώσεις μικρών μεταβολών οδηγούν στη διατύπωση δύο εξισώσεων που ισχύουν ταυτόχρονα και αφορούν το δυναμικό μετατόπισης των διαμήκων κυμάτων  $\Phi$ , στο οποίο αναφερθήκαμε προηγουμένως και το δυναμικό μετατόπισης των διατμητικών κυμάτων  $\Psi$  που είναι μία διανυσματική συνάρτηση που υπόκειται και αυτή στην κυματική εξίσωση. Οι ταχύτητες διάδοσης των διαμήκων (ακουστικών) κυμάτων  $c_p$  και των διατμητικών κυμάτων  $c_s$  συνδέονται με τις σταθερές Lamè της μηχανικής (μέτρο διόγκωσης  $\lambda$  και μέτρο ελαστικότητας  $\mu$ ), μέσω των σχέσεων

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.5.7)$$

Στα επόμενα θα θεωρήσουμε ότι οι ταχύτητες διάδοσης είναι σταθερές, ενώ παρατηρούμε ότι για  $\mu=0$ , οδηγούμεθα στην περίπτωση ενός υλικού που υποστηρίζει τη διάδοση ακουστικών κυμάτων μόνο και η ταχύτητα των διαμήκων κυμάτων  $c_p$  είναι στην πραγματικότητα η ταχύτητα διάδοσης των ακουστικών κυμάτων που είδαμε προηγουμένως.

Οι δύο κυματικές εξισώσεις είναι :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (2.5.8)$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (2.5.9)$$

η συνολική μετατόπιση του στοιχειώδους σωματιδίου του ελαστικού μέσου είναι

$$\vec{d} = \nabla \Phi + \text{curl} \Psi \quad (2.5.10)$$

Υπενθυμίζεται ότι τα δυναμικά είναι συναρτήσεις των χωρικών μεταβλητών και του χρόνου

## 2.6 Διάθλαση ακουστικών κυμάτων και Νόμος του Snell.

Στην ανάπτυξη της παραγράφου αυτής θα θεωρήσουμε ότι η ακουστική πηγή βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση από την διεπιφάνεια, ώστε το μέτωπο κύματος να μπορεί να περιγραφεί πολύ καλά ως επίπεδο. Υποθέτουμε ότι μελετάμε την πρόσπτωση του κύματος στη διεπιφάνεια ανάμεσα σε δύο υλικά διαφορετικής σύστασης που χαρακτηρίζονται από διαφορετική ταχύτητα διάδοσης του ήχου  $c_1$  και  $c_2$  αντίστοιχα. Θα θεωρήσουμε ότι η επιφάνεια αυτή είναι επίπεδη και οριζόντια. Κάτω από τις συνθήκες αυτές, όλες οι μεταβολές αναφέρονται στο επίπεδο  $x,z$  και συνεπώς το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπισθεί ως δισδιάστατο.

Η πρόσπτωση του κύματος γίνεται υπό γωνία  $\theta_1$  ως προς τον κατακόρυφο άξονα (Σχήμα 2.4) όπου η γωνία ορίζεται από την φέρουσα του αριθμού κύματος και τον κάθετο στην διεπιφάνεια άξονα. Σύμφωνα με την φυσική, η πρόσπτωση ενός κύματος σε επιφάνεια που χωρίζει δύο υλικά διαφορετικής σύνθεσης επιφέρει μία ανάκλαση του κύματος, οπότε μέρος της ενέργειας επιστρέφει στο μέσο από το οποίο προσέπεσε ενώ μέρος της ενέργειας διαδίδεται στο δεύτερο μέσον (διαθλάται), εφόσον αυτό υποστηρίζει την διάδοση κυμάτων του ίδιου είδους με εκείνο του προσπίπτοντος, υπό γωνία  $\theta_2$ . Για να υπάρξει διάδοση θα πρέπει να ικανοποιούνται και ορισμένες άλλες συνθήκες όπως θα δούμε στη συνέχεια, ενώ θα πρέπει να τονισθεί ότι υπάρχει η δυνατότητα διάδοσης και άλλου είδους κυματισμού. Προς το παρόν πάντως θα επικεντρωθούμε στα ακουστικά κύματα.

Κατά την ανάκλαση κύματος από επίπεδη διεπιφάνεια δεν υπάρχει αλλοίωση της διεύθυνσης διάδοσης του κύματος στην περίπτωση της διάθλασης, το μέτωπο κύματος κατά τη διάδοσή του στο δεύτερο μέσον θα πάρει διαφορετική κλίση και η νέα γωνία διάδοσης που ορίζεται ως η γωνία που σχηματίζει η κάθετος στο μέτωπο κύματος με την κάθετο στην διεπιφάνεια θα σχετίζεται με την πρώτη, μέσω της σχέσης :

$$\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2} \quad (2.6.1)$$

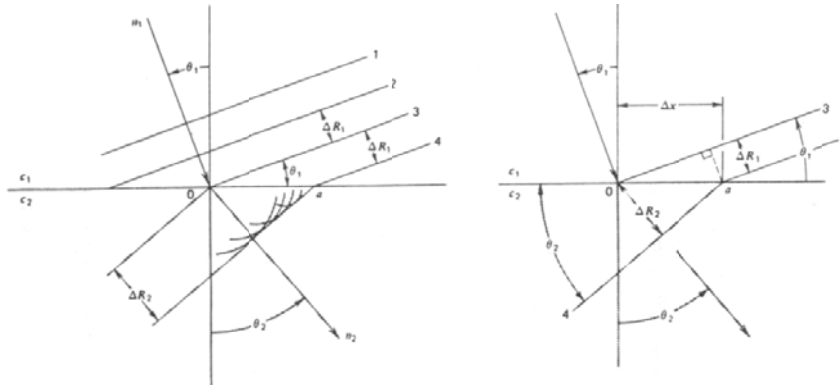
Αυτός είναι ο νόμος του Snell που η απόδειξή του μπορεί να γίνει με απλά γεωμετρικά μέσα, εάν ληφθούν υπόψιν οι απλοποιητικές παραδοχές που αναφέραμε προηγουμένως.

Έτσι, με αναφορά στο σχήμα 2.4 και θεωρώντας διάδοση του μετώπου στο μέσον 1 κατά  $\Delta R_1$  και στο μέσον 2 κατά  $\Delta R_2$ , η καθοριστική φυσική συνθήκη είναι ότι ταυτόχρονα πάνω στην διεπιφάνεια τα δύο μέτωπα πρέπει να βρίσκονται σε επαφή έχοντας διανύσει την κοινή απόσταση  $\Delta x$ . Από απλή γεωμετρία παίρνομε τότε

$$\Delta R_1 = \Delta x \sin \theta_1 \quad \text{και} \quad \Delta R_2 = \Delta x \sin \theta_2 \quad (2.6.2)$$

Συνεπώς

$$\Delta R_1 / \sin \theta_1 = \Delta R_2 / \sin \theta_2 \quad (2.6.3)$$



Σχήμα 2.4 Ανάκλαση και διάθλαση επίπεδων κυμάτων. Γεωμετρική θεώρηση για την απόδειξη του Νόμου του Snell.

Καθώς οι ταχύτητες είναι

$$c_1 = \frac{\Delta R_1}{\Delta t} \quad \text{και} \quad c_2 = \frac{\Delta R_2}{\Delta t} \quad (2.6.4)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για  $c_1$  και  $c_2$  στην 2.6.3, παίρνομε τη σχέση που διέπει το Νόμο του Snell.

## 2.7 Ανάκλαση επίπεδων κυμάτων στην επιφάνεια ανάμεσα σε δύο κυματικά μέσα. Το πρόβλημα σε δύο διαστάσεις

### 2.7.1 Εισαγωγή

Συνεχίζοντας να μελετάμε το πρόβλημα στις δύο διαστάσεις ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, με την έννοια ότι όλες οι μεταβολές πραγματοποιούνται σε δύο διαστάσεις ενός ακουστικού μέσου, ενώ όλα τα μεγέθη παραμένουν σταθερά στην τρίτη διάσταση, θα δώσουμε ένα παράδειγμα υπολογισμού των ακουστικών μεγεθών που υπεισέρχονται σε ένα πρόβλημα ανάκλασης της ακουστικής ενέργειας σε μία διεπιφάνεια ανάμεσα σε δύο ακουστικά μέσα από τα οποία το πρώτο είναι ρευστό (μόνο ακουστικά κύματα διαδίδονται) και το δεύτερο είναι ελαστικό (και τα δύο είδη κυμάτων διαδίδονται). Στη συνέχεια θα αναφερόμαστε με τον όρο «ρευστό» στο μέσον στο οποίο διαδίδονται μόνο ακουστικά κύματα και με τον όρο «ελαστικό» στο μέσον που υποστηρίζει τόσο διαμήκη (ακουστικά) όσο και διατμητικά κύματα.

Είναι συνηθισμένο σε ένα πρόβλημα αυτής της γεωμετρίας να θεωρήσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων με άξονες τους  $x$  και  $z$  με τον άξονα των  $z$  να τείνει προς τα κάτω (σχήμα 2.5). Όλα τα μεγέθη του προβλήματος θεωρούνται ανεξάρτητα από το  $y$ , ενώ η διεπιφάνεια που χωρίζει τα δύο ακουστικά μέσα νοείται κάθετη στο επίπεδο του σχήματος με το ίχνος της στο επίπεδο του σχήματος να αντιστοιχεί στον άξονα των  $x$ . Έτσι ο άξονας των  $z$  είναι κάθετος στην διεπιφάνεια.

Σε ένα πρόβλημα όπως αυτό, τα μεγέθη που υπεισέρχονται από την μεριά του ρευστού, είναι η πίεση και η μετατόπιση των στοιχειωδών σωματιδίων, ενώ για την

περίπτωση του ελαστικού μέσου, έχουμε τον ταυνοστή<sup>3</sup> των τάσεων και την μετατόπιση. Ο ταυνοστής των τάσεων αποτελείται από τις συνιστώσες της τάσης που αναπτύσσεται στα ακουστικά μέσα που συμβολίζονται ως  $\sigma_{ij}$  με τον πρώτο δείκτη να αναφέρεται στην επιφάνεια στην οποία αναφέρεται η τάση και τον δεύτερο δείκτη να αναφέρεται στην διεύθυνση της τάσης. Καθώς στην περίπτωσή μας η διεπιφάνεια είναι κάθετη στον άξονα των  $z$ , ο πρώτος δείκτης των τάσεων θα είναι  $z$  ενώ ο δεύτερος θα αναφέρεται στην διεύθυνση της τάσης. Από τις τάσεις που αναπτύσσονται στο ελαστικό μέσο, σημειώνουμε την συνιστώσα που είναι κάθετη στη διεπιφάνεια ανάμεσα στα δύο μέσα και συμβολίζεται με  $\sigma_{zz}$  και τη συνιστώσα που βρίσκεται στο επίπεδο της διεπιφάνειας και συμβολίζεται με  $\sigma_{zx}$ . Σημειώνουμε τέλος ότι στην περίπτωση αυτή, το διάνυσμα του δυναμικού της μετατόπισης των διατμητικών κυμάτων είναι κάθετο στο επίπεδο  $xz$  και έχει μέτρο  $\Psi$ .

Οι σχέσεις που συνδέουν τα δυναμικά των διαμήκων και διατμητικών κυμάτων με τις συνιστώσες των τάσεων είναι :

$$\sigma_{zz} = \lambda \nabla^2 \Phi + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} \right) \quad (2.7.1)$$

και

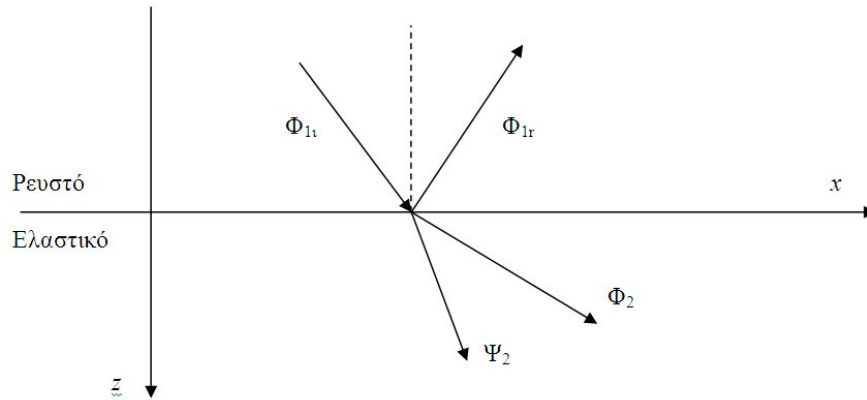
$$\sigma_{zx} = \mu \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} \right) \quad (2.7.2)$$

### 2.7.2 Ανάκλαση επίπεδων ακουστικών κυμάτων στην διεπιφάνεια ανάμεσα σε ένα ρευστό και ένα ελαστικό μέσον.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι μία ακουστική διαταραχή που διαδίδεται με την μορφή επίπεδου κύματος προσπίπτει στην επιφάνεια που χωρίζει τα δύο μέσα από την πλευρά του ρευστού (Σχήμα 2.5). Τα δύο μέσα θεωρούνται ημιάπειρα σε έκταση, ενώ υπενθυμίζουμε ότι όλα τα μεγέθη δεν εξαρτώνται από την μεταβλητή  $y$ . Τμήμα της ακουστικής ενέργειας θα ανακλαστεί και θα επιστρέψει στο ρευστό και τμήμα θα διαδοθεί στο ελαστικό μέσον αλλά με τη μορφή δύο κυμάτων διαφορετικού είδους: Διάμηκες και διατμητικό. Τα κύματα θα παραμείνουν επίπεδα (στο σχήμα βλέπομε την διεύθυνση διάδοσης των αντίστοιχων κυμάτων) και θα χαρακτηρίζονται από τα εξής δυναμικά:

- Δυναμικό προσπίπτοντος ακουστικού κύματος  $\Phi_{1i}$
- Δυναμικό ανακλώμενου ακουστικού κύματος  $\Phi_{1r}$
- Δυναμικό διαδιδόμενου ακουστικού κύματος  $\Phi_2$
- Δυναμικό διαδιδόμενου διατμητικού κύματος  $\Psi_2$

<sup>3</sup> Ταυνοστής είναι ένα γενικευμένο διάνυσμα τάξης  $n$  ανάλογα με τις συνιστώσες του. Εάν βαθμωτό μέγεθος είναι ειδική περίπτωση ταυνοστή τάξης 0 ενώ ένα διανυσματικό φυσικό μέγεθος στον χώρο έχει ταυνοστική τάξη 1 καθώς απαιτεί 3<sup>1</sup> αριθμούς για τον προσδιορισμό του.



Σχήμα 2.5 Διαδιδόμενα και ανακλώμενα κύματα στην επιφάνεια που χωρίζει ένα ρευστό από ένα ελαστικό μέσον.

Οι λύσεις για επίπεδα κύματα και των δύο ειδών δίδουν τις ακόλουθες εκφράσεις για τα αντίστοιχα δυναμικά, θεωρώντας ότι το μέτρο του προσπίπτοντος κυματισμού είναι 1:

$$\Phi_{1i} = e^{i(k_{x1}x + k_{z1}z - \omega t)} \quad (2.7.3)$$

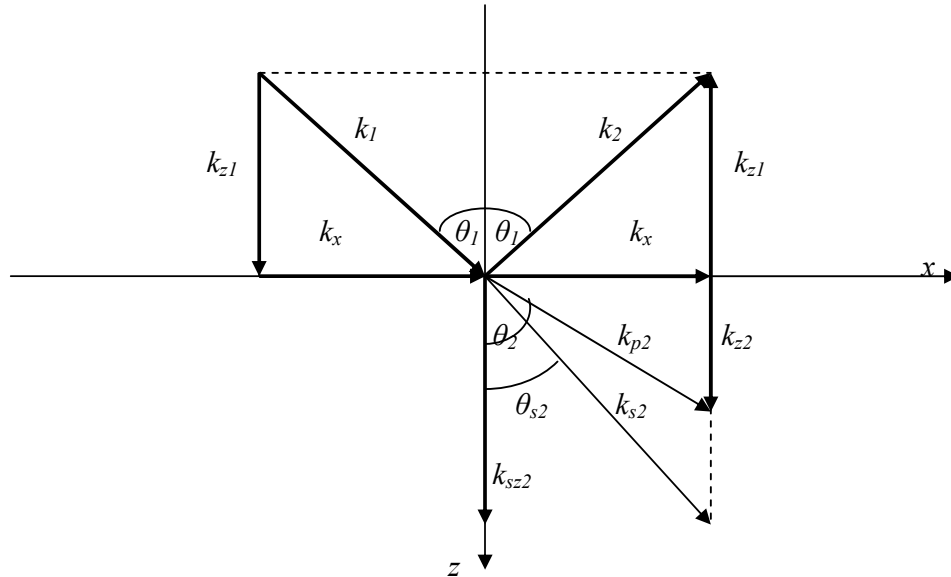
$$\Phi_{1r} = R_{12} e^{i(k_{x1}x - k_{z1}z - \omega t)} \quad (2.7.4)$$

$$\Phi_2 = T_p e^{i(k_{x2}x + k_{z2}z - \omega t)} \quad (2.7.5)$$

$$\Psi_2 = T_s e^{i(k_{x2}x + k_{z2}z - \omega t)} \quad (2.7.6)$$

Σημειώνουμε ότι από το νόμο του Snell, ο οριζόντιος αριθμός κύματος  $k_x$  παραμένει ο ίδιος (γιατί ;). Έτσι και ο κατακόρυφος αριθμός κύματος θα μείνει ως μέτρο ο ίδιος αλλά θα αλλάξει φορά και διεύθυνση, με τη γωνία πρόσπτωσης να είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης (Σχήμα 2.6). Έτσι θα ισχύει  $k_{x1} = k_{x2} = k_x$ .

Ο συντελεστής  $R_{12}$  είναι γνωστός ως «**συντελεστής ανάκλασης**» και είναι εν γένει μιγαδικός αριθμός. Ο συντελεστής  $T_p$  εκφράζει την διαθλώμενη ακουστική ενέργεια και ονομάζεται «**συντελεστής διάδοσης**», ενώ ο συντελεστής  $T_s$  ονομάζεται «**συντελεστής διάδοσης του διατμητικού κύματος**».



Σχήμα 2.6 Οι αριθμοί κύματος στο πρόβλημα της ανάκλασης επίπεδων ακουστικών κυμάτων από επιφάνεια ανάμεσα σε ένα ρευστό και ένα ελαστικό μέσον. Θεωρούμε ότι  $c_{s2} < c_{p2}$

Θα συμβολίσουμε με  $c_1$  την ταχύτητα διάδοσης του ήχου στο ρευστό, με  $c_{p2}$  την ταχύτητα διάδοσης του διαμήκους κύματος στο ελαστικό μέσο και με  $c_{s2}$  την ταχύτητα διάδοσης του διατμητικού κύματος στο ελαστικό μέσο. Οι αντίστοιχοι αριθμοί κύματος είναι  $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$ ,  $k_{p2} = \frac{\omega}{c_{p2}}$  και  $k_{s2} = \frac{\omega}{c_{s2}}$ .

Το πρόβλημά μας είναι να υπολογίσουμε τους συντελεστές των δυναμικών όταν είναι γνωστά τα κυματικά χαρακτηριστικά στα δύο μέσα και η γωνία πρόσπτωσης στο ρευστό μέσο.

Για το σχετικό υπολογισμό θα χρησιμοποιήσουμε τις οριακές συνθήκες που προκύπτουν ως συνέπεια των φυσικών νόμων και περιορισμών που διέπουν το πρόβλημα. Οι νόμοι αυτοί είναι:

- Δεν υπάρχει υπερβάουσα πίεση από την μία ή την άλλη πλευρά της διεπιφάνειας
- Τα δύο μέσα βρίσκονται πάντα σε επαφή

Ως συνέπεια αυτού παίρνουμε ότι οι αναπτυσσόμενες τάσεις κάθε είδους στη διεπιφάνεια πρέπει να είναι συνεχείς (πρώτος νόμος), ενώ η κάθετη στην διεπιφάνεια μετατόπιση θα πρέπει να είναι επίσης συνεχής συνάρτηση (δεύτερος νόμος).

Στην περίπτωση του προβλήματος με το ρευστό και το ελαστικό μέσον, οι συνθήκες εξειδικεύονται στη συνέχεια της κάθετης τάσης στη διεπιφάνεια, στο μηδενισμό της διατμητικής τάσης στη διεπιφάνεια (δεν υπάρχει διατμητική τάση στο ρευστό) και τέλος στην συνέχεια της κάθετης μετατόπισης.



Προσέχοντας το διαφορετικό πρόσημο στον ορισμό της πίεσης στο ρευστό μέσον και της τάσης στο ελαστικό μέσον, παίρνομε :

$$-p_1 = \sigma_{2,zz} \quad (2.7.7)$$

$$\sigma_{2,zx} = 0 \quad (2.7.8)$$

$$d_{1z} = d_{2z} \quad (2.7.9)$$

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις των τάσεων και των μετατοπίσεων στις δύο διαστάσεις, παίρνομε αντίστοιχα

$$-\rho_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + \frac{\lambda}{c_p^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z \partial x} \right) = 0 \quad (2.7.10)$$

$$\mu \left( \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z \partial x} \right) = 0 \quad (2.7.11)$$

$$\text{και } \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \quad (2.7.12)$$

όπου  $\Phi_1 = \Phi_{1i} + \Phi_{1r}$

Με αντικατάσταση των εκφράσεων για τα δυναμικά από τις σχέσεις 2.7.3-2.7.6, παίρνομε μετά από λίγες πράξεις την έκφραση για το συντελεστή ανάκλασης  $R_{12}$  που είναι

$$R_{12} = \frac{4k_{z2}k_{sz2}k_x^2 + (k_{sz2}^2 - k_x^2)^2 - (\rho_1/\rho_2)(k_{z2}/k_{z1})(\omega^4/c_{s2}^4)}{4k_{z2}k_{sz2}k_x^2 + (k_{sz2}^2 - k_x^2)^2 + (\rho_1/\rho_2)(k_{z2}/k_{z1})(\omega^4/c_{s2}^4)} \quad (2.7.13)$$

Αντίστοιχα μπορεί να πάρει κανείς εκφράσεις για τους συντελεστές διάδοσης των διαμήκων και διατμητικών κυμάτων.

Αξίζει να σχολιάσουμε λίγο τα μεγέθη που υπεισέρχονται στην ανωτέρω σχέση με αναφορά και στο σχήμα 2.6 που φαίνονται οι συνιστώσες των αριθμών κύματος.

Για να έχουμε κυματικό φαινόμενο (διάδοση κυμάτων στις δύο διαστάσεις), θα πρέπει όλες οι συνιστώσες των αριθμών κύματος να είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν οι αριθμοί αυτοί είναι φανταστικοί, η λύση που προκύπτει αν και φαινομενολογικά είναι ίδια με εκείνη που αφορά κυματική διάδοση δεν αντιπροσωπεύει κύμα. Αυτό είναι εύκολα κατανοητό εάν αναλογισθεί κανείς ότι οι συνιστώσες του αριθμού κύματος πολλαπλασιαζόμενοι με την χωρική μεταβλητή, είναι το όρισμα της εκθετικής συνάρτησης  $e^{i\varphi}$ . Έτσι εάν στη έκφραση  $u = e^{iax}$  θεωρήσομε το  $a$ , φανταστικό αριθμό

( $a = ia_1, a_1 \in R$ ), θα πάρουμε  $u = e^{-a_1 x}$  που εκφράζει μία αποσβενύμενη συμπεριφορά χωρίς κυματικό φαινόμενο (για  $a_1$  θετικό) .

Για να έχουμε λοιπόν όλους τους αριθμούς κύματος πραγματικούς θα πρέπει να ισχύει  $k_{p2} > k_{z2}, k_{p2} > k_x, k_{s2} > k_{zs2}, k_{s2} > k_x$  ώστε να έχει νόημα η ανάλυση του αριθμού κύματος ως διανυσματικού μεγέθους σε δύο (πραγματικές) συνιστώσες. Αυτό δεν είναι όμως πάντα δυνατό και εξαρτάται από τη σχέση των παραμέτρων των δύο μέσων μεταξύ τους. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε πρόσπτωση επίπεδων κυμάτων σε δύο μέσα για τα οποία ισχύει  $c_{p2} > c_1$  . Από το νόμο του Snell παίρνουμε ότι

$$\sin \theta_2 = \frac{c_{p2}}{c_1} \sin \theta_1 \quad (2.7.14)$$

Επομένως, για κάποιες γωνίες  $\theta_1$ , το ημίτονο της γωνίας διάθλασης παίρνει τιμή μεγαλύτερη από τη μονάδα και επομένως η γωνία διάθλασης γίνεται φανταστική. Αυτό ισοδυναμεί με κατακόρυφη συνιστώσα του αριθμού κύματος φανταστική. Επομένως δεν υπάρχει διάδοση κατά τον άξονα των z.

Θα μελετήσουμε το φαινόμενο περισσότερο στην αναφορά μας στο πρόβλημα της ανάκλασης στην επιφάνεια που χωρίζει δύο ρευστά μέσα. Στο σημείο αυτό μπορούμε όμως να δούμε τι θα πάρουμε εάν οι κατακόρυφες συνιστώσες των δύο αριθμών κύματος στο δεύτερο (ελαστικό) μέσον γίνουν φανταστικές ποσότητες.  $k_{z2} = ig_2, k_{sz2} = id_2$  .

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές στο συντελεστή ανάκλασης (2.7.13), παίρνουμε ένα μέγεθος με μέτρο μονάδα. Αυτό σημαίνει ότι το δυναμικό ανάκλασης διαφέρει ως προς το δυναμικό πρόσπτωσης μόνο ως προς την φάση. Το πλάτος, που εκφράζει και την ενέργεια που διαδίδεται σε κάθε περίπτωση, παραμένει το ίδιο. Με άλλα λόγια, όλη η ενέργεια που προσέπεσε στη διαχωριστική επιφάνεια ανακλάστηκε, αλλά με κάποια διαφορά φάσης ως προς το κυματικό φαινόμενο. Συνεπώς δεν υπάρχει κυματική ενέργεια στο ελαστικό μέσον !

Κάνοντας τις σχετικές πράξεις (Άσκηση) διαπιστώνουμε ότι ο συντελεστής ανάκλασης γράφεται στην περίπτωση αυτή

$$R_{12} = -e^{2in} \quad (2.7.15)$$

όπου

$$n = \text{Arc tan} \left\{ \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{K_{z1}}{g_2} \frac{c_{s2}^4}{\omega^4} [-4g_2 d_2 k_x^2 + (d_2^2 + k_x^2)^2] \right\} \quad (2.7.16)$$

### 2.7.3 Ανάκλαση επίπεδων ακουστικών κυμάτων στην διεπιφάνεια ανάμεσα σε δύο ρευστά μέσα.

Θα δούμε τώρα την ειδική περίπτωση που το δεύτερο μέσον είναι ρευστό. Η περίπτωση αυτή αποκτά ειδικό ενδιαφέρον στην ακουστική ωκεανογραφία, μια και τα υλικά του βυθού κοντά στις ακτές και στις ρηχές θάλασσες μπορούν να θεωρηθούν ρευστά. Στις περιοχές αυτές η ακουστική ωκεανογραφία έχει πληθώρα εφαρμογών.

Όταν τα δύο μέσα είναι ρευστά, το μόνο δυναμικό που ορίζεται είναι το δυναμικό των διαμήκων κυμάτων  $\Phi$ . Για το προσπίπτον το ανακλώμενο και το διαθλώμενο κύμα (όλα διαμήκη – ακουστικά) η έκφραση των δυναμικών είναι :

$$\Phi_{1l} = e^{i(k_x x + k_{z1} z - \omega t)} \quad (2.7.17)$$

$$\Phi_{1r} = R_{12} e^{i(k_x x - k_{z1} z - \omega t)} \quad (2.7.18)$$

$$\Phi_2 = T_p e^{i(k_x x + k_{z2} z - \omega t)} \quad (2.7.19)$$

Οι συνθήκες στη διεπιφάνεια παραμένουν οι ίδιες με αυτές της προηγούμενης περίπτωσης με την απουσία βέβαια της συνθήκης για τα διατμητικά κύματα που εδώ είναι κενή περιεχομένου. Έτσι παίρνομε

$$p_1 = p_2 \quad (2.7.20)$$

$$d_{1z} = d_{2z} \quad (2.7.21)$$

Οι σχέσεις αυτές, παίρνοντας υπ' όψιν τις αντίστοιχες εκφράσεις των πιέσεων και των μετατοπίσεων ( 2.5.6 και 2.5.10) δίνουν

$$\frac{\lambda_1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} = \frac{\lambda_2}{c_2^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} \quad (2.7.22)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \quad (2.7.23)$$

Με αντικατάσταση των δυναμικών στις αντίστοιχες εκφράσεις και έχοντας υπ' όψιν ότι  $\Phi_1 = \Phi_{1l} + \Phi_{1r}$ , παίρνομε

$$-\rho_1 \omega^2 \{e^{i(k_x x + k_{z1} z - \omega t)} + R_{12} e^{i(k_x x - k_{z1} z - \omega t)}\} = -\rho_2 \omega^2 T_p e^{i(k_x x + k_{z2} z - \omega t)} \quad (2.7.24)$$

και

$$ik_{z1} \{e^{i(k_x x + k_{z1} z - \omega t)} - R_{12} e^{i(k_x x - k_{z1} z - \omega t)}\} = ik_{z2} T_p e^{i(k_x x + k_{z2} z - \omega t)} \quad (2.7.25)$$

Θεωρώντας χωρίς άρση της γενικότητας ότι οι υπολογισμοί μας γίνονται για  $x=0$ ,  $z=0$ , παίρνομε

$$\rho_1(1 + R_{12}) = \rho_2 T_p \quad (2.7.26)$$

$$k_{z1}(1 - R_{12}) = k_{z2} T_p \quad (2.7.27)$$

Το γραμμικό σύστημα ως προς τους συντελεστές  $R_{12}, T_p$  επιλύεται εύκολα (Άσκηση) και δίνει τα αποτελέσματα

$$R_{12} = \frac{k_{z1}\rho_2 - k_{z2}\rho_1}{k_{z1}\rho_2 + k_{z2}\rho_1} \quad (2.7.28)$$

$$T_p = \frac{2k_{z1}\rho_1}{k_{z1}\rho_2 + k_{z2}\rho_1} \quad (2.7.29)$$

Μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι οι σχέσεις 2.7.28 και 2.7.29, αποτελούν τα όρια των αντίστοιχων συντελεστών για την περίπτωση του προβλήματος της ανάκλασης ανάμεσα σε ένα ρευστό και ένα ελαστικό μέσον, από τους οποίους έχουμε ήδη παρουσιάσει το συντελεστή ανάκλασης (Σχέση 2.7.13), όταν η ταχύτητα διάδοσης του διατμητικού κύματος τείνει στο 0 ( $c_s \rightarrow 0$ )

Θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με το συντελεστή ανάκλασης για να μελετήσουμε και πάλι την περίπτωση της ολικής ανάκλασης.

Εναλλακτική έκφραση του συντελεστή ανάκλασης μέσω των γωνιών ανάκλασης και διάθλασης παίρνομε με χρήση των σχέσεων

$$k_{z1} = k_1 \cos \theta_1 = \frac{\omega}{c_1} \cos \theta_1 \quad (2.7.30)$$

$$k_{z2} = k_2 \cos \theta_2 = \frac{\omega}{c_2} \cos \theta_2 \quad (2.7.31)$$

$$R_{12} = \frac{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 - \rho_1 c_1 \cos \theta_2}{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 + \rho_1 c_1 \cos \theta_2} \quad (2.7.32)$$

Από το νόμο του Snell έχουμε  $\sin \theta_2 = \frac{c_2}{c_1} \sin \theta_1$  οπότε και  $\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \sin^2 \theta_1}$

Όπως είχαμε την ευκαιρία να διαπιστώσουμε και στην προηγούμενη περίπτωση, εάν  $c_2 < c_1$  η γωνία  $\theta_2$  είναι πάντα πραγματική και υπάρχει κυματικό φαινόμενο και στο δεύτερο μέσον. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι κάτω από τις υποθέσεις του προβλήματος, ο συντελεστής ανάκλασης είναι πραγματικός αριθμός. Όταν όμως  $c_2 > c_1$  υπάρχει η περίπτωση της ολικής ανάκλασης για γωνίες πρόσπτωσης μεγαλύτερες της κρίσιμης που ορίζεται μέσω της σχέσης 2.7.14 :

$$\theta_{cr} = \text{Arc sin } \frac{c_1}{c_2} \quad (2.7.33)$$

Τότε και πάλι ο κατακόρυφος αριθμός κύματος στο δεύτερο μέσον γράφεται  $k_{z2} = ig_2$  και ο συντελεστής ανάκλασης γίνεται

$$R_{12} = \frac{k_{z1}\rho_2 - ig_2\rho_1}{k_{z1}\rho_2 + ig_2\rho_1}, \quad (2.7.34)$$

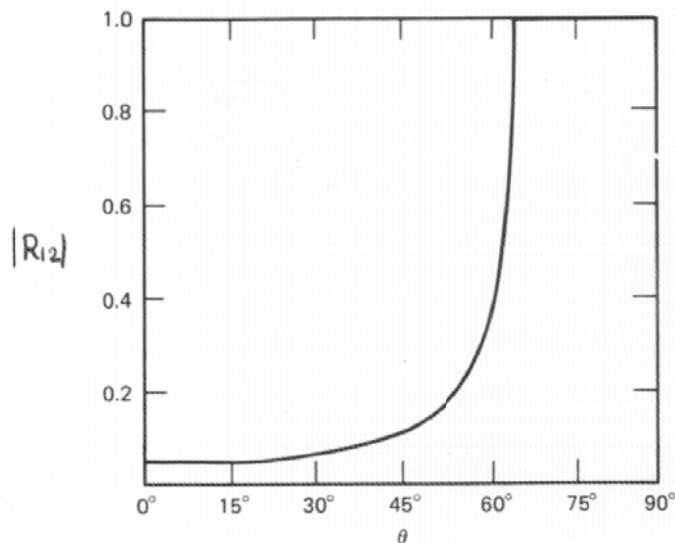
και παρατηρώντας ότι ο αριθμητής είναι ο συζυγής του παρανομαστή, ο συντελεστής ανάκλασης είναι μιγαδικός αριθμός που γράφεται ως

$$R_{12} = -e^{2i\chi}, \quad (2.7.35a)$$

όπου 
$$\chi = \text{Arc tan}\left(\frac{\rho_2 k_{z1}}{\rho_1 g_2}\right) \quad (2.7.35\beta)$$

Στο σχήμα 2.7 βλέπουμε ένα τυπικό διάγραμμα του μέτρου του συντελεστή ανάκλασης συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης για την περίπτωση δύο ρευστών ακουστικών μέσων, από τα οποία το δεύτερο χαρακτηρίζεται από ταχύτητα διάδοσης μεγαλύτερη από εκείνη του πρώτου μέσου. Πρόκειται για μία τυπική περίπτωση της ακουστικής ωκεανογραφίας, μια και συνήθως οι ταχύτητες διάδοσης των ακουστικών κυμάτων στα θαλασσινά ιζήματα είναι μεγαλύτερες από εκείνη του νερού.

Να σημειώσουμε τέλος ότι το γινόμενο  $\rho_i c_i, i=1,2$  ονομάζεται ακουστική αντίσταση (acoustic impedance) και χαρακτηρίζει ένα ακουστικό υλικό.



Σχήμα 2.7 Μέτρο του συντελεστή ανάκλασης επίπεδου ηχητικού κύματος στη διαχωριστική επιφάνεια δύο ρευστών για τα οποία ισχύει  $c_2 / c_1 = 1.1$  και  $\rho_2 / \rho_1 = 1.1$ . Προσέξτε τη κρίσιμη γωνία στις  $65.6^\circ$ .

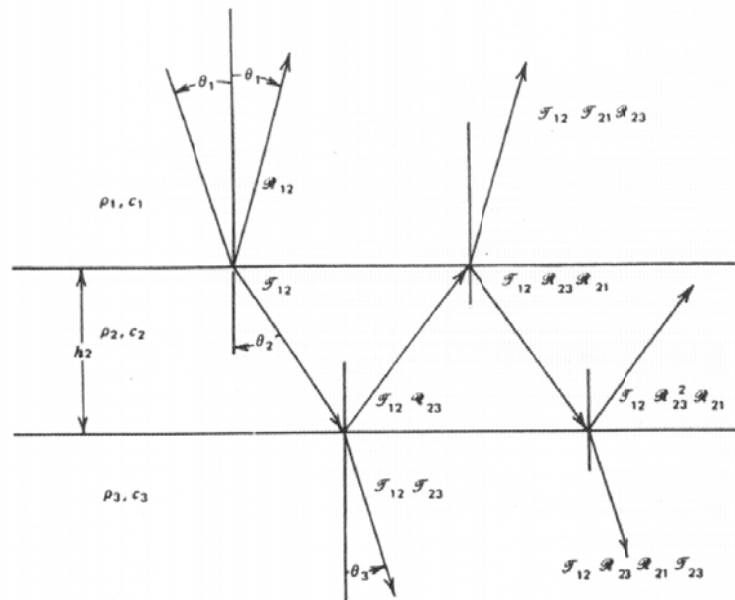
### 2.7.4 Ανάκλαση επίπεδου ηχητικού κύματος από πολυστρωματοποιημένο ρευστό μέσο

Στην πραγματικότητα, ο πυθμένας της θάλασσας δεν είναι ένα ομογενές και ισότροπο υλικό όπως απαιτεί η ανάπτυξη που κάναμε μέχρι τώρα. Αποτελείται από πολλά επάλληλα στρώματα υλικών διαφορετικής σύνθεσης που στην απλούστερη των περιπτώσεων μπορεί να θεωρήσει κανείς ότι διαχωρίζονται από επιφάνειες που είναι επίπεδες, και παράλληλες μεταξύ τους σε οριζόντια διάταξη. Επί πλέον υποθέτουμε ότι οι παράμετροι των υλικών μεταβάλλονται μόνο με το βάθος  $z$ .

Πυθμένες με τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζονται «**οριζόντια στρωματοποιημένοι**». Στο παρόν κεφάλαιο θα συνεχίζουμε να υποθέτουμε ότι σε κάθε στρώμα η πυκνότητα και η ταχύτητα διάδοσης του ήχου δεν μεταβάλλονται. Έτσι μπορούμε να οδηγηθούμε στη μοντελοποίηση του προβλήματος της ανάκλασης του ήχου από πυθμένα αποτελούμενο από πολλά στρώματα, κάνοντας επέκταση των όσων αναπτύξαμε προηγουμένως για την περίπτωση ενός υλικού μόνο. Σε κάθε περίπτωση το τελευταίο στρώμα θα θεωρείται ότι εκτείνεται μέχρι το άπειρο στο  $z$ . Για απλούστευση πάντως της ανάπτυξης θα αναφερθούμε μόνο στην περίπτωση πολλών επάλληλων ρευστών στρωμάτων.

Θα ξεκινήσουμε μελετώντας την περίπτωση του ενός στρώματος πεπερασμένου πάχους πάνω από ένα ημιάπειρο ημίχωρο. Η επέκταση όπως θα δούμε για πολλαπλά στρώματα είναι άμεση.

Θεωρήστε το σχήμα 2.8, στο οποίο σημειώνονται οι διευθύνσεις διάδοσης ενός ακουστικού κύματος, οι αντίστοιχες γωνίες πρόσπτωσης και οι συντελεστές ανάκλασης και διάθλασης για κάθε κυματισμό, όπως αυτοί ορίστηκαν από τα προηγούμενα.



Σχήμα 2.8 Ανάκλαση και διάθλαση σε πυθμένα αποτελούμενο από δύο ρευστά στρώματα

Το πρώτο στρώμα στον πυθμένα (δεύτερο κατά αύξοντα αριθμό) έχει πάχος  $h_2$ . Περιγραφικά, το κύμα που διαθλάται στο στρώμα αυτό ανακλάται στην διαχωριστική επιφάνεια του τρίτου στρώματος και μέρος της ενέργειας επιστρέφει για να προσπέσει στη συνέχεια στο όριο ανάμεσα στο δεύτερο και το πρώτο στρώμα (νερό), οπότε τμήμα της ενέργειας επιστρέφει στο νερό και τμήμα της ενέργειας γυρίζει πίσω για να ακολουθηθεί θεωρητικά η διαδικασία αυτή επ' αόριστον.

Το ενδιαφέρον μας συνήθως εστιάζεται στον υπολογισμό του ακουστικού κύματος που επιστρέφει στο νερό και το οποίο αποτελείται από επαλληλία όλων των κυματισμών που γυρίζουν σ' αυτό μετά από τις διαδικασίες ανάκλασης και διάθλασης που περιγράψαμε ανωτέρω.

Με αναφορά στους συντελεστές του σχήματος 2.8, μπορούμε να εκφράσουμε άμεσα εκείνους που αναφέρονται ανάμεσα σε δύο μέσα, δηλαδή

$$R_{12} = \frac{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 - \rho_1 c_1 \cos \theta_2}{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 + \rho_1 c_1 \cos \theta_2} \quad (2.7.36)$$

$$R_{23} = \frac{\rho_3 c_3 \cos \theta_2 - \rho_2 c_2 \cos \theta_3}{\rho_3 c_3 \cos \theta_2 + \rho_2 c_2 \cos \theta_3} \quad (2.7.37)$$

$$T_{12} = \frac{2\rho_1 c_2 \cos \theta_1}{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 + \rho_1 c_1 \cos \theta_2} \quad (2.7.38)$$

$$T_{23} = \frac{2\rho_2 c_3 \cos \theta_2}{\rho_3 c_3 \cos \theta_2 + \rho_2 c_2 \cos \theta_3} \quad (2.7.39)$$

Το κύμα που έχει διαδοθεί μέσα στο δεύτερο στρώμα, έχει υποστεί συνολικά μία διαφορά φάσης  $2k_2 h_2 \cos \theta_2 = 2k_{z2} h_2$  από τη στιγμή που αποχωρίζεται τη διαχωριστική επιφάνεια πρώτου-δευτέρου στρώματος μέχρι την επιστροφή της σ' αυτή μετά από την ανάκλαση στη διεπιφάνεια ανάμεσα στο δεύτερο και το τρίτο στρώμα.

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να διαπιστώσει ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$R_{12} = -R_{21} \quad (2.7.40)$$

$$T_{12} T_{21} = 1 - R_{12}^2 \quad (2.7.41)$$

Αθροίζοντας γεωμετρικά όλες τις συνεισφορές από τις πολλαπλές επιστροφές στο νερό, παρατηρούμε ότι ο συνολικός συντελεστής ανάκλασης ανάμεσα στο πρώτο και το σύνολο των δύο στρωμάτων, παίρνει τη μορφή

$$R_{13} = R_{12} + T_{12} T_{21} R_{23} \exp(2i\phi_2) + T_{12} T_{21} R_{23}^2 R_{21} \exp(4i\phi_2) + \dots \quad (2.7.42)$$

όπου  $\phi_2 = k_2 h_2 \cos \theta_2$

Μετά τον πρώτο όρο, οι όροι στην 2.7.42 έχουν τη μορφή γεωμετρικής σειράς

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = (1-r)^{-1} \text{ για } r < 1, \text{ οπότε γράφουμε}$$

$$R_{13} = R_{12} + T_{12}T_{21}R_{23} \exp(2i\phi_2) \sum_{n=0}^{\infty} [R_{23}R_{21} \exp(2i\phi_2)]^n \quad (2.7.43)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 2.7.40 και 2.7.41, παίρνουμε μία απλή έκφραση για το συντελεστή ανάκλασης που έχει τη μορφή

$$R_{13} = \frac{R_{12} + R_{23} \exp(2i\phi_2)}{1 + R_{12}R_{23} \exp(2i\phi_2)} \quad (2.7.44)$$

Εντελώς αντίστοιχα μπορούμε να πάρουμε για το κύμα που διαδίδεται στο τελευταίο μέσο, το συντελεστή διάδοσης

$$T_{13} = \frac{T_{12}T_{23} \exp(i\phi_2)}{1 + R_{12}R_{23} \exp(2i\phi_2)} \quad (2.7.45)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι συντελεστές έχουν τη μορφή ταλαντευόμενης συνάρτησης που εξαρτάται και από τη συχνότητα μέσω του κατακόρυφου αριθμού κύματος, σε αντίθεση με την περίπτωση του συντελεστή ανάμεσα σε δύο ρευστά στρώματα που είναι ανεξάρτητος της συχνότητας.

Εάν τα στρώματα είναι περισσότερα σε αριθμό, μία διαδικασία αντίστοιχη με αυτή που παρουσιάσαμε μπορεί να εφαρμοστεί με αρχή τα βαθύτερα στρώματα, έτσι ώστε να πάρουμε λύση για το συντελεστή ανάκλασης από το σύνολο των στρωμάτων. Έτσι, εάν έχουμε n-1 στρώματα κάτω από το νερό, ο συντελεστής ανάκλασης ανάμεσα στο στρώμα n-2 και το τελευταίο στρώμα, θα είναι σε ευθεία αντιστοιχία με τη σχέση 2.7.44

$$R_{(n-2)n} = \frac{R_{(n-2)(n-1)} + R_{(n-1)n} \exp(2i\phi_{n-1})}{1 + R_{(n-2)(n-1)}R_{(n-1)n} \exp(2i\phi_{n-1})} \quad (2.7.46)$$

Για το αμέσως προηγούμενο στρώμα θα πάρουμε

$$R_{(n-3)n} = \frac{R_{(n-3)(n-2)} + R_{(n-2)n} \exp(2i\phi_{n-2})}{1 + R_{(n-3)(n-2)}R_{(n-2)n} \exp(2i\phi_{n-2})} \quad (2.7.47)$$

και τελικά ο συντελεστής ανάκλασης ανάμεσα στο νερό και το σύνολο των στρωμάτων παίρνει τη μορφή

$$R_{1n} = \frac{R_{12} + R_{2n} \exp(2i\phi_2)}{1 + R_{12}R_{2n} \exp(2i\phi_2)} \quad (2.7.48)$$



Η περίπτωση της ολικής ανάκλασης για το πρόβλημά μας θα ισχύσει εφ' όσον σε κάποιο από τα στρώματα του πυθμένα υπάρξει (τοπικά) ολική ανάκλαση. Στην περίπτωση αυτή οδηγούμεθα και πάλι σε συντελεστή ανάκλασης με μέτρο μονάδα και μεταβολή φάσης.

### 3 Διάδοση της ηχητικής ενέργειας σε μεγάλες αποστάσεις. Γεωμετρική ακουστική

**Η** γεωμετρική ακουστική είναι η μία από τις δύο βασικές μεθόδους που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη της ακουστικής διάδοσης στη θάλασσα και χρησιμοποιεί την έννοια της ακουστικής ακτίνας για τη μελέτη των προβλημάτων διάδοσης σε ένα ακουστικό μέσο. Η άλλη μέθοδος βασίζεται στην πλήρη κυματική θεωρία και χαρακτηρίζεται ως κυματική ακουστική. Τα προβλήματα ανάκλασης και διάθλασης που εξετάσαμε προηγουμένως εντάσσονται μέσα στα γενικά πλαίσια της γεωμετρικής ακουστικής, σύμφωνα με την οποία παρακολουθείται η ηχητική ενέργεια σημείο προς σημείο καθώς αυτή διαδίδεται σε ένα μέσον και ανακλάται στις διαχωριστικές του επιφάνειες. Είναι μία μέθοδος που συνδυάζει παραστατικότητα και φυσική ερμηνεία σε αντίθεση με την κυματική θεωρία που δεν συνδέει άμεσα το αποτέλεσμα με γεωμετρικές έννοιες. Στα πλαίσια του μαθήματος «Ακουστική Ωκεανογραφία» θα περιοριστούμε στην γεωμετρική ακουστική ενώ στο μάθημα «Κυματική Διάδοση» θα εμβαθύνουμε σε μεθόδους της κυματικής θεώρησης.

#### 3.1 Ηχητικές ακτίνες

Ως ηχητική ακτίνα θα θεωρήσουμε την καμπύλη, σε κάθε σημείο της οποίας ο αριθμός κύματος είναι εφαπτόμενο διάνυσμα. Η ηχητική ακτίνα λοιπόν είναι κάθετη στο μέτωπο κύματος. Στην περίπτωση των επίπεδων κυμάτων, η διεύθυνση της ηχητικής ακτίνας ταυτίζεται με τη διεύθυνση του αριθμού κύματος για κάθε μέσον. Όταν λοιπόν ο αριθμός κύματος είναι σταθερός (σταθερή ταχύτητα διάδοσης του ήχου) η ηχητική ακτίνα είναι ευθεία. Όταν όμως η ταχύτητα μεταβάλλεται με την απόσταση, η μεταβολή του μέτρου του αριθμού κύματος σε συνδυασμό με το νόμο του Snell που επιβάλλει σταθερό οριζόντιο αριθμό κύματος, επιβάλλουν την αλλαγή στη διεύθυνση του διανύσματος του αριθμού κύματος και επομένως αλλαγή στη διεύθυνση της ηχητικής ακτίνας. Όταν οι μεταβολές του αριθμού κύματος είναι συνεχείς, το αποτέλεσμα για την ηχητική ακτίνα είναι μία ομαλή καμπύλη στο χώρο.

Βέβαια θα πρέπει να τονίσουμε ότι τα επίπεδα κύματα είναι μία απλούστευση της πραγματικής λύσης του προβλήματος ακουστικής διάδοσης στη θάλασσα. Η λύση της ακουστικής εξίσωσης για ένα δεδομένο πρόβλημα όπως αυτό περιγράφεται από τη γεωμετρία, τις παραμέτρους και τις οριακές συνθήκες, δεν δίδεται με τη μορφή επίπεδων ακουστικών κυμάτων και είναι προφανές ότι θα πρέπει να ανατρέξει κανείς σε περισσότερο σύνθετες λύσεις της ακουστικής εξίσωσης. Η έννοια του επίπεδου κύματος ωστόσο παραμένει χρήσιμη και πολλές φορές γίνεται αναγωγή σ' αυτήν για να μελετηθούν πολύπλοκα προβλήματα ακουστικής διάδοσης με απλούς αλλά ταυτόχρονα εποπτικούς τρόπους.

Σημειώνουμε ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου μεταβάλλεται με το βάθος όπως είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου και λιγότερο με την οριζόντια απόσταση στη θάλασσα. Αυτό σημαίνει ότι σε πολλά προβλήματα αρκεί να υπολογίσουμε την διάδοση του ήχου στην θάλασσα όταν τα μεγέθη μεταβάλλονται μόνο με το βάθος (οριζόντια στρωματοποιημένο μέσο) και όχι με την απόσταση. Αυτή την απλούστευση θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια ώστε να γίνουν κατανοητές οι βασικές έννοιες που μας ενδιαφέρουν. Πιο περίπλοκα περιβάλλοντα αντιμετωπίζονται ερευνητικά και δεν αποτελούν αντικείμενο του παρόντος μαθήματος.

Σε κάθε περίπτωση η γεωμετρική ακουστική είναι χρήσιμη σε προβλήματα που αναζητούνται λύσεις στο πεδίο του χρόνου καθώς είναι εύκολο να ολοκληρώσει κανείς ποσότητες πάνω στις ακτίνες που θεωρούνται ως οδοί διάδοσης της ηχητικής ενέργειας. Ενεργειακά μεγέθη ολοκληρούμενα πάνω στις ακτίνες δίδουν μια προσεγγιστική λύση για το ακουστικό πεδίο σε κάποιο σημείο του ακουστικού μέσου. Δεν θα επεκταθούμε όμως πολύ σ' αυτό το θέμα. Θα δώσουμε ένα εύκολο τρόπο υπολογισμού ενός διαγράμματος ακτίνων σε ένα μέσο στο οποίο μεταβάλλεται η ταχύτητα διάδοσης συνεχώς με το βάθος (Σχήμα 3.1) και θα ακολουθήσει μία απλουστευμένη θεώρηση του προβλήματος του υπολογισμού της ακουστικής πίεσης σε δεδομένη θέση στη θάλασσα με χρήση της θεωρίας ακτίνων. Θα θεωρήσουμε όπως κάναμε μέχρι τώρα διάδοση σε δύο διαστάσεις. Σημειώνουμε ότι το διάγραμμα μεταβολής της ταχύτητας διάδοσης του ήχου με το βάθος συνθέτει το «προφίλ» της ταχύτητας.

Ο νόμος του Snell ορίζει ότι σε ένα κυματικό μέσον στο οποίο η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι συνάρτηση μιας χωρικής μεταβλητής (ας πούμε  $z$ ), το πηλίκο  $\frac{\sin \theta(z)}{c(z)}$  παραμένει σταθερό και ίσο με  $a$ . Η γωνία  $\theta$  είναι εκείνη που σχηματίζει ο

αριθμός κύματος λαμβανόμενος ως διάνυσμα με τον άξονα των  $z$ . Μέχρι τώρα το νόμο τον είδαμε να εφαρμόζεται μόνο στην διαχωριστική επιφάνεια ανάμεσα σε δύο ακουστικά μέσα. Στην περίπτωση μας η γωνία  $\theta$  μπορεί να θεωρηθεί ως η σχηματιζόμενη από την ηχητική ακτίνα και τον κατακόρυφο άξονα με δεδομένο ότι σε οποιοδήποτε σημείο της ηχητικής ακτίνας ο αριθμός κύματος είναι εφαπτόμενο διάνυσμα.

Για να παρακολουθήσουμε την διαδρομή μιας ηχητικής ακτίνας με το νόμο του Snell, θα θεωρήσουμε ένα στοιχειώδες μήκος  $ds$  πάνω στην ακτίνα, που διανύθηκε σε χρόνο  $dt$ . (Σχήμα 3.2) Με αναφορά στο σύστημα συντεταγμένων που έχουμε χρησιμοποιήσει, παίρνουμε

$$ds = \frac{dz}{\cos \theta} \quad (3.1.1)$$

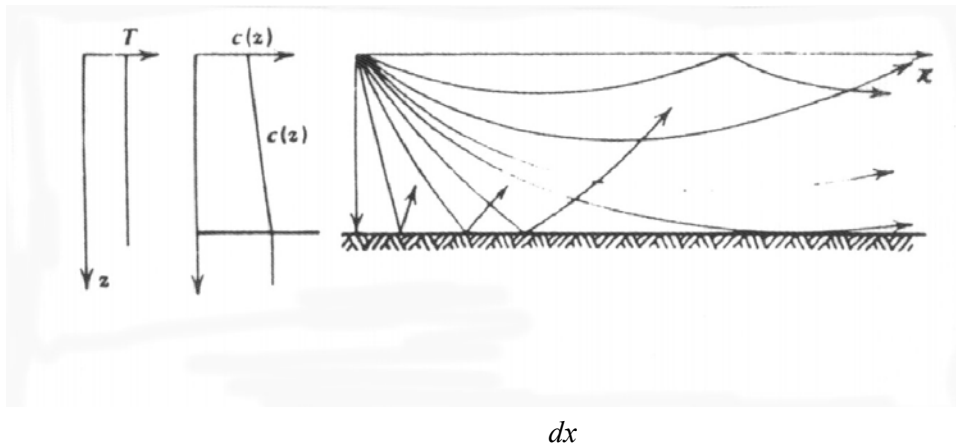
$$dt = \frac{ds}{c(z)} = \frac{dz}{c(z) \cos \theta} \quad (3.1.2)$$

Η οριζόντια απόσταση που διανύθηκε στον ίδιο χρόνο είναι

$$dx = \tan \theta dz \quad (3.1.3)$$

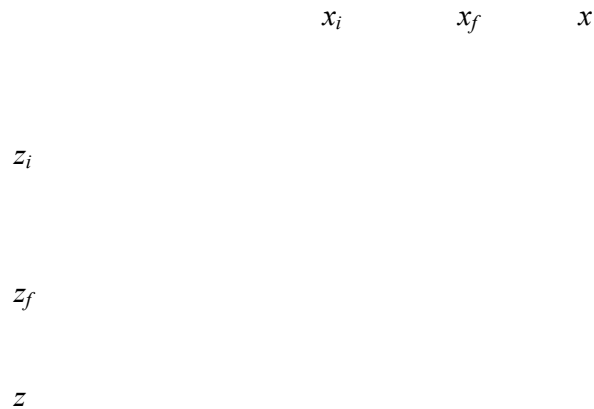
Από το νόμο του Snell παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sin \theta &= ac(z) \\ \cos \theta &= [1 - a^2 c^2(z)]^{1/2} \\ \tan \theta &= ac(z) / [1 - a^2 c^2(z)]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$



$$dz \quad \theta \quad ds$$

Σχήμα 3.2 Στοιχειώδες μήκος σε μία ηχητική ακτίνα



Σχήμα 3.3 Γεωμετρία για τον υπολογισμό συντεταγμένων μιας ηχητικής ακτίνας

Ολοκληρώνοντας ανάμεσα σε δύο χρονικές στιγμές  $t_f$  και  $t_i$ , και θεωρώντας ότι οι αντίστοιχες συντεταγμένες κατά τον άξονα των  $z$  είναι  $z_f$  και  $z_i$  παίρνουμε για τις αντίστοιχες οριζόντιες συντεταγμένες (Σχήμα 3.3)

$$x_f - x_i = \int_{x_i}^{x_f} dx = \int_{z_i}^{z_f} \frac{ac(z)dz}{[1 - a^2c^2(z)]^{1/2}} \quad (3.1.5)$$

Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να παρακολουθήσουμε την πορεία μιας ηχητικής ακτίνας. Ξεκινώντας από ένα γνωστό σημείο  $(x_0, z_0)$  που συνήθως είναι η θέση της πηγής, μπορούμε να υπολογίσουμε για δεδομένη γωνία διάδοσης την ηχητική ακτίνα, υπολογίζοντας για κάθε βάθος  $z$  την αντίστοιχη οριζόντια απόσταση  $x$  που έχει βρεθεί η ακτίνα, για δεδομένη συνάρτηση  $c(z)$ .

Ο αντίστοιχος χρόνος που έχει περάσει δίδεται από τη σχέση

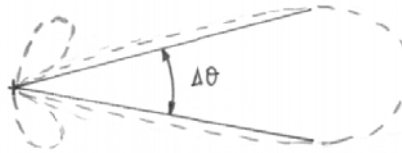
$$t_f - t_i = \int_{t_i}^{t_f} dt = \int_{z_i}^{z_f} \frac{dz}{c(z)[1 - a^2 c^2(z)]^{1/2}} \quad (3.1.6)$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η ακτίνα διάδοσης γίνεται οριζόντια στη θέση  $z$  για την οποία ισχύει

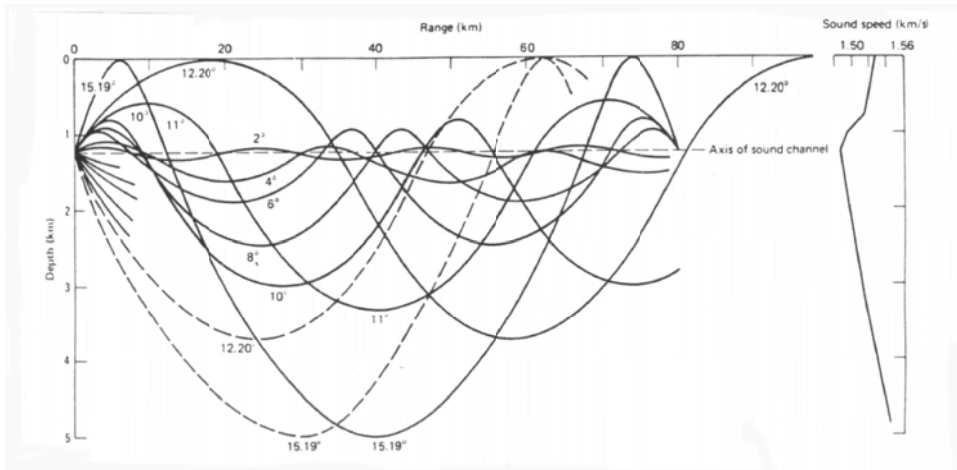
$$\sin \theta_i = c(z_i) / c(z) \quad (3.1.7)$$

οπότε και  $\sin \theta = 1$ . Το σημείο αυτό είναι ένα κρίσιμο σημείο του διαγράμματος της ηχητικής ακτίνας. Άλλα κρίσιμα σημεία είναι τα σημεία πρόσπτωσης στην επιφάνεια και τον πυθμένα της θάλασσας. Η ολοκλήρωση πάνω σε μία ηχητική ακτίνα γίνεται ανάμεσα στα κρίσιμα σημεία.

Με όσα έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα γίνεται σαφές ότι η ηχητική ενέργεια δεν ταξιδεύει σε ένα ακουστικό μέσον σε ευθεία γραμμή εκτός και αν η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι σταθερή. Σε κάθε άλλη περίπτωση η ηχητική ακτίνα είναι καμπύλη, η εξίσωση της οποίας υπολογίζεται μέσω της σχέσης 3.1.5. Το φαινόμενο είναι πολύ ενδιαφέρον στο νερό, και σε εφαρμογές της ακουστικής ωκεανογραφίας που εκμεταλλεύονται την καμπύλωση της ηχητικής ενέργειας και τις δημιουργούμενες περιοχές μεγάλης ή μικρής συγκέντρωσης ακτίνων ανάλογα με την εφαρμογή. Στο σημείο αυτό να πούμε απλά ότι μεγάλη συγκέντρωση ακτίνων υποδηλώνει περιοχή ισχυρού ακουστικού πεδίου σε αντίθεση με την περιοχή όπου οι ακτίνες είναι αραιές που υποδηλώνει περιοχή ασθενούς πεδίου. Στο ερώτημα για το πως καθορίζονται οι περιοχές μεγάλης ή μικρής συγκέντρωσης ακτίνων αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η εκπομπή ηχητικής ενέργειας από μία πηγή γίνεται συνήθως με τη μορφή δέσμης (Σχήμα 3.4). Η δέσμη αυτή καθορίζεται από την κατευθυντότητα της πηγής όπως ορίστηκε στο κεφάλαιο 2. Η απλουστευτική παραδοχή που γίνεται είναι ότι μέσα στη δέσμη παίρνουμε μία διακριτοποίηση στη γωνία και ανά ακτινικό βήμα  $\delta\theta$  θεωρούμε μία ηχητική ακτίνα. Έτσι η εκπομπή ηχητικής ενέργειας στην πηγή θεωρείται ομοιόμορφη, παρά το γεγονός ότι η κατευθυντότητα υποδηλώνει ότι αυτό δεν ισχύει πάντα. Ωστόσο για τις ανάγκες εποπτικής μελέτης της διάδοσης του ήχου στη θάλασσα αυτό είναι αρκετό. Ακολούθως παρακολουθείται η πορεία κάθε μιας από τις ακτίνες αυτές στο περιβάλλον και σχεδιάζεται ένα διάγραμμα ακτίνων όπως στο σχήμα 3.5. Μια πρώτη εικόνα των χαρακτηριστικών περιοχών συγκέντρωσης ή αραιώσης της ηχητικής ενέργειας μας δίνει η αντίστοιχη περιοχή συγκέντρωσης ή αραιώσης των ηχητικών ακτίνων.



Σχήμα 3.4 Δέση εκπομπής από ηχητική πηγή



Σχήμα 3.5 Τυπικό διάγραμμα ακτίνων σε βαθιά θάλασσα για το εμφανιζόμενο δεξιά προφίλ ταχύτητας. Έχουν σημειωθεί οι γωνίες εκπομπής για την κάθε ακτίνα.

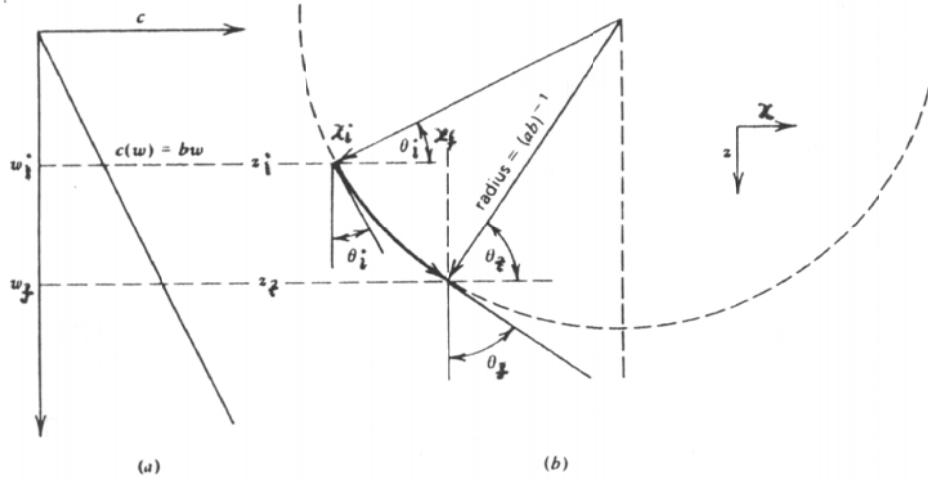
Η ολοκλήρωση στη σχέση 3.1.5 μπορεί να γίνει αριθμητικά, όταν η ταχύτητα είναι μία γενική συνάρτηση του βάθους. Πολλές φορές όμως καταφεύγουμε σε απλουστεύσεις του προφίλ ταχύτητας ώστε η ολοκλήρωση να μπορεί να γίνει έστω και τμηματικά με αναλυτικές σχέσεις. Στην περίπτωση αυτή συνήθως χρησιμοποιούμε μία προσέγγιση του προφίλ ταχύτητας με συναρτήσεις τμηματικά συνεχείς, η κάθε μία από τις οποίες μπορεί να δώσει αναλυτική έκφραση για το ολοκλήρωμα της σχέσης 3.1.5. Μία συνάρτηση αυτού του είδους είναι η γραμμική, σύμφωνα με την οποία το προφίλ ταχύτητας δίδεται από τη σχέση :

$$c(z) = c(z_1) + b(z - z_1) \quad \text{για } z_1 \leq z \leq z_2 \quad (3.1.8)$$

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι το προφίλ ταχύτητας χωρίζεται σε πολλά τμήματα στα οποία η ταχύτητα έχει δεδομένη σταθερή κλίση. Η ολοκλήρωση πραγματοποιείται ανάμεσα στα τμήματα αυτά και στη συνέχεια τα παραγόμενα επί μέρους διαγράμματα ακτίνων ενώνονται για να δώσουν το τελικό διάγραμμα. Για να επιτευχθεί ομαλή καμπύλη, συνήθως ακολουθεί μία εξομάλυνση του τελικού διαγράμματος, ώστε να μην παρατηρούνται ασυνέχειες μέσα στο νερό, κάτι που αντίκειται στους φυσικούς νόμους.

Αξίζει να δώσουμε τη μορφή του διαγράμματος ακτίνων ανάμεσα σε δύο βάθη για τα οποία η μεταβολή της ταχύτητας είναι γραμμική. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την βοηθητική μεταβλητή

$$w = z - z_1 + \frac{c(z_1)}{b} \quad (3.1.9)$$



Σχήμα 3.6 Κυκλική διαδρομή ακτίνων για ταχύτητα ήχου γραμμικά μεταβαλλόμενη με το βάθος

Ισχύει :

$$dw=dz \quad (3.1.10)$$

$$c(z)=bw \quad (3.1.11)$$

Τα ολοκληρώματα ( 3.1.5 ) και ( 3.1.6 ) υπολογίζονται ως εξής :

$$t_f - t_i = \int_{w_i}^{w_f} \frac{dw}{bw(1-a^2b^2w^2)^{1/2}} \quad (3.1.12)$$

$$x_f - x_i = \int_{w_i}^{w_f} \frac{abw dw}{(1-a^2b^2w^2)^{1/2}} \quad (3.1.13)$$

Χρησιμοποιώντας πίνακες ολοκληρωμάτων καταλήγουμε στις σχέσεις

$$t_f - t_i = \frac{1}{b} \log_e \frac{w_f [1 + (1 - a^2 b^2 w_i^2)^{1/2}]}{w_i [1 + (1 - a^2 b^2 w_f^2)^{1/2}]} \quad (3.1.14)$$

$$\text{ή} \quad t_f - t_i = \frac{1}{b} \log_e \frac{w_f (1 + \cos \theta_i)}{w_i (1 + \cos \theta_f)} \quad (3.1.15)$$

$$\text{και} \quad x_f - x_i = \frac{1}{ab} [(1 - a^2 b^2 w_i^2)^{1/2} - (1 - a^2 b^2 w_f^2)^{1/2}] \quad (3.1.16)$$

$$\text{ή} \quad x_f - x_i = \frac{1}{ab} (\cos \theta_i - \cos \theta_f) = R (\cos \theta_i - \cos \theta_f) \quad (3.1.17)$$

Παρατηρούμε από τη σχέση (3.1.17) και με την βοήθεια του σχήματος 3.6, ότι η ακτίνα καμπυλότητας της ηχητικής ακτίνας  $R$  στο διάστημα κατά το οποίο η κλίση της ταχύτητας διάδοσης του ήχου είναι σταθερή, είναι επίσης σταθερή και ίση με το πηλίκο  $1/ab$ . Άρα η ηχητική ακτίνα έχει τη μορφή τόξου κύκλου. Αυτό διευκολύνει αρκετά τους υπολογισμούς και την κατασκευή αλγορίθμων για την παρακολούθηση της πορείας της ηχητικής ακτίνας

Αντίστοιχα η σχέση ανάμεσα στα βάθη  $z_f$  και  $z_i$  είναι.

$$z_f - z_i = R(\sin \theta_f - \sin \theta_i) \quad (3.1.18)$$

Υπολογίζοντας τις συντεταγμένες μιας ηχητικής ακτίνας από τις ανωτέρω σχέσεις, παρακολουθούμε την γεωμετρία της διάδοσης του ήχου στη θάλασσα.

Σήμερα η παρακολούθηση της διαδρομής μιας ηχητικής ακτίνας γίνεται με αριθμητικές τεχνικές που εξασφαλίζουν μεγαλύτερη ακρίβεια στην χάραξη της διαδρομής ιδιαίτερα σε γενικά προφίλ ταχύτητας.

### 3.2 Ακουστική πίεση και γεωμετρική ακουστική.

Η ακουστική ενέργεια που μεταφέρεται από ένα κύμα εξαρτάται βέβαια από την ένταση της πηγής που το προκαλεί. Μέχρι τώρα το μέγεθος αυτό δεν μας είχε απασχολήσει, μια και στα προβλήματα που μελετήσαμε μας ενδιέφερε η μορφή της λύσης της ακουστικής εξίσωσης και τα σχετικά πλάτη των ενεργειακών μεγεθών ανάμεσα σε δύο ακουστικά μέσα. Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε μία απλή μέθοδο για υπολογισμό της ακουστικής πίεσης με τη βοήθεια της γεωμετρικής ακουστικής, καθώς και μεγέθη που διευκολύνουν την μελέτη των σχετικών προβλημάτων. Σημειώνουμε εδώ ότι ο υπολογισμός της ακουστικής πίεσης με χρήση της γεωμετρικής ακουστικής δεν εξαντλείται στην μέθοδο που θα παρουσιάσουμε εδώ, αλλά ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει σε εξειδικευμένα βιβλία (π.χ. Jensen et al. 1994) για περισσότερες λεπτομέρειες καθώς η σχετική θεωρία ξεφεύγει από τον σκοπό του μαθήματος μας

#### 3.2.1 Εκπομπή ηχητικής ενέργειας.

Ας θεωρήσουμε προς στιγμήν ότι βρισκόμαστε σε ένα άπειρο μέσον και ότι υπάρχει σημειακή ηχητική πηγή που εκπέμπει αρμονικά. Η συμμετρία του προβλήματος μας οδηγεί στη διατύπωση της ακουστικής εξίσωσης στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων και στην έκφραση των μεγεθών του προβλήματος ως συναρτήσεις της απόστασης από την πηγή μόνο, όπου θεωρούμε και την αρχή του συστήματός μας.

Εάν διατυπώσουμε τον τελεστή  $\nabla^2$  στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, η ακουστική εξίσωση για την πίεση γράφεται

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial}{\partial r} p(r,t) \right] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p(r,t) \quad (3.2.1)$$

Δεχόμαστε λύση της μορφής



$$p(r, t) = \frac{b_c}{r} \exp[i(kr - \omega t)] \quad (3.2.2)$$

που αντιπροσωπεύει αποκλίνοντα από την πηγή αρμονικά κύματα και εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι ικανοποιεί την ακουστική εξίσωση. Αξίζει εδώ να προσέξουμε την εξάρτηση του πλάτους της πίεσης από την απόσταση. Το πλάτος του κύματος μειώνεται γραμμικά με την απόσταση και το γεγονός αυτό αποτελεί πρακτικά και τη μορφολογική διαφορά της ανωτέρω έκφρασης από τη λύση για επίπεδα κύματα. Ο συντελεστής  $b_c$  υπολογίζεται από τα δεδομένα της ακουστικής πηγής.

Η σχέση ανάμεσα στην ταχύτητα των στοιχειωδών σωματιδίων του μέσου και στην πίεση δίδεται από την έκφραση

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.2.3)$$

όπου  $u$  είναι η συνιστώσα της ταχύτητας κατά την ακτίνα του πολικού διαγράμματος. Υπενθυμίζεται ότι και η ταχύτητα θα πρέπει να έχει την ίδια χρονική εξάρτηση και μια και υπακούει σε εντελώς ίδια εξίσωση και τον ίδιο νόμο μεταβολής του πλάτους της συναρτήσει του  $r$ .

Για μεγάλες αποστάσεις από την πηγή, ( $kr$  μεγάλο) μπορεί να αποδειχθεί ότι η πίεση είναι πρακτικά σε φάση με την ταχύτητα, και μπορούμε να γράψουμε (γιατί:)

$$p(r, t) \approx (\rho c)u(r, t) \quad (3.2.4)$$

Η στιγμιαία ένταση, που είναι η ισχύς που διαδίδεται δια μέσου της μονάδας επιφανείας σε μια χρονική στιγμή είναι το γινόμενο της πίεσης και της ταχύτητας ( $p(r, t)u(r, t)$ ) όταν και οι δύο ποσότητες είναι πραγματικές ή το γινόμενο της πίεσης με τη συζυγή της ταχύτητας, όταν και οι δύο ποσότητες είναι μιγαδικές<sup>4</sup> ( $p(r, t)u^*(r, t)$ ), όπου με  $u^*$  συμβολίζεται η συζυγής της ταχύτητας. Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε την γενική περίπτωση της μιγαδικής ταχύτητας.

Η μέση ένταση που ορίζεται ως η μέση ισχύς που περνά δια μέσου της μονάδας επιφανείας ορίζεται από τη σχέση

$$\langle I \rangle = \text{Real} \left( \frac{1}{T} \int_0^T p(r, t) u^*(r, t) dt \right) \quad (3.2.5)$$

Αντικατάσταση της πίεσης και της ταχύτητας από τις ανωτέρω σχέσεις δίνει

$$\langle I \rangle = \frac{|p|^2}{\rho c} \quad (3.2.6)$$

<sup>4</sup> Η ταχύτητα των στοιχειωδών σωματιδίων μπορεί να θεωρηθεί μιγαδική όταν υπάρχει φυσική εξασθένηση στο πρόβλημα (Κεφάλαιο 3.3)

όπου το μέτρο της πίεσης  $|p|$  υποδηλώνει και την μέση τετραγωνική πίεση. Σε πολλά βιβλία χρησιμοποιείται εναλλακτικά ο συμβολισμός  $P$  για το ως άνω μέγεθος.

Εάν η ολική ισχύς που εκπέμπεται από την πηγή είναι  $\Pi$ , θα πρέπει σε δεδομένη θέση  $r$  να ισχύει

$$\Pi = \int_S \langle I \rangle dS = \int_{4\pi} \langle I \rangle r^2 d\Omega \quad (3.2.7)$$

όπου  $d\Omega = dS / r^2$  είναι η στοιχειώδης στερεά γωνία.

Αφού  $\langle I \rangle$  και  $r$  είναι σταθερά στην επιφάνεια  $dS$ , παίρνουμε

$$\Pi = \langle I \rangle r^2 \int d\Omega = 4\pi |p|^2 \frac{r^2}{\rho c} \quad (3.2.8)$$

Επομένως το μέτρο της πίεσης σε απόσταση  $r$  συναρτήσει της ισχύος της πηγής είναι

$$|p| = \left( \frac{\Pi \rho c}{4\pi r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.2.9)$$

### 3.2.2 Μονάδες μέτρησης της πίεσης και του ηχητικού πεδίου

Η μονάδα μέτρησης της πίεσης στο μετρικό σύστημα είναι τα newtons ανά τετραγωνικό μέτρο ( $\text{N/m}^2$ ) που ονομάζεται και Pascal (Pa). Επειδή όμως σε ένα ακουστικό μέσον αναμένονται έντονες διακυμάνσεις σε αριθμητικά μεγέθη, έχει επικρατήσει να υπολογίζονται τα ακουστικά μεγέθη σε μονάδες decibel (dB). Οι μονάδες αυτές δίδουν μία λογαριθμική έκφραση του αντίστοιχου μεγέθους.

Καλούμε **Επίπεδο έντασης** (sound intensity level ή SIL) το μέγεθος

$$SIL = 10 \log_{10} \frac{I}{I_{ref}} \quad dB re I_{ref} \quad (3.2.10)$$

όπου  $I_{ref}$  είναι η ένταση αναφοράς για την οποία θα μιλήσουμε στη συνέχεια.

Αντίστοιχα ονομάζουμε **Επίπεδο πίεσης** (sound pressure level ή SPL) το μέγεθος

$$SPL = 20 \log_{10} \left| \frac{p}{p_{ref}} \right| \quad dB re p_{ref} \quad (3.2.11)$$

Σημειώνουμε ότι η ένταση είναι ανάλογη του τετραγώνου της πίεσης, επομένως τα δύο μεγέθη είναι ταυτόσημα, εφ' όσον αναφέρονται σε αντίστοιχη ποσότητα αναφοράς. Συνήθως στην υποβρύχια ακουστική χρησιμοποιείται ως μονάδα αναφοράς της πίεσης το  $1\mu\text{Pa}$  ( $10^{-6} \text{N/m}^2$ ).

Ως **Επίπεδο πίεσης πηγής** (source pressure level SL) θεωρούμε κατά σύμβαση το επίπεδο πίεσης σε απόσταση 1 μέτρο από την πηγή. Α απόσταση αυτή συμβολίζεται με  $r_0$ . Με βάση τα μέχρι τώρα λεχθέντα, και σε άπειρο μέσον στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων η πίεση είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης. Επομένως, η πίεση  $|p|$  σε τυχούσα θέση  $r$  δίδεται συναρτήσει της πίεσης  $|p_0|$  στην απόσταση  $r_0$  από τη σχέση

$$|p| = \frac{|p_0| r_0}{r} \quad (3.2.12)$$

Ως **Απώλεια διάδοσης** (transmission loss TL) ορίζουμε τη διαφορά σε επίπεδα πίεσης ανάμεσα σε δύο θέσεις ενός ηχητικού μέσου.

$$TL_{12} = SPL_1 - SPL_2 \quad (3.2.13)$$

όπου οι δείκτες 1 και 2 υποδηλώνουν τις αντίστοιχες θέσεις.

Όταν το μέσον χαρακτηρίζεται από σφαιρική διάδοση ως ανωτέρω, παίρνουμε

$$TL_{12} = 20 \log_{10} \left| \frac{p_1}{p_{ref}} \right| - 20 \log_{10} \left| \frac{p_2}{p_{ref}} \right| = 20 \log_{10} \left| \frac{p_1}{p_2} \right| = 20 \log_{10} \frac{r_2}{r_1} \quad (3.2.14)$$

Στις περισσότερες των περιπτώσεων μας ενδιαφέρει η απώλεια διάδοσης σε σχέση με την απόσταση αναφοράς  $r_0$

$$TL = 20 \log_{10} \frac{r}{r_0} \quad (3.2.15)$$

Η έκφραση «απώλεια διάδοσης» υποδηλώνει ότι η πίεση ελαττώνεται ανάμεσα στις δύο θέσεις ( $TL > 0$ ) που είναι βέβαια εύκολα κατανοητό στη σφαιρική διάδοση όπου λόγω της αύξησης της επιφάνειας του μετώπου κύματος, η πίεση μειώνεται με την απόσταση από την πηγή.

Τέλος να σημειώσουμε ότι στην περίπτωση της πρόσπτωσης κυμάτων τη διαχωριστική επιφάνεια ανάμεσα σε δύο ακουστικά μέσα, ορίζουμε κατ' αντιστοιχία το μέγεθος **απώλεια ανάκλασης** (reflection loss, RL) και επειδή μας ενδιαφέρει στην ακουστική ωκεανογραφία ειδικότερα η περίπτωση της πρόσπτωσης στον πυθμένα, το μέγεθος **απώλεια πυθμένα** (bottom loss, BL) από τη σχέση

$$BL = -20 \log_{10} \left| \frac{p_r}{p_i} \right| = -20 \log_{10} |R_{12}| \quad (3.2.16)$$

όπου το αρνητικό σημείο τίθεται ώστε το μέγεθος να παραμένει θετικό αφού  $|p_r| \leq |p_i|$  και  $R_{12}$  είναι ο συντελεστής ανάκλασης.

### 3.2.3 Απόλεια διάδοσης κατά μήκος μιας ηχητικής ακτίνας

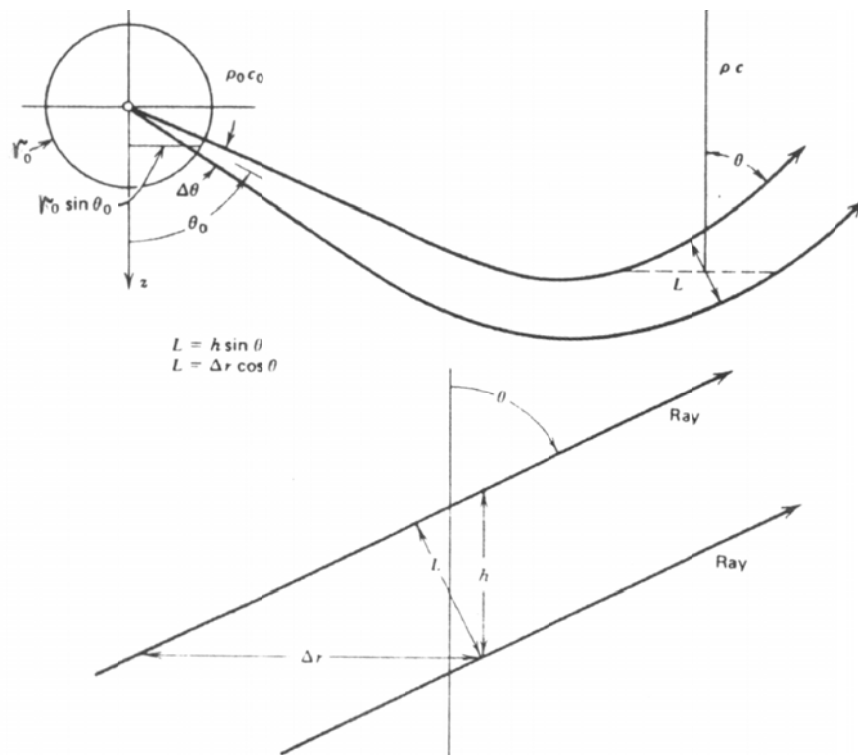
Για να υπολογίσουμε την ακουστική πίεση σε δεδομένη θέση στη θάλασσα με χρήση της γεωμετρικής ακουστικής, θα καταφύγουμε σε μία απλουστευμένη θεώρηση που όμως δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα σε περιοχές που δεν έχουμε έντονη συγκέντρωση ή αραιώση της ηχητικής ενέργειας.

Ο υπολογισμός μας θα βασιστεί στην απόσταση ανάμεσα σε γειτονικές ακτίνες, όπως χαρακτηρίζονται εκείνες που απέχουν μικρή γωνιακή απόσταση  $\Delta\theta$  μεταξύ τους. Ως γωνία  $\theta$  μιας ηχητικής ακτίνας θεωρούμε τη σχηματιζόμενη από την εφαπτομένη στην ακτίνα με την κατακόρυφο (σχήμα 3.7). Στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό  $r$  για την οριζόντια απόσταση, ώστε να υπάρχει αντιστοιχία με την απόσταση αναφοράς.

Με αναφορά στο σχήμα 3.7 για τη γεωμετρία, θεωρούμε μία ηχητική πηγή που εκπέμπει ακουστική ενέργεια ομοιόμορφα σε δέσμη  $\Delta\theta$  (απλούστευση). Η ακουστική ισχύς  $\Delta\Pi$  που εκπέμπεται στον στοιχειώδη δακτύλιο που ορίζεται από την ακτίνα  $r_0$  είναι

$$\Delta\Pi = \frac{|p_0|^2}{\rho_0 c_0} (2\pi r_0 \sin \theta_0) r_0 \Delta\theta \quad (3.2.17)$$

όπου οι δείκτες 0 στην πυκνότητα και ταχύτητα υποδηλώνουν την αναφορά τους στην απόσταση  $r_0$ . Σημειώστε ότι η θεωρούμενη γεωμετρία είναι τρισδιάστατη με συμμετρία γύρω από τον άξονα  $Oz$ .



Σχήμα 3.7 Διάγραμμα ακτίνων για τον υπολογισμό της ακουστικής πίεσης.

Από τη σχέση (3.2.9), η πίεση  $|p_0|$  δίδεται μέσω της

$$|p_0|^2 = \frac{\rho_0 c_0 \Pi}{4\pi r_0^2} \quad (3.2.18)$$

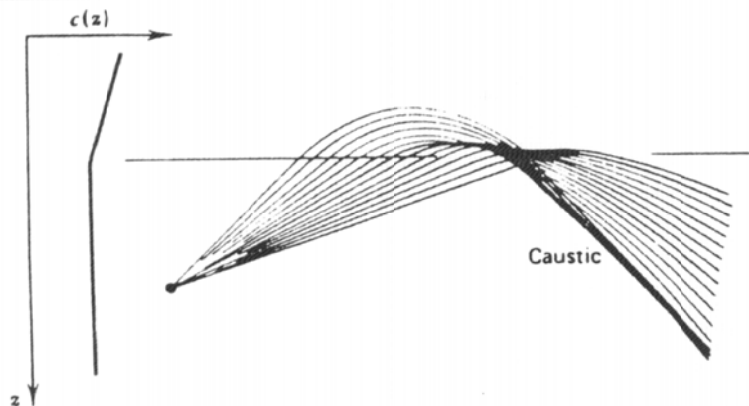
Ας θεωρήσουμε τώρα ότι οι δύο ακραίες ακτίνες της δέσμης έχουν διαδοθεί στο περιβάλλον και μετά από καμπύλωση έχουν έρθει στην κατάσταση που περιγράφεται από το σχήμα 3.7. Η επιφάνεια την οποία διαπερνά η ηχητική ισχύς που περιορίζεται από τις δύο ακραίες ακτίνες είναι  $2\pi rL$ , όπου  $L$  είναι η κάθετη απόσταση ανάμεσα στις ακτίνες που μετράται στο μέτωπο κύματος. Αφού η ισχύς παραμένει η ίδια με την αρχική (απουσία φυσικής εξασθένησης), θα πρέπει να ισχύει

$$\Delta\Pi = \frac{2\pi r_0^2}{\rho_0 c_0} |p_0|^2 \sin\theta_0 \Delta\theta = \frac{2\pi rL |p|^2}{\rho c} \quad (3.2.19)$$

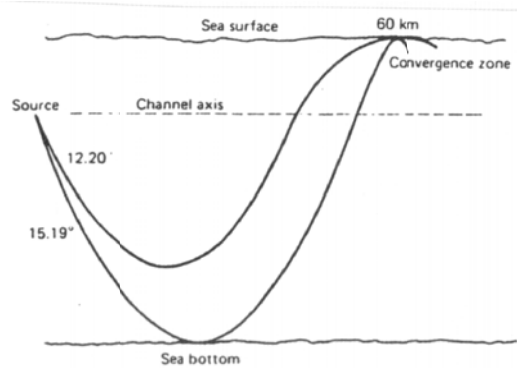
Επομένως η πίεση στην απόσταση  $r$  θα δίδεται από τη σχέση

$$|p|^2 = \frac{|p_0|^2 r_0^2 \rho c \sin\theta_0 \Delta\theta}{\rho_0 c_0 rL} \quad (3.2.20)$$

Παρατηρούμε ότι η πίεση παραμένει πεπερασμένη εκτός εάν  $L=0$ . Η περίπτωση αυτή είναι δυνατή, όταν έχουμε διασταύρωση των ακτίνων (Σχήμα 3.8). Στα σημεία διασταύρωσης επομένως δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την ακουστική πίεση μια και σύμφωνα με την 3.2.20 αυτή φαίνεται να απειρίζεται, ενώ στην πραγματικότητα παραμένει πεπερασμένη. Περιοχές συγκέντρωσης και διασταύρωσης ακτίνων έχουμε πρακτικά σε όλα τα διαγράμματα ακτίνων και ορίζουν τις λεγόμενες «καυστικές» (caustics). Ο υπολογισμός της πίεσης εκεί, με μεθόδους της γεωμετρικής ακουστικής είναι εξαιρετικά δύσκολος. Αντίθετα δεν παρουσιάζει δυσκολίες όταν χρησιμοποιηθούν μέθοδοι κυματικής θεωρίας (Μάθημα Κυματικής Θεωρίας).



Σχήμα 3.8 Ακτίνες που διασταυρώνονται και αντίστοιχο προφίλ ταχύτητας. Σχηματισμός καυστικής.



Σχήμα 3.9 Διάγραμμα ακτίνων στο οποίο παρατηρούμε ζώνη σύγκλισης.

Στο σχήμα 3.9 παρατηρούμε την περίπτωση ενός διαγράμματος ακτίνων που εφάπτονται τόσο του πυθμένα όσο και της επιφάνειας. Η επαφή με την επιφάνεια γίνεται για τη δεδομένη δέσμη εύρους  $3^\circ$  σε απόσταση 60 km όπου και παρατηρείται συγκέντρωση ηχητικής ενέργειας (convergence zone).

Θα κλείσουμε την παράγραφο με τον υπολογισμό της απώλειας διάδοσης κατά μήκος μιας ακτίνας. Σύμφωνα με τα μέχρι τώρα λεχθέντα, η απώλεια διάδοσης ανάμεσα στις αποστάσεις  $r_0$  και  $r$  είναι

$$TL = -20 \log_{10} \left| \frac{p}{p_0} \right| \quad (3.2.21)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 3.2.18 και 3.2.20 παίρνουμε

$$TL = 10 \log_{10} \frac{r}{r_0} - 10 \log_{10} \frac{\rho c}{\rho_0 c_0} + 10 \log_{10} \frac{L}{r_0 \sin \theta_0 \Delta \theta} \quad (3.2.22)$$

#### 3.2.4 Ανακλάσεις στον πυθμένα

Εάν μία ηχητική ακτίνα έρθει σε επαφή με λείες διεπιφάνειες στο χώρο διάδοσης, η ανάκλαση που παρατηρείται οδηγεί σε συνέχιση της πορείας της με γωνία ίση με εκείνη της γωνίας πρόσπτωσης. Η καμπυλότητα της ανακλώμενης ακτίνας στο σημείο πρόσπτωσης είναι ίδια με εκείνη της προσπίπτουσας ακτίνας. Ανακλάσεις αυτού του είδους έχουμε τυπικά στην επιφάνεια και τον πυθμένα της θάλασσας.

Επειδή η επιφάνεια της θάλασσας θεωρείται ελεύθερη πίεσεων, η απώλεια ανάκλασης εκεί είναι 0. Αντίθετα στον πυθμένα της θάλασσας μπορεί να έχουμε σημαντική απώλεια ενέργειας προς τον πυθμένα. Εάν χρειαστεί να υπολογίσουμε την ακουστική πίεση μετά από κάποια ανάκλαση, καταφεύγουμε στην θεωρία των επίπεδων κυμάτων για να κάνουμε τους σχετικούς υπολογισμούς. Με βάση λοιπόν τα όσα έχουμε πει μέχρι τώρα για το συντελεστή ανάκλασης πυθμένα, θα θεωρήσουμε ότι

για μία ακτίνα που χαρακτηρίζεται κατά την πρόσπτωση της στον πυθμένα από τη γωνία  $\theta$ , το μέτωπο κύματος είναι επίπεδο και άρα ο συντελεστής ανάκλασης  $R_{12}$ .

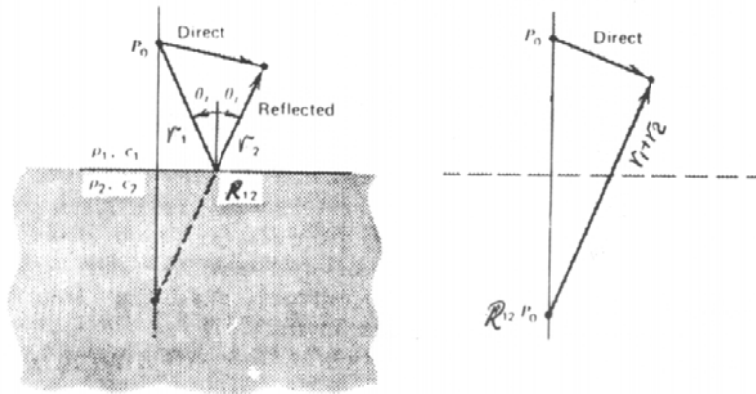
Η σχέση (3.2.16) μας δίνει την απώλεια πυθμένα κατά την πρόσπτωση της ηχητικής ενέργειας στην διεπιφάνεια και το μέγεθος αυτό εκφρασμένο σε dB είναι προσθετός στη σχέση 3.2.22 που δίνει την ολική απώλεια διάδοσης ανάμεσα σε δύο θέσεις στη θάλασσα. Είναι προφανές ότι για την περίπτωση πολλαπλών ανακλάσεων, οι απώλειες πυθμένα αθροίζονται, και βέβαια η ολική πίεση μειώνεται σημαντικά.

Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η περίπτωση αυτή θεωρείστε την ηχητική ακτίνα του σχήματος 3.10. Εάν  $|p_0|$  είναι η πίεση σε απόσταση 1 μέτρο από την πηγή, η

πίεση πρόσπτωσης για σφαιρική διάδοση είναι  $|p_i| = \left| \frac{P_0}{r_1} \right|$ . Η πίεση ανάκλασης είναι

$|p_r| = |R_{12}| \left| \frac{P_0}{r_1} \right|$  και η πίεση στον δέκτη είναι  $|p| = |R_{12}| \left| \frac{P_0}{r_1 + r_2} \right|$  όπου έχουμε υποθέσει

συνέχιση της σφαιρικής διάδοσης, θεωρώντας μία κατοπτρική πηγή ως προς την διεπιφάνεια. Με βάση τα στοιχεία αυτά μπορεί κανείς να υπολογίσει ολικές απώλειες διάδοσης όταν μεσολαβεί διεπιφάνεια στην διάδοση του ήχου.



Σχήμα 3.10 Ηχητική ακτίνα που υφίσταται ανάκλαση στον πυθμένα

### 3.3 Φυσική εξασθένηση της ηχητικής ενέργειας στο νερό και τα ιζήματα του πυθμένα

Στη μέχρι τώρα θεώρηση του προβλήματος δεν είχαμε δεχθεί οποιοδήποτε μηχανισμό απώλειας της ηχητικής ενέργειας. Η ηχητική ενέργεια που εκπέμπεται από την πηγή παραμένει στο ακουστικό μέσον χωρίς μετατροπή. Η έντασή της όμως μεταβάλλεται με βάση την γεωμετρική εξάπλωση που υφίσταται το μήκος κύματος, γεγονός που οδηγεί σε μείωση του πλάτους της ακουστικής πηγής, καθώς η μεταβολή αυτή είναι συνήθως μειωτική (αύξηση της επιφάνειας του μετώπου κύματος).

Στην πραγματικότητα όμως, διάφοροι μηχανισμοί στο νερό και τα θαλασσινά ιζήματα οδηγούν σε μετατροπή της ακουστικής ενέργειας σε άλλης μορφής ενέργεια (π.χ. θερμότητα) χωρίς δυνατότητα επανάκτησης και αυτό σημαίνει ότι χάνεται οριστικά για το ακουστικό μέσον. Οι μηχανισμοί αυτοί είναι περίπλοκοι και δεν είναι

εύκολη η μαθηματική μοντελοποίησή τους. Από τους σημαντικούς ερευνητές που έχουν ασχοληθεί με το αντικείμενο αξίζει να μνημονεύουμε τους Stokes και Kirchoff, οι οποίοι απέδωσαν την εξασθένηση (attenuation) του ήχου σε ένα μέσον στην θερμική αγωγιμότητα και τη συνεκτικότητα.

Απ' ότι φαίνεται από σύγχρονες μελέτες του θέματος, η βασική αιτία απορρόφησης της ηχητικής ενέργειας είναι η συνεκτικότητα (viscosity). Ένα χαρακτηριστικό μέγεθος του προβλήματος είναι ο χρόνος χαλάρωσης (relaxation time) που αντανακλά τον χρόνο που απαιτείται σε ένα μέσον ώστε να ανταποκριθεί στις αλλαγές της πίεσης που του επιβάλλονται. Η απώλεια ενέργειας εξαρτάται από τον λόγο του χρόνου χαλάρωσης προς την περίοδο ενός ακουστικού κύματος. Η απώλεια είναι μέγιστη όταν ο λόγος αυτός είναι μονάδα και μειώνεται δραστικά όταν ο χρόνος είναι πολύ διαφορετικός.

Οι μηχανισμοί ενεργειακής απώλειας οδηγούν σε μεταβολή της πίεσης ενός ακουστικού κύματος, της οποίας ο ρυθμός είναι ανάλογος της πίεσης με ένα συντελεστή που ονομάζεται «συντελεστής απορρόφησης» (absorption coefficient).

Για επίπεδα κύματα, η σχέση αυτή γράφεται

$$\frac{d|p|}{dx} = -a_e |p| \quad (3.3.1)$$

Ολοκληρώνοντας από  $x=0$  έως  $x$  (αντίστοιχα από  $|p_i|$  σε  $|p|$ ), παίρνουμε

$$|p| = |p_i| \exp(-a_e x) \quad (3.3.2)$$

Ο συντελεστής εξασθένησης έχει σύμφωνα με την παραπάνω σχέση μονάδες απόστασης<sup>-1</sup>. Αυτό σημαίνει ότι στην πίεση που υπεισέρχεται στους υπολογισμούς μας, θα πρέπει να περιλάβουμε και την απόσβεση μέσω του εκθετικού όρου. Σημειώνουμε επίσης ότι οι σχέσεις αυτές ισχύουν για την μέση τετραγωνική πίεση.

Στην περίπτωση ενός σφαιρικού κύματος μπορούμε να διαπιστώσουμε εύκολα ότι ισχύουν οι σχέσεις  $|p_i| = |p_0| \frac{r_0}{r}$  για μία απόσταση αναφοράς  $r_0$ , και  $x = r - r_0$  όπου  $r$  είναι η απόσταση από την πηγή. Με αυτά τα δεδομένα γράφουμε

$$|p| = |p_0| \frac{r_0}{r} \exp[-a_e (r - r_0)] \quad (3.3.3\alpha)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την λύση για σφαιρικά κύματα (εξίσωση 3.2.2) μπορούμε να γράψουμε για την ακουστική πίεση τη σχέση

$$p(r, t) = \frac{b_c}{r} \exp[-a_e (r - r_0)] \exp[i(kr - \omega t)] \quad (3.3.3\beta).$$

Στα περισσότερα προβλήματα ενδιαφερόμαστε για το ακουστικό πεδίο σε μεγάλες αποστάσεις, ενώ η απόσταση αναφοράς αναφέρεται κοντά στην πηγή (συνήθως 1 m).



Έτσι ισχύει  $r \gg r_0$  και παραλείπεται το  $r_0$  στη σχέση που μας δίνει την ακουστική πίεση

$$p(r, t) = \frac{b_c}{r} \exp[-a_e r] \exp i(kr - \omega t) \quad (3.3.3\gamma)$$

Η ανωτέρω μορφή μας δίνει τη δυνατότητα να εκφράσουμε την απορρόφηση, μέσω ενός μιγαδικού αριθμού κύματος, του οποίου το φανταστικό μέρος θα είναι ο συντελεστής απορρόφησης

$$k_c = k + ia_e \quad (3.3.4)$$

Η ακουστική πίεση γράφεται στην περίπτωση αυτή :

$$p(r, t) = \frac{b_c}{r} \exp i(k_c r - \omega t) \quad (3.3.5)$$

και διαπιστώνουμε ότι έχει ακριβώς την ίδια μορφή με εκείνη της περίπτωσης χωρίς απώλειες με την μόνη διαφορά στον αριθμό κύματος που είναι πλέον μιγαδικός αριθμός.

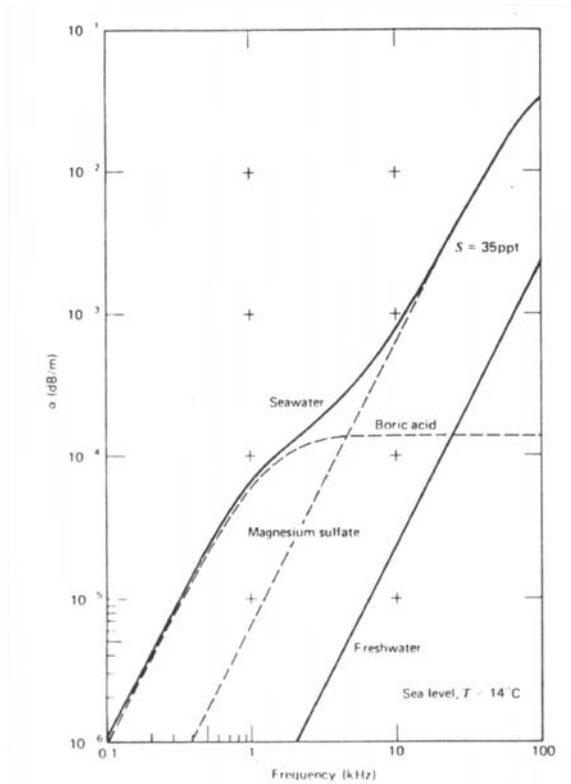
Ο μιγαδικός αριθμός κύματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε κάθε περίπτωση που θεωρήσουμε απόσβεση σε ένα ακουστικό μέσον. Ο συντελεστής απόσβεσης είναι συνήθως μικρός αριθμός (για μικρές συχνότητες). Οι μονάδες του είναι ( $m^{-1}$ ) ή nep/m. Μπορεί ωστόσο να εκφραστεί σε dB/m, μέσω των σχέσεων ορισμού της απώλειας διάδοσης σε dB.

$$TL = 20 \log_{10} \left| \frac{p_i}{p} \right| = a_e x (20 \log_{10} e) = 8,686 a_e x \quad (3.3.6)$$

Επομένως μπορούμε να ορίσουμε τον ισοδύναμο συντελεστή απορρόφησης σε dB/m μέσω της σχέσης

$$a = 8,686 a_e \quad (3.3.7)$$

Στο σχήμα 3.11 βλέπουμε ένα διάγραμμα που παριστάνει την εξάρτηση του συντελεστή απορρόφησης με τη συχνότητα. Οι μηχανισμοί φυσικής εξασθένησης που επενεργούν στο θαλασσινό νερό φαίνονται χωριστά. Πρόκειται για τη συνεκτικότητα (viscosity) που αναφέρεται στο γλυκό νερό και τη διάλυση αλάτων και οξέων (magnesium sulfate και boric acid). Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι ο συντελεστής εξασθένησης αυξάνει με το τετράγωνο της συχνότητας, γεγονός που καθιστά τις υψηλές συχνότητες μη αποδοτικές στο νερό για τις συνήθεις εφαρμογές της ακουστικής ωκεανογραφίας, ή τουλάχιστον όχι το ίδιο αποδοτικές με τις χαμηλές συχνότητες.



Σχήμα 3.11 Διάγραμμα υπολογισμού του συντελεστή φυσικής εξασθένησης στο νερό.

### 3.4 Η εξίσωση SONAR

Η εξίσωση του SONAR συνδέει σε λογαριθμική κλίμακα κρίσιμα μεγέθη που υπεισέρχονται στη διαδικασία διάδοσης και λήψης της ηχητικής ενέργειας για επιχειρησιακούς λόγους. Τα μεγέθη αυτά είναι η ένταση της πηγής, η κατευθυντότητά της, η απώλεια διάδοσης, ο θόρυβος του περιβάλλοντος, η κατευθυντότητα του δέκτη, η ένταση ενός στόχου και άλλα.

Με όσο έχουμε πει μέχρι τώρα μπορούμε να διατυπώσουμε κάποιους από τους όρους της εξίσωσης του SONAR με την παρατήρηση ότι όσο πιο πολλοί παράγοντες θεωρούμε ότι υπεισέρχονται στο πρόβλημα, τόσο περισσότερους όρους πρέπει να περιλάβουμε στην εξίσωση του SONAR.

Η απλούστερη μορφή της εξίσωσης συνδέει το επίπεδο πηγής, το επίπεδο δέκτη και την απώλεια διάδοσης μέσω της σχέσης

$$SPL = SL - TL \quad (3.4.1)$$

Το επίπεδο της πηγής αναφέρεται κατά σύμβαση σε απόσταση 1 m από αυτήν και δίδεται από τη σχέση

$$SL = 10 \log_{10} \left| \frac{P_0}{P_{ref}} \right|^2 \text{ dB re } p_{ref} \quad (3.4.2)$$

Το επίπεδο δέκτη δίδεται από τη σχέση (3.2.11), ενώ η πίεση στο δέκτη δίδεται από τη σχέση (3.2.20) και η απώλεια διάδοσης δίδεται από τη σχέση (3.2.22).

Εάν περιλάβουμε την φυσική απόσβεση στους υπολογισμούς μας, η πίεση στο δέκτη γράφεται :

$$|p|^2 = \frac{|p_0|^2 r_0^2 \rho c \sin \theta_0 \Delta \theta}{\rho_0 c_0 r L} 10^{-a(R-r_0)/10} \quad (3.4.3)$$

όπου  $R$  είναι η απόσταση που διήνυσε η ηχητική ενέργεια πάνω στην ακτίνα (όχι σε ευθεία γραμμή) και η απώλεια διάδοσης (για την περίπτωση της σφαιρικής διάδοσης) γράφεται ως

$$TL = 20 \log_{10} \frac{r}{r_0} - 10 \log_{10} \frac{\rho c}{\rho_0 c_0} + 10 \log_{10} \frac{L}{r_0 \sin \theta_0 \Delta \theta} + a(R - r_0) \quad (3.4.4)$$

Εάν περιλάβουμε στους μηχανισμούς μας την απώλεια βυθού, η εξίσωση SONAR γράφεται

$$SPL = SL - TL - BL \quad (3.4.5)$$

όπου το μέγεθος  $BL$  μπορεί κατά τα γνωστά να περιλαμβάνει πολλούς όρους.

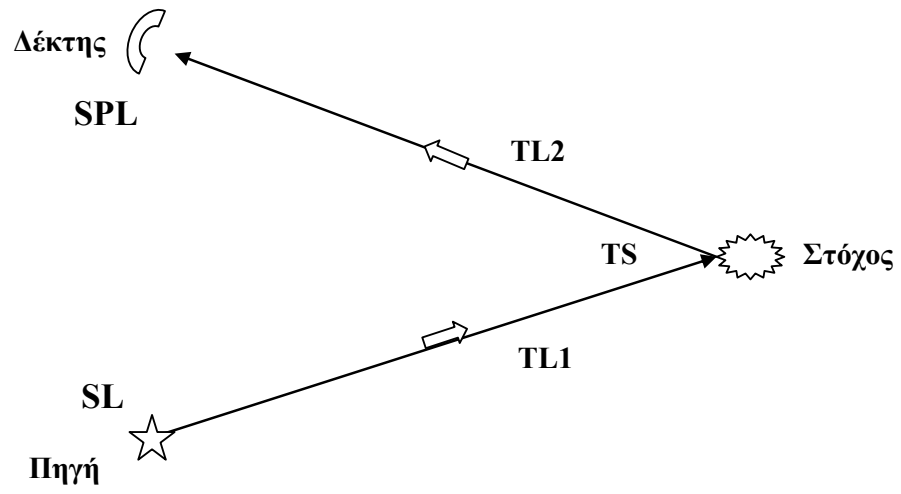
Εάν ο δέκτης δεν μπορεί να λάβει την ηχητική ενέργεια το ίδιο καλά από όλες τις διευθύνσεις λόγω ειδικών χαρακτηριστικών κατευθυντότητας, το επίπεδο πίεσης που μετράται στον δέκτη μπορεί να είναι μικρότερο από το πραγματικό και αυτό εκφράζεται σε dB μέσω του συντελεστή κατευθυντότητας  $DI$ , οπότε η εξίσωση γράφεται

$$SPL = SL - TL - BL - DI \quad (3.4.6)$$

Εάν, στην ακουστική διάδοση μεσολαβήσει ένας στόχος, η σκέδαση της ενέργειας που προξενεί περιγράφεται μέσω του μεγέθους «Ισχύς στόχου» (Target Strength). Το μέγεθος αυτό μπορεί να είναι προσθετικό ή αφαιρετικό ανάλογα με την φύση του στόχου και την ικανότητά του να συγκεντρώνει ή να σκεδάζει την ηχητική ενέργεια που προσπίπτει. Εάν για παράδειγμα θεωρήσουμε παντοκατευθυντικό δέκτη ( $DI=0$ ) και ως μόνους μηχανισμούς απωλειών, την απώλεια από την πηγή στον στόχο και από τον στόχο στον δέκτη (Σχήμα 3.12), γράφομε την εξίσωση ως

$$SPL = SL - TL_1 + TS - TL_2 \quad (3.4.7)$$

Αργότερα θα δούμε και άλλες εφαρμογές της εξίσωσης SONAR.



Σχήμα 3.12 Στόχος στο ακουστικό πεδίο μιας πηγής. Μεγέθη που υπεισέρχονται στην εξίσωση SONAR.

#### 4. Εισαγωγή στην επεξεργασία ακουστικών σημάτων

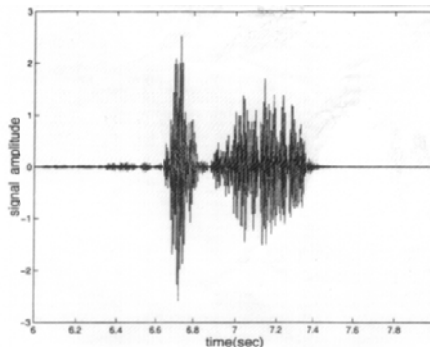
Τα ακουστικά σήματα που χρησιμοποιούνται στο θαλάσσιο περιβάλλον ποικίλουν ανάλογα με την εφαρμογή και τις απαιτήσεις συχνότητας. Κύρια κριτήρια επιλογής τους σε μια συγκεκριμένη εφαρμογή, είναι η μεταφορά όσο το δυνατό μεγαλύτερης ενέργειας σε μεγάλη απόσταση και η επίτευξη χαρακτηριστικών λήψης που να είναι εύκολα αναγνωρίσιμα και αξιοποιήσιμα. Με την έννοια αυτή ένα ημιτονοειδές κύμα (κύμα σταθερής συχνότητας  $\omega$ , άπειρης διάρκειας), όπως αυτό στο οποίο βασίσαμε τη μέχρι τώρα ανάπτυξη δεν θεωρείται το πλέον κατάλληλο, μια και δεν έχει καλά χαρακτηριστικά αναγνωρισιμότητας, όπως π.χ. μέτρησης χρόνου. Είναι δύσκολο στα πλαίσια ενός εισαγωγικού μαθήματος να συζητήσει κανείς τα χαρακτηριστικά κάποιων από τα σήματα αυτά, έχει όμως νόημα να αναφερθούμε σε στοιχεία της επεξεργασίας τους που θα βοηθήσουν να κατανοήσουμε έννοιες όπως του εύρους του σήματος (bandwidth) του μετασχηματισμού από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο των συχνοτήτων κ.λ.π. Έτσι θα γίνει κατανοητή και η επιμονή μας στην αναφορά των λύσεων που αφορούν περιοδικά σήματα,

##### 4.1 Στοιχεία από την ανάλυση των ακουστικών σημάτων – Ανάλυση Fourier.

Τα ακουστικά σήματα μετρώνται πρωτογενώς στο πεδίο του χρόνου. Εάν τα θεωρήσουμε με την αναλογική τους έκφραση, περιγράφονται ως συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου  $f(t)$ . Για παράδειγμα ένα μονοχρωματικό σήμα που οδεύει κατά μήκος του άξονα  $r$  μπορεί να έχει την έκφραση.

$$f(t) = A \sin(kr - \omega t) \quad (4.1.1)$$

Ένα τυχαίο σήμα (ντετερμινιστικό όμως ως προς την έκφρασή του) μπορεί να συντεθεί από πολλές αρμονικές, συνιστώσες δηλαδή που έχουν την ως άνω μορφή (4.1.1) αλλά που μπορεί να διαφέρουν ως προς το πλάτος και τη συχνότητα. Εάν θεωρήσουμε μία συνεχή κατανομή συχνοτήτων, η συνεισφορά κάθε μίας από τις συχνότητες στο σήμα, χαρακτηρίζεται μέσω της συνάρτησης  $F(\omega)$ . Οι συναρτήσεις  $f(t)$  και  $F(\omega)$  αποτελούν ένα ζεύγος συναρτήσεων που χαρακτηρίζει το οποιοδήποτε αναλογικό σήμα. Ο υπολογισμός του κάθε μέλους του ζεύγους μπορεί να γίνει εάν γνωρίζουμε το άλλο, μέσω του **Μετασχηματισμού Fourier** που θα αναπτύξουμε στη συνέχεια.



Σχήμα 4.1 Καταγραφή ενός ακουστικού σήματος στο πεδίο του χρόνου

Εάν οι ως άνω συναρτήσεις δεν είναι συνεχείς αλλά δίδονται για συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών  $t$  και  $\omega$  ( $t_i, \omega_j$ ), η σχέση τους δίδεται μέσω του **Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier**. Με δεδομένη τη σύγχρονη ψηφιακή τεχνολογία, η τελευταία αυτή περίπτωση παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε και στις δύο περιπτώσεις αρχίζοντας από τη συνεχή περίπτωση.

#### 4.1.1 Ο Μετασχηματισμός Fourier.

**ΟΡΙΣΜΟΣ** : Τα ζεύγη των μιγαδικών εν γένει συναρτήσεων  $f(t)$  και  $F(\omega)$  καλούνται ζεύγη μετασχηματισμού Fourier, και συμβολίζονται ως  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ , όταν σχετίζονται μέσω των εξισώσεων

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (4.1.2)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (4.1.3)$$

Γράφοντας τις παραπάνω σχέσεις υποθέτουμε ότι τα ολοκληρώματα υπάρχουν με την έννοια της πρωτεύουσας τιμής του Cauchy. Η συνάρτηση  $F(\omega)$  ονομάζεται μετασχηματισμός Fourier της  $f(t)$  και συμβολίζεται και ως  $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f(t)\}$  ενώ η  $f(t)$  χαρακτηρίζεται ως αντίστροφος μετασχηματισμός της  $F(\omega)$  και συμβολίζεται ως  $f(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{F(\omega)\}$ . Να σημειώσουμε εδώ ότι η γραφική παράσταση των συναρτήσεων  $F(\omega)$  και  $f(t)$  για τις πρακτικές εφαρμογές αναφέρεται στο μέτρο τους π.χ. ( $|F(\omega)|$ ) που είναι και ένας ενεργειακός δείκτης πολύ χρήσιμος στις εφαρμογές.

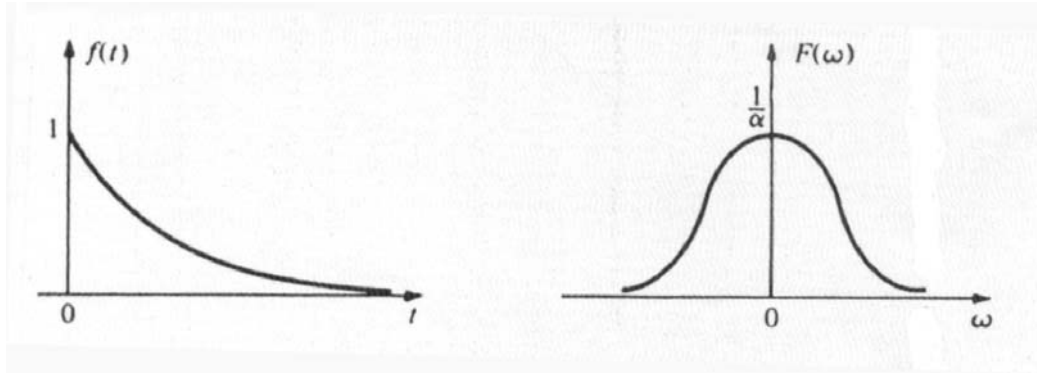
Για παράδειγμα, εάν  $f(t) = e^{-at}$   $a > 0$   $t > 0$  (Σχήμα 4.2), η  $F(\omega)$  είναι

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt = \frac{1}{a+i\omega} \quad (4.1.4)$$

Εύκολα μπορεί κανείς να επιβεβαιώσει και την αντίστροφη σχέση 4.1.3.

Όπως είπαμε, οι συναρτήσεις  $f(t)$  και  $F(\omega)$  είναι γενικά μιγαδικές.

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t) \quad F(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$$



Σχήμα 4.2 Παράδειγμα σήματος στα πεδία του χρόνου και της συχνότητας. Η  $F(\omega)$  του σχήματος αντιστοιχεί στο μέτρο της μετασχηματισμένης συνάρτησης

Χρησιμοποιώντας την έκφραση της εκθετικής συνάρτησης μέσω ημίτονου και συνημίτονου μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε σε εκφράσεις για τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των ως άνω συναρτήσεων της μορφής

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t) \cos \omega t + f_2(t) \sin \omega t] dt \quad (4.1.5a)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_2(t) \cos \omega t - f_1(t) \sin \omega t] dt \quad (4.1.5\beta)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) \cos \omega t - X(\omega) \sin \omega t] d\omega \quad (4.1.5\gamma)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) \sin \omega t + X(\omega) \cos \omega t] d\omega \quad (4.1.5\delta)$$

Στην πράξη, οι συναρτήσεις  $f(t)$  αντιπροσωπεύουν πραγματικές μετρήσεις σημάτων στο πεδίο του χρόνου και είναι πραγματικές συναρτήσεις ( $f_2(t) = 0$ ). Στην περίπτωση αυτή εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ισχύει

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad X(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (4.1.6)$$

Άλλες σχέσεις που ισχύουν στην περίπτωση αυτή είναι  $R(-\omega) = R(\omega)$  και  $X(-\omega) = -X(\omega)$ . Έτσι  $F^*(\omega) = F(-\omega)$  (με \* υποδηλώνουμε τον συζυγή).

Στην περίπτωση που η συνάρτηση  $f(t)$  είναι άρτια, ( $f(-t) = f(t)$ ) παίρνομε  $X(\omega) = 0$ . Δηλαδή ο μετασχηματισμός μιας πραγματικής άρτιας συνάρτησης δίδει πραγματική συνάρτηση. Αντίστοιχα εάν  $f(-t) = -f(t)$  (περιττή συνάρτηση) παίρνομε  $R(\omega) = 0$ .

Παραθέτομε στη συνέχεια χωρίς απόδειξη μια σειρά από ενδιαφέροντα θεωρήματα αντιστοίχισης που ισχύουν για κάθε ζεύγος μετασχηματισμού Fourier.

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \quad \text{Συμμετρία}$$

$$f^*(t) \leftrightarrow F^*(-\omega) \quad \text{Συζυγείς συναρτήσεις}$$

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad \text{Κλίμακα}$$

$$f(t-a) \leftrightarrow e^{-ia\omega} F(\omega) \quad \text{Μετατόπιση}$$

$$f(t)e^{iat} \leftrightarrow F(\omega-a)$$

$$f(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)] \quad \text{Διαμόρφωση}$$

#### 4.1.2 Συνέλιξη

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις  $f_1(t)$  και  $f_2(t)$  και τα αντίστοιχα δεύτερα μέλη των ζευγών του μετασχηματισμού Fourier  $F_1(\omega)$  και  $F_2(\omega)$ .

Συνέλιξη (convolution) των συναρτήσεων  $f_1(t)$  και  $f_2(t)$  ονομάζουμε το ολοκλήρωμα

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \quad (4.1.7)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό αντιπροσωπεύει μία νέα συνάρτηση του χρόνου και είναι ιδιαίτερα σημαντικό στη μελέτη των φίλτρων και στο γινόμενο σημάτων που χαρακτηρίζονται από τις συναρτήσεις  $f_1(t)$  και  $f_2(t)$ .

Εάν πάρουμε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης  $(f_1 * f_2)(t)$ , έχουμε για  $t = \tau + x$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(\tau+x)} f_2(x) dx d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) e^{-i\omega x} dx = F_1(\omega) F_2(\omega) \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

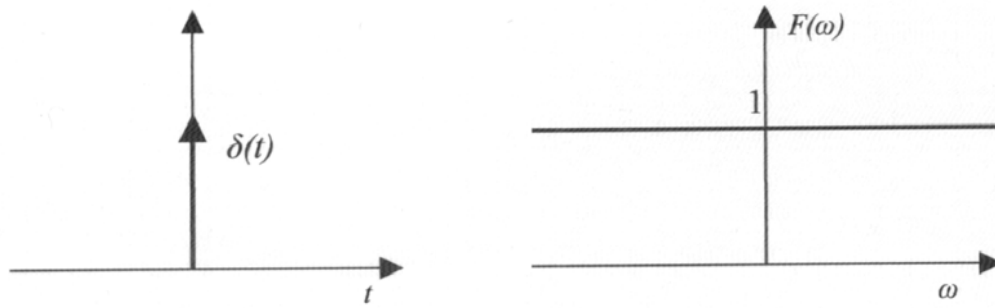
Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ένα σημαντικό συμπέρασμα σε ό,τι αφορά το γινόμενο συναρτήσεων που περιγράφονται στο πεδίο των συχνοτήτων :

**Η συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου μετασχηματίζεται σε γινόμενο συναρτήσεων στο πεδίο των συχνοτήτων**

Η συμβολικά : Εάν  $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$  και  $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$  τότε

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega) \quad (4.1.9)$$





Σχήμα 4.3 Ο παλμός δ.

Αντίστοιχα μπορούμε να δείξουμε (Άσκηση) ότι

$$f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) \quad (4.1.10)$$

#### 4.1.3 Ο παλμός δ

Σε πολλές εφαρμογές της ανάλυσης σημάτων συναντάμε συναρτήσεις με τη μορφή ενός *παλμού δέλτα* (delta function  $\delta$ ). Οι ιδιότητες της ειδικής αυτής συνάρτησης βασίζονται στην ορισμό της, που δίδεται μέσω της σχέσης

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt = \phi(0) \quad (4.1.11)$$

που ισχύει για κάθε συνάρτηση  $\phi(t)$  που είναι συνεχής στο  $t = 0$ .

Από την ανωτέρω σχέση προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t} dt = 1 \quad (4.1.12)$$

που σημαίνει απλά ότι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης  $\delta$  είναι η μονάδα (1).

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad (4.1.13)$$

Με άλλα λόγια, ένας παλμός δέλτα στο πεδίο του χρόνου (στιγμιαία διέγερση) μετασχηματίζεται στο πεδίο των συχνοτήτων σε μία σταθερή συνάρτηση (Σχήμα 4.3).

Εάν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση για τον αντίστροφο μετασχηματισμό, παίρνουμε

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \quad (4.1.14)$$

Εάν  $f(t) = 1$  παίρνουμε

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega) \quad (4.1.15)$$

Επομένως :

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad (4.1.16)$$

#### 4.1.4 Περιοδικά σήματα – Σειρές Fourier

Το πέρασμα από το συνεχή μετασχηματισμό Fourier στο διακριτό είναι απαραίτητο μια και σήμερα η επεξεργασία των σημάτων είναι άμεσα συνδεδεμένη με την ψηφιακή ανάλυση. Τα σήματα ψηφιοποιούνται και βέβαια η επεξεργασία γίνεται σε πεπερασμένο χρόνο και για πεπερασμένες συχνότητες. Έτσι δεν είναι δυνατή η άμεση εφαρμογή του συνεχούς μετασχηματισμού Fourier. Αναζητείται συνεπώς κάτι περισσότερο συνδεδεμένο με τα πραγματικά δεδομένα της ανάλυσης σημάτων. Ως πρώτο βήμα για το σκοπό αυτό, ας θεωρήσουμε ένα περιοδικό σήμα στο πεδίο του χρόνου. Το σήμα αυτό εκφράζεται μέσω της συνάρτησης  $f(t)$  για την οποία ισχύει

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t + nT) \quad (4.1.17)$$

$$\text{όπου } f_0(t) = \begin{cases} f(t) & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

και  $T$  είναι η περίοδος του σήματος.

Εάν συμβολίσουμε με  $\bar{\delta}(t)$  τη σειρά

$$\bar{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t + nT) \quad (4.1.18)$$

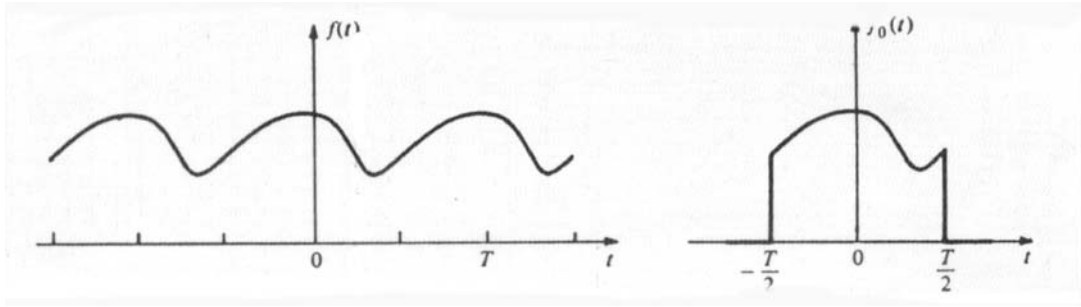
μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση  $f(t)$  γράφεται ως

$$f(t) = \bar{\delta}(t) * f_0(t) \quad (4.1.19)$$

Συμβολίζοντας με  $\bar{\delta}(\omega)$  τη σειρά,  $\bar{\delta}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$  όπου  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ , μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι  $\bar{\delta}(t) \leftrightarrow \omega_0 \bar{\delta}(\omega)$ .

Στη συνέχεια παίρνουμε το μετασχηματισμό Fourier των δύο μερών της 4.1.19 και με χρήση του θεωρήματος συνέλιξης έχουμε :

$$F(\omega) = \omega_0 \bar{\delta}(\omega) \cdot F_0(\omega) = \omega_0 F_0(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0) \quad (4.1.20)$$



Σχήμα 4.4 Περιοδικό σήμα

όπου έγινε χρήση της ιδιότητας των συναρτήσεων  $\delta$ ,  $f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a)$ .

Επομένως καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι ο μετασχηματισμός Fourier μιας περιοδικής συνάρτησης περιόδου  $T$ , αποτελείται από μία αλληλουχία παλμών  $\delta$  σε αποστάσεις  $\omega_0$  μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα οδηγεί στην έκφραση της  $f(t)$  μέσω σειράς Fourier. Πράγματι, εάν πάρουμε

$$a_n = \frac{1}{T} F_0(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (4.1.21)$$

και τον αντίστροφο μετασχηματισμό στα δύο ακραία μέλη της εξίσωσης (4.1.20), οδηγούμεθα στη σχέση

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega_0 t} \quad (4.1.22)$$

Με άλλα λόγια, στο πεδίο των συχνοτήτων, η περιοδικότητα της συνάρτησης εκφράζεται με διακριτή αλληλουχία παλμών και επομένως στο πεδίο του χρόνου η συνάρτηση  $f(t)$  θα πρέπει να αναπλαστεί με σειρά και όχι ολοκλήρωμα. Προσέξτε επίσης τα όρια ολοκλήρωσης στον υπολογισμό των συντελεστών  $a_n$  που δεν είναι πλέον το άπειρο.

Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί και ένα θεώρημα συνέλιξης για τα σήματα της ως άνω κατηγορίας. Έτσι, εάν

$$f_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega_0 t} \quad f_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\omega_0 t} \quad (4.1.23)$$

τότε

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_n e^{in\omega_0 t} \quad (4.1.24)$$

και

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t)f_2(t)e^{-in\omega_0 t} dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{n-m} \quad (4.1.25)$$

Τέλος αξίζει να παρατηρήσουμε ότι εάν η περίοδος της συνάρτησης  $f(t)$  αρχίζει τη χρονική στιγμή  $T_0$ , τα όρια ολοκλήρωσης στην 4.1.21 είναι από  $T_0$  έως  $T_0 + T$ . Είναι επίσης συνηθισμένο η ολοκλήρωση να γίνεται ως προς τη συχνότητα και όχι ως προς την κυκλική συχνότητα (πρβλ την αναφορά μας στα φίλτρα). Συμβολίζοντας με  $f$  τη συχνότητα και αλλάζοντας το συμβολισμό της συνάρτησης του χρόνου σε  $x(t)$ , για να αποφύγουμε τυχόν σύγχυση με την συχνότητα, γράφουμε για το ζεύγος του μετασχηματισμού

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{i2\pi n f_0 t} \quad X_n = \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt \quad (4.1.26)$$

εδώ,  $f_0 = \frac{1}{T}$

#### 4.1.5 Ο Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT) \quad \bar{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + n\omega_1) \quad (4.1.27)$$

Η συνάρτηση  $\bar{f}(t)$  είναι περιοδική με περίοδο  $T$ , ενώ η  $\bar{F}(\omega)$  είναι επίσης περιοδική με περίοδο  $\omega_1$ .

Μπορεί ναδειχτεί ότι η συνάρτηση  $\bar{f}(t)$  γράφεται με τη μορφή ενός αθροίσματος Poisson (Poisson sum formula) ως

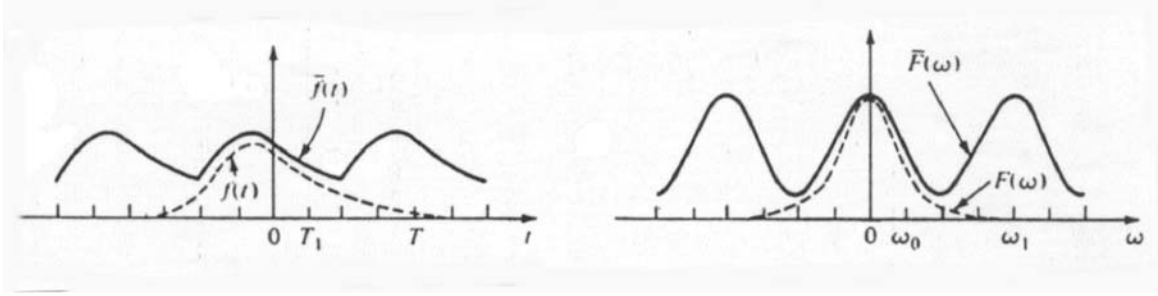
$$\bar{f}(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) e^{in\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (4.1.28)$$

Προφανώς, οι συντελεστές  $F(n\omega_0)$  είναι οι συντελεστές Fourier της περιοδικής συνάρτησης  $T\bar{f}(t)$ . Δηλαδή

$$F(n\omega_0) = \int_{-T/2}^{T/2} T\bar{f}(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (4.1.29)$$

Αντίστοιχα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\bar{F}(\omega) = \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_1) e^{-inT_1\omega} \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad (4.1.30)$$

Σχήμα 4.5 Οι συναρτήσεις  $\bar{f}(t)$  και  $\bar{F}(\omega)$ 

Οι συντελεστές  $F(n\omega_0)$  μπορεί να θεωρηθούν ως διακριτές τιμές της συνάρτησης  $F(\omega)$ . Επίσης μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για τις τιμές  $n\omega_0$ , το ολοκλήρωμα  $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$  με όρια στο άπειρο μεταπίπτει στο πεπερασμένο ολοκλήρωμα 4.1.29 για την συνάρτηση  $\bar{f}(t)$ .

Χρειαζόμαστε κάτι ανάλογο και για τη συνάρτηση  $f(t)$ . Δηλαδή ένα τρόπο υπολογισμού των διακριτών τιμών της στο πεδίο του χρόνου εάν γνωρίζουμε την μετασχηματισμένη της στο πεδίο συχνότητας. Επί πλέον θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμο να μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα 4.1.29 με την μορφή σειράς.

Ας θεωρήσουμε την περιοδική συνάρτηση

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t} \quad (4.1.31)$$

Εάν  $N$  είναι μία αυθαίρετη σταθερά και  $T_1 = T/N$ , οι διακριτές τιμές της  $y(t)$  δίδονται από τις σχέσεις

$$y(mT_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 mT_1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k w_N^{km} \quad w_N = e^{i2\pi/N} \quad (4.1.32)$$

όπου  $\omega_0 T_1 = \omega_0 T/N = 2\pi/N$

Ο ακέραιος  $k$  γράφεται ως ένα άθροισμα  $k = n+rN$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ ,  $r = \dots, -1, 0, 1, \dots$  και αφού  $w_N^N = 1$ ,  $w_N^{km} = w_N^{(n+rN)m} = w_N^{nm}$ .

Επίσης, η (4.1.32) γράφεται

$$y(mT_1) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{n+rN} w_N^{(n+rN)m} = \sum_{n=0}^{N-1} w_N^{nm} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{n+rN} \quad (4.1.33)$$

Εάν δεχτούμε την αντικατάσταση  $\bar{c}_N \equiv \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{n+rN}$ , παίρνουμε

$$y(mT_1) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{c}_n w_N^{mn}, \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (4.1.34)$$

Έτσι παίρνουμε ουσιαστικά  $N$  εξισώσεις που ορίζουν μέσω των συντελεστών  $\bar{c}_n$  τις διακριτές τιμές της συνάρτησης  $y(t)$ .

Τα ανωτέρω ισχύουν και για τη συνάρτηση  $f(t)$ , όπως αυτή ορίζεται από την (4.1.28).

Υπενθυμίζοντας τις σχέσεις

$$T_1 = T/N, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = N\omega_0, \quad \text{έχομε}$$

$$\bar{f}(mT_1) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{F}(n\omega_0) w_N^{mn}, \quad w_N = e^{i2\pi/N} \quad (4.1.35)$$

Η τελευταία έκφραση μας δίνει  $N$  εξισώσεις (για  $m=0, \dots, N-1$ ), που μας δίδουν τις διακριτές τιμές  $\bar{F}(n\omega_0)$  της  $\bar{F}(\omega)$  συναρτήσεως των διακριτών τιμών  $\bar{f}(mT_1)$ .

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι εάν  $F(\omega) = 0$  για  $|\omega| > \sigma$  και  $\omega_1 > 2\sigma$ , τότε  $F(\omega) = \bar{F}(\omega)$  για  $|\omega| < \sigma$  και η λύση της 4.1.35 δίνει τις διακριτές τιμές της  $F(\omega)$ .

Η σχέση (4.1.35) είναι της μορφής

$$A_m = \sum_{n=0}^{N-1} a_n w_N^{mn} \quad m = 0, \dots, N-1, \quad w_N = e^{i2\pi/N} \quad (4.1.36)$$

και μπορούμε να δείξουμε ότι

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} A_m w_N^{-mn} \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (4.1.37)$$

Τα ζεύγη των συντελεστών που ορίζονται από τις σχέσεις (4.1.36) και (4.1.37) αποτελούν μία διακριτή σειρά ζευγών Fourier (*discrete Fourier series pair*) τάξης  $N$ . και θα συμβολίζονται με

$$a_n \leftrightarrow A_m$$

Η σειρά είναι περιοδική, δηλαδή ισχύει

$$A_{m+N} = A_m, \quad a_{n+N} = a_n$$

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι για περιοδικά σήματα, η διακριτή σειρά Fourier μας δίνει μέσω των 4.1.30 και 4.1.35, διακριτές τιμές του σήματος στο πεδίο του

χρόνου και των συχνοτήτων. Μία δειγματοληψία με  $N$  τιμές επομένως στο ένα από τα δύο πεδία μας δίδει μία αντίστοιχη δειγματοληψία στο άλλο πεδίο, με τον ίδιο αριθμό σημείων.

Δεν χρειάζεται επομένως να καταφύγει κανείς σε ολοκληρώματα για να πάρει κάποιες από τις δύο τιμές. Υπάρχει βέβαια πάντα η απαίτηση επίλυσης ενός συστήματος  $N$  εξισώσεων. Οι υπολογισμοί γίνονται γρήγορα σε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή, ωστόσο με ειδική τεχνική (*Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier – Fast Fourier Transform ή FFT*) είναι δυνατόν αυτοί να επιταχυνθούν σημαντικά.

Θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι όταν έχουμε ένα τυχαίο σήμα στο πεδίο του χρόνου, θα πρέπει να γίνει κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων του διακριτού μετασχηματισμού Fourier ώστε να μειωθεί το λάθος που γίνεται όταν οι συντελεστές της  $F(\omega)$  προσεγγιστούν κατά τα ανωτέρω με εκείνους της  $\bar{F}(\omega)$ . Το λάθος αυτό είναι γνωστό στην βιβλιογραφία ως *aliasing error*.

Μέχρι τώρα έχουμε δείξει ότι οι δειγματοληπτικές τιμές

$$\bar{f}(mT_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(mT_1 + kT), \quad \bar{F}(n\omega_0) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0 + r\omega_1) \quad (4.1.38)$$

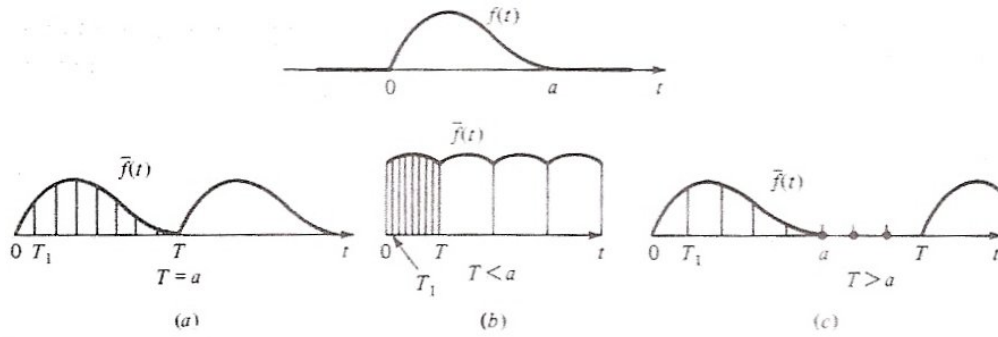
των συναρτήσεων  $\bar{f}(t)$  και  $\bar{F}(\omega)$  ορίζουν ένα ζεύγος διακριτού μετασχηματισμού Fourier, ως εξής:

$$\frac{1}{T} \bar{F}(n\omega_0) \leftrightarrow \bar{f}(mT_1)$$

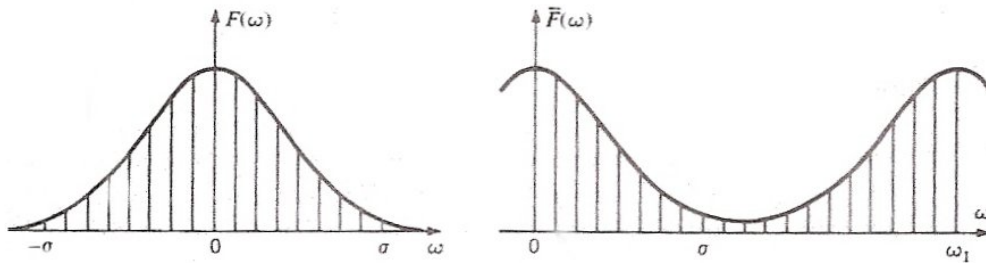
συνεπώς, από την 4.1.37 παίρνουμε

$$\bar{F}(n\omega_0) = T_1 \sum_{m=0}^{N-1} \bar{f}(mT_1) w_N^{-mn} \quad (4.1.39)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε ένα τυχαίο σήμα  $f(t)$  το οποίο περιορίζεται στο διάστημα  $(0, a)$  και είναι μηδέν έξω από το διάστημα αυτό (Σχήμα 4.6). Στην πράξη αυτό μπορεί να γίνει όταν από ένα καταγεγραμμένο σήμα αφαιρεθούν στοιχεία της καταγραφής πέρα από ένα διάστημα μέσα στο οποίο θεωρείται ότι το σήμα έχει ένα σημαντικό πλάτος. Έξω από το διάστημα αυτό εάν έχει καταγραφεί κάτι θεωρείται ότι είναι θόρυβος. Θα πρέπει τώρα να ορίσουμε τις παραμέτρους  $T$  και  $N$  για να υλοποιηθεί ο μετασχηματισμός. Τα βήματα που τυπικά πρέπει να ακολουθηθούν είναι τα εξής :



Σχήμα 4.6 Υπολογισμός εναλλακτικού εύρους δειματοληψίας

Σχήμα 4.7 Οι συναρτήσεις  $F(\omega)$  και  $\bar{F}(\omega)$ 

1. Υπολογισμός του βήματος δειματοληψίας. Επιλέγουμε  $T=a$  και  $N=N_0$  όπου  $N_0$  είναι η κατ' αρχήν επιλεγείσα τάξη του μετασχηματισμού. Τότε  $f(t)=\bar{f}(t)$  στο διάστημα  $(0,T)$  (Σχήμα 4.6). Χρησιμοποιώντας τα δείγματα της  $f(t)$  στο διάστημα αυτό, που είναι  $f(mT_1)$ ,  $T_1=T/N$ ,  $m=0,1,\dots,N-1$  ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier θα μας δώσει ακριβώς τα δείγματα της  $\bar{F}(n\omega_0)$ ,  $\omega_0=2\pi/T$ ,  $n=0,1,\dots,N-1$ . Τα δείγματα  $F(n\omega_0)$  της  $F(\omega)$  μπορούν να προσεγγιστούν από εκείνα της  $\bar{F}(n\omega_0)$  εάν υποθέσουμε ότι η  $F(\omega)$  περιορίζεται ουσιαστικά στο διάστημα  $(-\sigma,\sigma)$  και παράλληλα  $\sigma < \omega_1/2$ . Στην περίπτωση αυτή μπορεί να δει κανείς από την 4.1.38 ότι θα ισχύει

$$F(n\omega_0) \sqcup \begin{cases} \bar{F}(n\omega_0) & \text{για } |n| \leq \frac{N}{2} \\ 0 & \text{για } |n| < \frac{N}{2} \end{cases} \quad (4.1.39)$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η  $\bar{F}(n\omega_0)$  υπολογίζεται για  $n=0,\dots,N-1$ . Οι προσεγγίσεις όμως  $F(n\omega_0)$  θα πρέπει να εκτείνονται και στο αρνητικό φάσμα των συχνοτήτων. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούνται οι τιμές που έχουν υπολογιστεί για  $n > N/2$  για να υπολογιστούν οι τιμές για  $n < 0$  ως εξής :



$$F(n\omega_0) \square \begin{cases} \bar{F}(n\omega_0) & \text{για } 0 \leq n \leq \frac{N}{2} \\ \bar{F}(N\omega_0 - n\omega_0) & \text{για } |n| < \frac{N}{2} \end{cases} \quad (4.1.40)$$

Σημειώνουμε πάντως ότι το εύρος συχνοτήτων που μας δίνει ο μετασχηματισμός για την  $F(n\omega_0)$  είναι  $\omega_1 = 2\pi / T_1$ . Δείτε σχετικά και το σχήμα 4.7.

2. Για να μειωθεί το λάθος προσέγγισης της  $F(\omega)$  θα πρέπει να αυξηθεί το  $\omega_1$ . Δηλαδή να αυξηθεί σημαντικά το εύρος συχνοτήτων που μας δίνει ο μετασχηματισμός. Για  $N$  σταθερό, η αύξηση του  $\omega_1$  συνεπάγεται μείωση του  $T$ . Ο μετασχηματισμός μπορεί και πάλι να μας δώσει τις τιμές δειγματοληψίας της  $\bar{f}(nT_1)$  που όμως δεν είναι πλέον ίσες με τις τιμές της  $f(nT_1)$ .
3. Για να αυξηθεί η ανάλυση (resolution) στο πεδίο των συχνοτήτων θα πρέπει να μειωθεί το  $\omega_0$ . Αυτό σημαίνει αύξηση του  $T$  και επομένως επιλογή του  $T > a$  (Σχήμα 4.6). Τότε οι τιμές των δειγμάτων της  $f(nT_1)$  θα είναι ίσες με εκείνες της  $\bar{f}(nT_1)$  για  $n$  τέτοιο ώστε να ισχύει  $nT_1 < a$ . Για τις υπόλοιπες τιμές, είναι μηδέν. Επειδή στην περίπτωση αυτή το  $\omega_1$  μειώνεται, το λάθος προσέγγισης της  $F(\omega)$  θα αυξηθεί. Για να παραμείνει σε λογικά επίπεδα θα πρέπει να ισχύει  $\omega_1 > 2\sigma$

Όπως γίνεται φανερό από τα παραπάνω, η ψηφιακή επεξεργασία σήματος πολλές παραμέτρους που θα πρέπει να υπολογιστούν με αντικρουόμενα κριτήρια. Είναι σημαντικό λοιπόν να καθορισθούν οι ανάγκες της επεξεργασίας μας με βάση τα πραγματικά δεδομένα του σήματος (διάρκεια, εύρος συχνοτήτων, ανάλυση) ώστε να επιτευχθεί ο μέγιστος βαθμός ακρίβειας. Περισσότερη συζήτηση για θέματα επεξεργασίας σημάτων ξεφεύγει από τον σκοπό των σημειώσεων και ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται σε πλέον ειδικά βιβλία.

## 4.2 Φίλτρα και θόρυβος.

Για να συζητήσουμε τα φίλτρα και τη λήψη σημάτων σε περιβάλλον θορύβου, χρειάζεται να γίνει μία μικρή εισαγωγή, σε ό,τι αφορά την έννοια του συστήματος.

### 4.2.1 Συστήματα

Ένα «σύστημα» χαρακτηρίζεται από έναν κανόνα  $L$  που εάν πάρει ως δεδομένη μία συνάρτηση  $f$  μας την μετασχηματίζει σε μία άλλη  $g$ . Γράφομε επομένως

$$g = L(f) \quad (4.2.1)$$

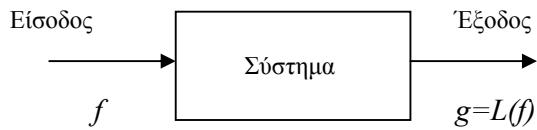
Ένα σύστημα είναι «διακριτό» εάν ο κανόνας μετασχηματίζει μία ακολουθία  $f_n$  σε μία ακολουθία  $g_n$

$$g_n = L(f_n) \quad (4.2.2)$$

Η ακολουθία  $f_n$  ονομάζεται **είσοδος** και η ακολουθία  $g_n$  ονομάζεται **έξοδος** του συστήματος.

Εάν επί πλέον η σχέση  $L$  είναι γραμμική (π.χ.  $g(n) = 5f(n)$ ) τότε το σύστημα ονομάζεται «γραμμικό»

Ο συμβολισμός του συστήματος έχει τη μορφή



#### 4.2.2 Φίλτρα

Τα φίλτρα είναι **γραμμικά** συστήματα που μετασχηματίζουν ένα σήμα είτε αναλογικό είτε ψηφιακό σε κάποιο άλλο με χαρακτηριστικά που εξαρτώνται από τον κανόνα  $L$ .

Η χρήση των φίλτρων είναι προφανής. Επιθυμούμε να πάρουμε σήμα στην έξοδο με δεδομένα χαρακτηριστικά και αυτό μπορεί να γίνει με κατάλληλη σχεδίαση του φίλτρου δηλαδή με κατάλληλη επιλογή της συνάρτησης που χαρακτηρίζει τον κανόνα  $L$ , ώστε να τονίζονται τα χαρακτηριστικά του επιθυμητού σήματος και να υποβαθμίζονται αντίστοιχα τα χαρακτηριστικά του θορύβου.

Με δεδομένο ότι τα σήματα είναι συναρτήσεις ή ακολουθίες που δίδονται στο πεδίο του χρόνου ή των συχνοτήτων, ο κανόνας  $L$  εκφράζεται και αυτός αναλόγως και μάλιστα οι δύο εκφράσεις αποτελούν ζεύγη μετασχηματισμού Fourier. Συνήθως συμβολίζουμε τον κανόνα  $L$  με  $H(f)$  στο πεδίο των συχνοτήτων και με  $h(t)$  στο πεδίο του χρόνου. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την συχνότητα ( $f$ ) και όχι την κυκλική συχνότητα ( $\omega$ ) ως το όρισμα στο πεδίο συχνοτήτων. Ο λόγος είναι ότι οι περισσότερες αναφορές στο πρόβλημά μας έχουν ως μεταβλητή την συχνότητα. Ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να γραφεί και για την περίπτωση της συχνότητας με απλή αλλαγή μεταβλητής από  $\omega$  σε  $f$

$$h(t) \leftrightarrow H(f) \quad (4.2.3)$$

Οι συναρτήσεις  $H$  και  $h$  ονομάζονται αντίστοιχα «συναρτήσεις μεταφοράς» (transfer function) και «συνάρτηση απόκρισης παλμού» (impulse response function) αντίστοιχα.

Ως είσοδος στο φίλτρο δίδεται ένα σήμα με ζεύγος Fourier

$$f(t) \leftrightarrow F(f) \quad (4.2.4)$$

Επειδή η σύνθεση στο πεδίο των συχνοτήτων είναι άμεση, προτιμάμε να ξεκινάμε την ανάλυσή μας σ' αυτό το πεδίο. Έτσι η έξοδος του φίλτρου θα είναι

$$G(f) = F(f)H(f) \quad (4.2.5)$$

Η χρονική εξάρτηση του σήματος εξόδου προκύπτει από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier και είναι

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{i2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} F(f)H(f)e^{i2\pi ft} df \quad (4.2.6)$$

Το σήμα αυτό μπορεί να προκύψει από τον υπολογισμό της συνέλιξης των  $f$  και  $h$  στο πεδίο του χρόνου.

$$g(t) = f(t) * h(t) \quad (4.2.7)$$

Αξίζει ακόμη να πούμε ότι η εν σειρά σύνθεση φίλτρων ακολουθεί αντίστοιχους κανόνες. Δηλαδή, εάν δουλεύουμε στο πεδίο των συχνοτήτων, οι συναρτήσεις που χαρακτηρίζουν τα φίλτρα (αποκρίσεις) πολλαπλασιάζονται, ενώ στο πεδίο του χρόνου υπολογίζεται η συνέλιξη. Έτσι, για δύο φίλτρα αποκρίσεων

$$h_1(t) \leftrightarrow H_1(f) \quad h_2(t) \leftrightarrow H_2(f) \quad (4.2.8)$$

η σύνθεση δίδει

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t), \quad H(f) = H_1(f)H_2(f) \quad (4.2.9)$$

Στο σχήμα 4.8 βλέπουμε μερικές χαρακτηριστικές μορφές που παίρνει η απόκριση φίλτρων στο πεδίο των συχνοτήτων.

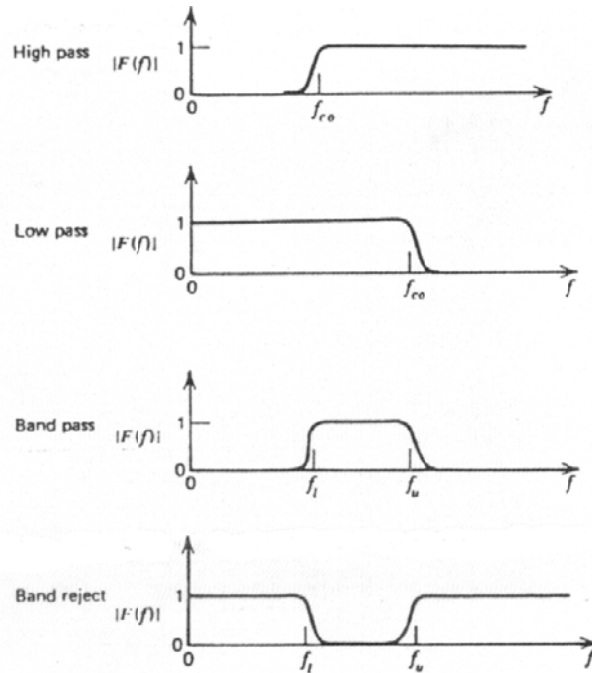
Το πρώτο φίλτρο (high pass) αφήνει να περνούν οι υψηλές συχνότητες ενώ κόβει τις χαμηλές. Αντίθετα το δεύτερο (low pass) αφήνει να περνούν οι χαμηλές συχνότητες. Τέλος το τρίτο φίλτρο (band pass) είναι σχεδιασμένο για να περνούν ενδιάμεσες συχνότητες.

Σε πολλές εφαρμογές το μέγεθος που ενδιαφέρει έχει ενεργειακό περιεχόμενο και με την έννοια αυτή προτιμάται η αναφορά μας στην μέση τετραγωνική έξοδο ενός φίλτρου που ορίζεται από τη σχέση

$$I_{hh} = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \quad (4.2.10)$$

Το μέγεθος αυτό μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι το ίδιο εάν ολοκληρώσουμε το φάσμα του σήματος (μέτρο) στο πεδίο των συχνοτήτων. Παίρνουμε έτσι:

$$I_{hh} = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)|^2 |H(f)|^2 df = 2 \int_0^{\infty} |F(f)|^2 |H(f)|^2 df \quad (4.2.11)$$



Σχήμα 4.8 Μερικές χαρακτηριστικές κατηγορίες φίλτρων.

Μπορούμε ακόμη να αντικαταστήσουμε το τετράγωνο του μέτρου του σήματος με μία μέση τιμή (εάν το εύρος του σήματος είναι σχετικά μικρό)  $\langle |F(f)|^2 \rangle$  και να γράψουμε το ολοκλήρωμα 4.2.11 ως

$$I_{hh} = 2 \langle |F(f)|^2 \rangle \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df \quad (4.2.12)$$

#### 4.2.3 Θόρυβος

Ο θόρυβος είναι μία υπέρθεση τυχαίων σημάτων που διαδίδονται σε ένα ακουστικό μέσον και δεν έχουν σχέση με την επιθυμητή εκπομπή ήχου από κάποια πηγή. Στο θόρυβο πολλές φορές προσμετράμε τον ηλεκτρονικό θόρυβο. Στη θάλασσα ο θόρυβος προέρχεται από το σπάσιμο των επιφανειακών κυμάτων, από τα πλοία που πλέουν στη θάλασσα, από ψάρια, από τη βροχή, από σεισμικά κύματα και άλλες αιτίες. Η διάρκεια ενός τυχαίου σήματος όπως αυτό του θορύβου είναι μεγάλη (στην πραγματικότητα άπειρη) αλλά θα πρέπει να μπορούμε να εκφράσουμε ενεργειακά το σχετικό μέγεθος. Έτσι, συνηθίζεται η αναφορά σε μέσα τετραγωνικά μεγέθη μέσα σε μία δεδομένη χρονική διάρκεια. Έτσι, εάν το τυχαίο σήμα το συμβολίσουμε (ντετερμινιστικά) με  $n(t)$ , η μέση τετραγωνική του τιμή είναι

$$\langle |n(t)|^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |n(t)|^2 dt \quad (4.2.13)$$

όπου ο χρόνος  $T$  είναι πολύ μεγαλύτερος από την περίοδο της χαμηλότερης σημαντικής συχνότητας που αναμένουμε στο φάσμα του θορύβου.

Εάν χρησιμοποιηθεί φίλτρο, η έξοδος του στο περιβάλλον θορύβου για τον θόρυβο θα δίδεται από μία σχέση αντίστοιχη της 4.2.11 ή 4.2.12

$$\langle |g_n(t)|^2 \rangle = 2 \int_0^{\infty} S_{nn}(f) |H(f)|^2 df \quad (4.2.14)$$

Το μέγεθος  $S_{nn}(f)$  ονομάζεται *φασματική πυκνότητα* του θορύβου και έχει μονάδες pascals στο τετράγωνο ανά μονάδα συχνότητας ( $\text{Pa}^2/\text{Hz}$ ). Αντίστοιχες μονάδες έχει βέβαια και το μέγεθος  $|H(f)|^2$  καθώς και το  $|F(f)|^2$ . Στην πράξη το αριθμητικό μέγεθος που εμφανίζεται αναφέρεται στο διπλάσιο της πυκνότητας  $P_{nn}(f) = 2S_{nn}(f)$

Οι μετρήσεις του θορύβου αναφέρονται συνήθως και στο μέγεθος *φασματικό επίπεδο* (spectrum level) σε dB re  $1\mu\text{Pa}^2/\text{Hz}$  με βάση τη σχέση

$$\text{Φασματικό επίπεδο} \equiv 10 \log_{10} \left[ \frac{2S_{nn}(f)}{\mu\text{Pa}^2/\text{Hz}} \right] \text{ dB} \quad (4.2.15)$$

Ως λόγο σήματος προς θόρυβο ορίζουμε το πηλίκο των αντίστοιχων φασματικών επιπέδων

$$S/N = \frac{|F(f)|^2}{S_{nn}(f)} \quad (4.2.16)$$

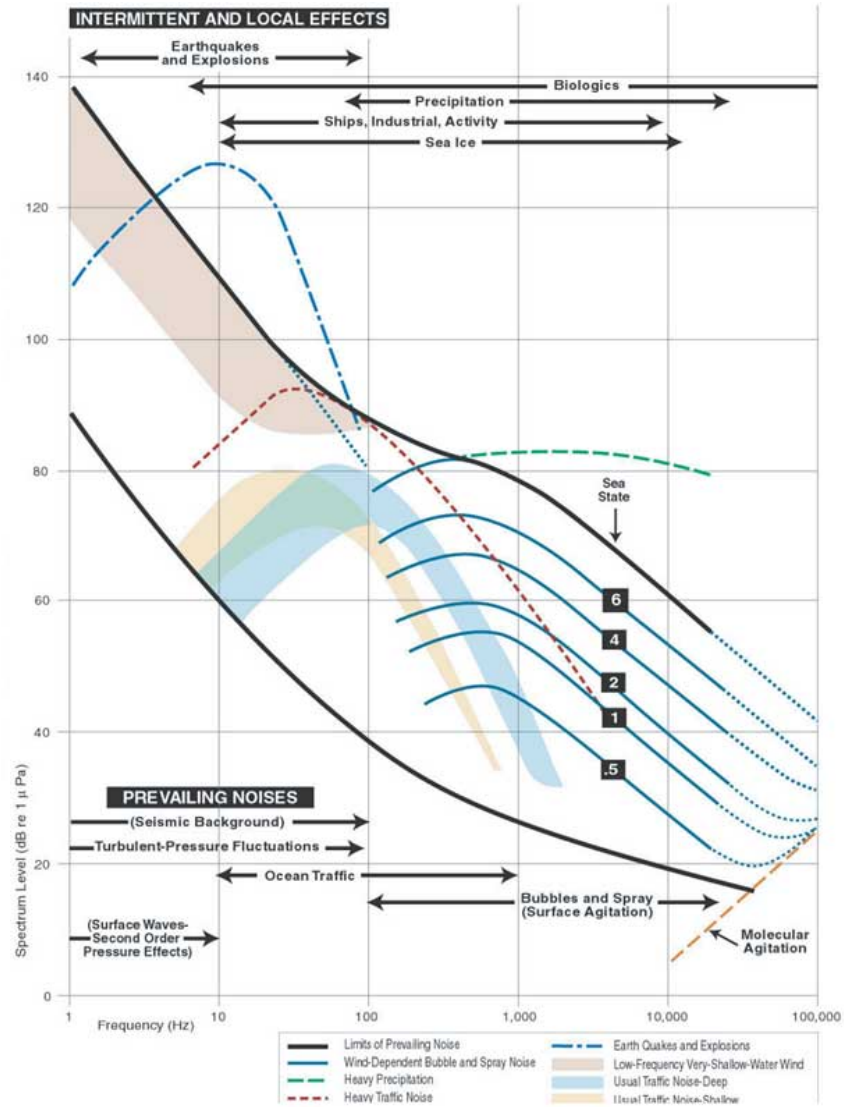
εκφρασμένο σε μονάδες dB

$$S/N \text{ (dB)} = 10 \log \left( \frac{|F(f)|^2}{S_{nn}(f)} \right) \quad (4.2.17)$$

#### 4.2.4 Ο θόρυβος του θαλάσσιου περιβάλλοντος

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, ο θόρυβος του θαλάσσιου περιβάλλοντος (Ambient Noise) οφείλεται σε διάφορους μηχανισμούς που τον παράγουν στη θάλασσα.

Στις χαμηλές συχνότητες η βασική αιτία είναι η σεισμική δραστηριότητα (υποθαλάσσια) που προκαλεί ήχους με μεγάλες περιόδους. Καθώς ανεβαίνουμε συχνότητα, ο θόρυβος από τη μηχανολογική εγκατάσταση των πλοίων και κυρίως την έλικα κυριαρχεί και είναι η βασική πηγή θορύβου ανάμεσα στα 10 Hz και στα 500 Hz. Στη συνέχεια επικρατεί ο θόρυβος από το σπάσιμο των επιφανειακών κυμάτων, και επομένως ο θόρυβος μπορεί να συσχετισθεί με το ύψος κύματος ή με την ταχύτητα του επιφανειακού ανέμου ή με την κατάσταση της θάλασσας. Ο θόρυβος αυτός είναι σημαντικός μέχρι και το άνω όριο των ακουστικών συχνοτήτων (20 kHz).



Σχήμα 4.9 Φασματικά επίπεδα θορύβου θαλάσσιου περιβάλλοντος

Από μετρήσεις και στατιστική επεξεργασία έχουν προέλθει διαγράμματα που δίνουν το φασματικό επίπεδο του θορύβου του θαλάσσιου περιβάλλοντος συναρτήσει της συχνότητας και έχουν τη μορφή του Σχήματος 4.9

Είναι αυτονόητο ότι η χρήση σημάτων και φίλτρων σε μία εφαρμογή ακουστικής ωκεανογραφίας εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό και από το επίπεδο θορύβου και τη φασματική του κατανομή.

Τονίζουμε τέλος ότι ο θόρυβος μπαίνει στην εξίσωση SONAR με μονάδες  $\text{dB/re } p_{ref}$  εάν το φασματικό του επίπεδο ολοκληρωθεί σε όλη την περιοχή των συχνοτήτων που τον συνθέτουν.

### 4.3 Συσχέτιση ακουστικών σημάτων

#### 4.3.1 Διακριτά σήματα

Η ανίχνευση ακουστικών σημάτων σε περιβάλλον θορύβου γίνεται με χρήση κατάλληλων τεχνικών μέσω των οποίων «συγκρίνεται» το σήμα που μας ενδιαφέρει και το οποίο κατά κανόνα έχει γνωστή μορφή με μία σειρά καταγραφών που ενδέχεται να περιέχουν το σήμα μας. Η σύγκριση υλοποιείται μαθηματικά μέσω μιας κατάλληλης συνάρτησης που ονομάζεται συνάρτηση συσχέτισης (correlation function) η οποία για ψηφιακή επεξεργασία ορίζεται ως κατωτέρω :

Έστω δύο σήματα  $y(t)$  και  $x(t)$  τα οποία έχουν καταγραφεί σε ένα δέκτη ως ακολουθίες διακριτών καταγραφών  $x_n$  και  $y_n$ ,  $n=0,1,2,\dots,N-1$ . Ορίζουμε τις μέσες τιμές των καταγραφών από τις σχέσεις :

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \quad \text{και} \quad \langle y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \quad (4.3.1)$$

Για να απλουστεύσουμε την ανάλυση θα υποθέσουμε ότι οι μέσες τιμές των καταγραφών είναι 0. Εάν δεν ισχύει κάτι τέτοιο στην πραγματικότητα υπάρχει πάντα η δυνατότητα αφαίρεσης από όλα τα σήματα της μέσης τιμής ώστε να έχουμε ξανά μέση τιμή 0.

Μας ενδιαφέρουν επίσης οι μέσες τετραγωνικές τιμές των σημάτων που είναι

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n^2 \quad \text{και} \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n^2 \quad (4.3.2)$$

Θα υποθέσουμε ότι η ακολουθία  $y_n$  μεταφέρεται  $k$  βήματα σχετικά με την  $x_n$  και γίνεται  $y_{n+k}$  χωρίς να αλλάζουν οι μέσες τιμές.

Ορίζουμε μέσω της επόμενης σχέσης το βαθμό «συσχέτισης» των δύο σημάτων

$$e^2(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \left( C_{xy}(k) \frac{x_n}{\sigma_x} \right) - \frac{y_{n+k}}{\sigma_y} \right]^2 \quad (4.3.3)$$

Τα μεγέθη σύμφωνα με τον ως άνω ορισμό είναι αδιάστατα. Ο συντελεστής  $C_{xy}$  μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε το μέγεθος  $e^2$  να γίνει ελάχιστο. Έτσι ο συντελεστής αυτός μπορεί τελικά να αποτελέσει το μέτρο της συσχέτισης των δύο σημάτων μεταξύ τους. Παραγωγίζοντας την 4.3.3 ως προς  $C_{xy}$  και θέτοντας το αποτέλεσμα ίσο με 0 παίρνουμε :

$$C_{xy}(k) = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_{n+k} \quad (4.3.4)$$

Ο συντελεστής  $C_{xy}(k)$  είναι μία συνάρτηση του  $k$  και ονομάζεται «Συνάρτηση Συσχέτισης» (correlation function). Όπως είναι ορισμένη, έχει πεδίο τιμών ανάμεσα

στο 1 και στο  $-1$ . Μηδενική τιμή σημαίνει σήματα που δεν έχουν σχέση μεταξύ τους (ασυσχέτιστα). Εάν τα σήματα είναι ίδια σε μορφή αλλά το ένα παρουσιάζει μία μετάθεση σε σχέση με το άλλο, η τιμή του  $k$  για την οποία η συνάρτηση συσχέτισης παίρνει τη μέγιστη τιμή, μας προσδιορίζει την μετάθεση των δύο σημάτων.

Εάν τα σήματα είναι μιγαδικά, η συνάρτηση συσχέτισης παίρνει τη μορφή

$$C_{xy}(k) = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n^* y_{n+k} \quad (4.3.5)$$

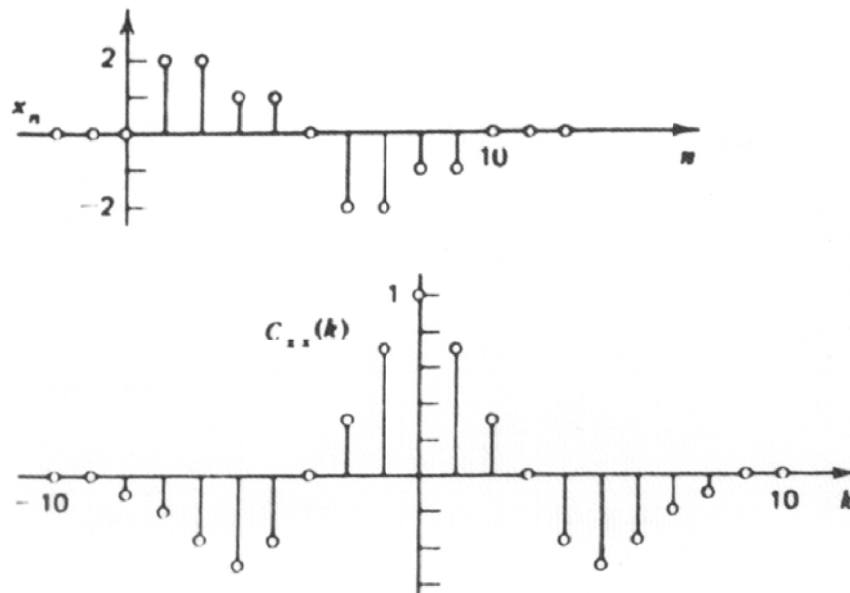
όπου  $x_n^*$  συμβολίζει το μιγαδικό συζυγή.

Ως «Συνάρτηση συνδιακύμανσης» (*covariance function*) ορίζουμε την ποσότητα

$$\text{cov}[x, y(k)] \equiv \sigma_x \sigma_y C_{xy}(k) = \langle x^* y(k) \rangle \quad (4.3.6)$$

Εάν τα σήματα  $x$  και  $y$  είναι ίδια, τότε η συνάρτηση  $C_{xx}$  χαρακτηρίζεται «Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης» (*Autocorrelation function*).

Ως παράδειγμα για τη συμπεριφορά της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης, μπορεί κανείς να ανατρέξει στο σχήμα 4.10 που παρουσιάζει ένα ψηφιακό σήμα  $x_n$  και την αντίστοιχη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης. Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι συμμετρική ως προς  $k$ .



Σχήμα 4.9 Το σήμα  $x_n$  και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισής του.



### 4.3.2 Ολοκληρωτικές εκφράσεις

Οι ανωτέρω εκφράσεις και έννοιες μπορούν να διατυπωθούν για συνεχή (αναλογικά) σήματα με αντίστοιχο τρόπο. Ορίζουμε τα εξής μεγέθη

$T$	διάρκεια σήματος.
$t$	χρόνος λήψης του $n$ δείγματος.
$\Delta t$	χρόνος ανάμεσα στη λήψη των δειγμάτων (αντίστροφος της συχνότητας δειγματοληψίας (sampling frequency))
$N = T/\Delta t$	
$\tau = k\Delta t = kT/N$	χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα στα δείγματα $x_n$ και $y_{n+k}$
$x_n \rightarrow x(t), \quad y_{n+k} \rightarrow y(t + \tau)$	

Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιώντας τις 4.3.5 και 4.3.6 η συνάρτηση συνδιακύμανσης γράφεται

$$\text{cov}[x, y(\tau)] = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T x^*(t)y(t + \tau)\Delta t \quad (4.3.7)$$

και παίρνοντας το όριο για  $\Delta t \rightarrow dt$  έχουμε

$$\text{cov}[x, y(\tau)] = \frac{1}{T} \int_0^T x^*(t)y(t + \tau)dt = \langle x^*(t)y(t + \tau) \rangle \quad (4.3.8)$$

Αντίστοιχα οι μέσες τετραγωνικές τιμές εκφράζονται από τις επόμενες σχέσεις

$$\sigma_x^2 \equiv \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt \quad \text{και} \quad \sigma_y^2 \equiv \frac{1}{T} \int_0^T |y(t)|^2 dt \quad (4.3.9)$$

Η συνάρτηση συσχέτισης είναι

$$C_{xy}(\tau) = \frac{\text{cov}[x, y(\tau)]}{\sigma_x \sigma_y} \quad (4.3.10)$$

Σε ό,τι αφορά τα όρια ολοκλήρωσης, αυτά μπορεί να είναι αυθαίρετα, αλλά συμβατά με τα πραγματικά χαρακτηριστικά του σήματος. Συχνά θεωρούμε τα όρια από  $-T/2$  έως  $T/2$

Εάν  $\sigma_x^2$  και  $\sigma_y^2$  είναι διάφορα του μηδενός για  $T \rightarrow \infty$  και λαμβάνοντας υπ'όψιν την παραπάνω παρατήρηση, μπορούμε να γράψουμε :

$$\sigma_x \sigma_y C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^*(t)y(t + \tau)dt \right) \quad (4.3.11)$$

Για απεριοδικά σήματα οι αντίστοιχες εκφράσεις είναι :

$$C_{xy}(\tau) = \frac{1}{(I_{xx}I_{yy})^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt \quad (4.3.12)$$

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{I_{xx}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt \quad (4.3.13)$$

όπου

$$I_{xx} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (4.3.14)$$

$$I_{yy} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt \quad (4.3.15)$$

### ΑΣΚΗΣΗ

Υπολογίστε τη συνάρτηση συσχέτισης δύο σημάτων που περιγράφονται από τις εκθετικές συναρτήσεις  $x = \exp(2i\pi f_1 t)$  και  $y = \exp(2i\pi f_2 t)$ . Θεωρείστε διαφορετικές τις συχνότητες  $f_1$  και  $f_2$ .

#### 4.3.3 Σήματα και θόρυβος

Η συνάρτηση συσχέτισης είναι ένα εργαλείο για να μπορεί κανείς να ανιχνεύει σήματα σε περιβάλλον θορύβου, όταν γνωρίζει τα χαρακτηριστικά της εκπεμπόμενης κυματομορφής. Θα δούμε εδώ ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής που αναφέρεται σε σήμα που έχει ληφθεί μετά από ανάκλαση σε κάποια επιφάνεια. Ας θεωρήσουμε ότι το εκπεμπόμενο σήμα είναι της μορφής  $x(t)$  ενώ το σήμα που λαμβάνεται μετά από ανάκλαση και χρόνο  $T$  είναι  $x(t-T)$ . Οτιδήποτε άλλο φτάνει στον δέκτη θεωρείται ανεπιθύμητο και χαρακτηρίζεται θόρυβος. Ο συμβολισμός του θορύβου θα είναι  $n(t)$ .

Στο δέκτη καταγράφεται το άθροισμα του ανακλώμενου σήματος και του θορύβου

$$a(t) = x(t-T) + n(t) \quad (4.3.16)$$

που για περιοδική δειγματοληψία σε χρονικά διαστήματα που απέχουν  $\Delta t$  μεταξύ τους γράφεται

$$a_n = x_{n-j} + n_n \quad (4.3.17)$$

όπου  $t = n\Delta t$  και  $T = j\Delta t$ .

Η συνδιακύμανση του  $x$  και του  $a$  δίδεται από τη σχέση

$$\sigma_x \sigma_a C_{xa}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n^* (x_{n-j+k} + n_{n+k}) \quad (4.3.18)$$

με  $\sigma_a^2 \approx \sigma_x^2 + \sigma_n^2$  για  $|C_{xn}(k)| \ll 1$ , ενώ η συνάρτηση συσχέτισης είναι

$$C_{xa}(k) = \frac{\sigma_x}{\sigma_a} C_{xx}(k-j) + \frac{\sigma_n}{\sigma_a} C_{xn}(k) \quad (4.3.19)$$

όπου  $C_{xx}(k-j)$  παίρνει τη μέγιστη τιμή για  $k-j=0$ . Όταν  $C_{xn}(k)$  είναι μηδέν,  $C_{xa}(k)$  έχει μέγιστη τιμή για  $k=j$  και  $T=j\Delta t$ . Ακόμη και αν σήμα και θόρυβος είναι ασυσχέτιστα, μερικά δείγματα του θορύβου δίδουν μη μηδενικές τιμές στη συνάρτηση  $C_{xn}(k)$ . Αυτό δημιουργεί ταλαντώσεις στις μετρούμενες τιμές της συνάρτησης  $C_{xa}(k)$ . Όταν οι ταλαντώσεις είναι πολύ μικρότερες από την τιμή  $\sigma_x/\sigma_a$ , η συνάρτηση συσχέτισης  $C_{xa}(k)$  έχει κορυφή στο  $T$  και το σήμα αναγνωρίζεται σε περιβάλλον θορύβου.



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α. Σύνθεση αρμονικών πηγών

Θα θεωρήσουμε κατ' αρχήν αρμονικές πηγές. Αυτό σημαίνει ότι η ακουστικές διαταραχές για κάθε συνάρτηση που περιγράφει την κατάσταση του μέσου (ταχύτητα μορίων, πίεση, πυκνότητα) μεταβάλλονται σε συγκεκριμένη θέση με τη μορφή συνάρτησης ημιτόνου ή συνημιτόνου. Οι πηγές αυτές χαρακτηρίζονται «πηγές συνεχούς κύματος» ή “Continuous Wave sources” και συμβολίζονται με CW. Η μεταβολή με την απόσταση για συγκεκριμένο χρόνο περιγράφεται με την μορφή συνάρτησης που παρουσιάζει κορυφές και κοιλάδες όπως ένα ημίτονο αλλά, ανάλογα με την μορφή διάδοσης μπορεί να έχει μειωμένο πλάτος διαταραχής. Αυτό γίνεται εύκολα κατανοητό διαισθητικά στην περίπτωση της σφαιρικής διάδοσης (σημειακή πηγή σε άπειρο χώρο) όπου το μέτωπο κύματος είναι σφαίρα ακτίνας όση και η απόσταση στην οποία μετράται η διαταραχή που βέβαια αυξάνει με την διάδοση του κύματος, με επακόλουθο η ενέργεια να κατανέμεται σε μεγαλύτερο όγκο. Επομένως και το πλάτος της διαταραχής θα πρέπει κατά την αρχή διατήρησης της ενέργειας να μειώνεται με την απόσταση.

Να υπενθυμίσουμε ότι το μήκος κύματος είναι η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικές κορυφές ή κοιλάδες του ημιτονοειδούς σήματος, παραμένει σταθερό, συμβολίζεται δε με  $\lambda$ . Ο χρόνος που μεσολαβεί ώστε το κύμα σε δεδομένη θέση να φτάσει σε διαδοχική κορυφή ή κοιλάδα είναι η περίοδος που συμβολίζεται με  $T$ .

Οι σχέσεις που διέπουν τα μεγέθη συχνότητα  $f$ , μήκος κύματος  $\lambda$ , περίοδος  $T$  και ταχύτητα διάδοσης  $c$  είναι

$$T = \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{c} \quad (\text{A1})$$

Υπενθυμίζουμε επίσης τις παρακάτω σχέσεις για την κυκλική συχνότητα και τον αριθμό κύματος :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{A2})$$

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\omega}{c} \quad (\text{A3})$$

Οι μονάδες των βασικών κυματικών μεγεθών είναι, για τη συχνότητα  $f$  [ $\text{s}^{-1}$ ], για την κυκλική συχνότητα  $\omega$  [ $\text{rad/s}$ ], και εάν το μήκος κύματος εκφράζεται σε μέτρα [ $\text{m}$ ], και η ταχύτητα σε [ $\text{m/s}$ ], ο αριθμός κύματος εκφράζεται σε [ $\text{m}^{-1}$ ].

Η διαταραχή οποιουδήποτε μεγέθους σε συγκεκριμένη θέση στο μέσον περιγράφεται μέσω μιας συνάρτησης που θα την θεωρήσουμε χωρίς άρση της γενικότητας ημιτονοειδή με πλάτος  $a$ .

$$\Delta\rho = a \sin(2\pi t / T) = a \sin(2\pi f t) = a \sin \omega t \quad (\text{A4})$$

Αντίστοιχα, εάν θεωρήσουμε ότι το μέτωπο κύματος είναι επίπεδο, η συνάρτηση που περιγράφει την αντίστοιχη μεταβολή με την απόσταση  $R$ , παίρνει την μορφή<sup>5</sup>

$$\Delta\rho = a \sin(2\pi R / \lambda) \quad (\text{A5})$$

Με βάση τα ανωτέρω, η χρονική μεταβολή ενός μεγέθους που βρίσκεται σε δεδομένη θέση ακολουθεί τον νόμο  $\sin(\omega t)$  ενώ για δεδομένο χρόνο η μεταβολή με την απόσταση ακολουθεί το νόμο  $\sin(kR)$ . Με την υπόθεση για επίπεδα κύματα που δεν αλλάζουν το εύρος διαταραχής, οι δύο μεταβολές μπορούν να συνδυαστούν μέσω της σχέσης

$$\Delta\rho = a \sin(\omega t - kR) = a \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{R}{\lambda}\right)\right] \quad (\text{A6})$$

όπου σε αντίθεση με το κεφάλαιο 2.4 έχουμε υποθέσει χρονική εξάρτηση της μορφής  $e^{i\omega t}$ . Συνεπώς πρέπει να σημειωθεί ότι το μείον (-) στην ανωτέρω σχέση υποδεικνύει κύματα οδεύοντα προς τα αυξανόμενα (θετικά)  $R$ .

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την εκθετική έκφραση της διαταραχής, δουλεύοντας στο μιγαδικό επίπεδο. Η αναγωγή των συμπερασμάτων που θα ακολουθήσουν σε πραγματικά σήματα (ημίτονα ή συνημίτονα) είναι άμεση. Θυμίζουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} e^{i\phi} &= \cos\phi + i \sin\phi \\ \cos\phi &= \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}, \quad \sin\phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

και οι διαταραχές που προέρχονται από τις ακουστικές πηγές γράφονται ως

$$\Delta\rho = a \exp[i(\omega t - kR)] \quad (\text{A8})$$

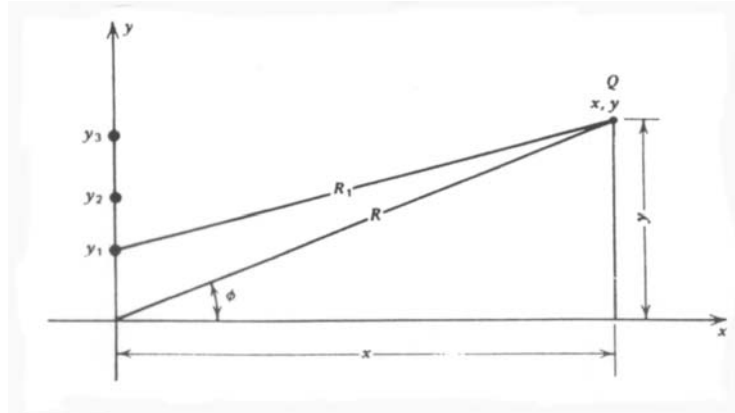
εάν θεωρήσουμε διάδοση σε μία κατεύθυνση με χρονική εξάρτηση  $e^{i\omega t}$ .

Θα δώσουμε στη συνέχεια μια απλοποιημένη θεώρηση του προβλήματος της σύνθεσης ακουστικών πηγών, εξετάζοντας το πρόβλημα μόνο στις περιπτώσεις που οι προς σύνθεση πηγές συνεισφέρουν με ίσο πλάτος στο σημείο ενός δέκτη.

<sup>5</sup> Η έκφραση για την εξάρτηση της λύσης από την απόσταση έχει αναλυθεί στο Κεφάλαιο 2.4

### A.1 Σύνθεση δύο πηγών

Θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα με χρήση πραγματικών και μιγαδικών συναρτήσεων.



Σχήμα A1 Γεωμετρία για τη σύνθεση δύο ηχητικών πηγών

Κατ' αρχήν θεωρείστε το σχήμα A1 που παρουσιάζει την γεωμετρία της σύνθεσης δύο πηγών. Το ενδιαφέρον εντοπίζεται στον υπολογισμό της απόστασης του σημείου παρατήρησης από κάθε μία από τις πηγές. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, το πρόβλημα χαρακτηρίζεται από την απόσταση  $R$  από την αρχή των αξόνων και την γωνία  $\phi$  που ορίζεται από τον άξονα των  $x$  και την ευθεία που συνδέει την αρχή των αξόνων με το σημείο  $Q$ . Θα κάνουμε την επί πλέον υπόθεση ότι η απόσταση του σημείου λήψης από την αρχή των αξόνων είναι πολύ μεγαλύτερη από την απόσταση των πηγών μεταξύ τους.

Κάτω από τις συνθήκες αυτές παίρνουμε

$$R_1^2 = (y - y_1)^2 + x^2 \quad (\text{A1.1})$$

$$R_1^2 = (R \sin \phi - y_1)^2 + R^2 \cos^2 \phi = R^2 - 2Ry_1 \sin \phi + y_1^2 \quad (\text{A1.2})$$

$$R_1 = (R^2 - 2Ry_1 \sin \phi + y_1^2)^{1/2} \quad (\text{A1.3})$$

Η σχέση αυτή γράφεται

$$R_1 = R \left( 1 - \frac{2y_1 \sin \phi}{R} + \frac{y_1^2}{R^2} \right)^{1/2} \quad (\text{A1.4})$$

Με βάση την υπόθεση που κάναμε παραπάνω για παρατηρήσεις σε μεγάλη απόσταση μπορούμε να δεχθούμε ότι  $y_1 / R \ll 1$

Χρησιμοποιώντας την διωνυμική ανάπτυξη

$$(1+q)^{1/2} = 1 + \frac{q}{2} - \frac{q^2}{8} + \frac{q^3}{16} + \dots \quad (\text{A1.5})$$

όπου  $q$  είναι ένας μικρός αριθμός, και θεωρώντας ότι  $q$  αντιπροσωπεύει την παράσταση  $(y_1^2 / R^2 - 2y_1 \sin \phi / R)$  η σχέση (A1.4) γίνεται

$$R_1 = R \left[ 1 - \frac{y_1}{R} \sin \phi + \frac{y_1^2}{2R^2} (1 - \sin^2 \phi) + \dots \right] \quad (\text{A1.6})$$

Μπορούμε τώρα να αγνοήσουμε όρους στους οποίους εμφανίζεται ο λόγος  $\frac{y_1}{R}$  με δυνάμεις υψηλότερες του 2, και να πάρουμε τελικά

$$R_1 \approx R - y_1 \sin \phi \quad (\text{A1.7})$$

Μία δεύτερη πηγή με τις ίδιες υποθέσεις θα βρίσκεται σε απόσταση

$$R_2 \approx R - y_2 \sin \phi \quad (\text{A1.8})$$

κ.ο.κ.

Η σύνθεση των πηγών μπορεί να γίνει με διανυσματικό τρόπο χρησιμοποιώντας την έννοια της «φάσης» του κύματος όπως αυτή ορίζεται μέσω του ορίσματος της τριγωνομετρικής συνάρτησης που το περιγράφει. Έτσι, δύο κύματα που βρίσκονται σε φάση συντίθενται αθροιστικά, ενώ δύο κύματα με αντίθετη φάση θεωρείται ότι συντίθενται αφαιρετικά. Ενδιάμεσες καταστάσεις δίδουν συνιστώμενο κύμα με πλάτος ανάμεσα στο διπλάσιο του πλάτους κάθε κυματισμού και στο μηδενικό.

Στην απλουστευτική παραδοχή που κάναμε παραπάνω, η διαφορά φάσης δύο κυματισμών που προέρχονται από τις πηγές 1 και 2 είναι

$$k(R_1 - R_2) = \frac{2\pi f}{c}(R_1 - R_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(R_1 - R_2) \quad (\text{A1.9})$$

Δύο πηγές βρίσκονται σε φάση εάν η διαφορά των αποστάσεών τους από τον παρατηρητή είναι πολλαπλάσια του μήκους κύματος (διαφορά φάσης ακέραιο πολλαπλάσιο του  $2\pi$ ). Αντίθετα εάν η διαφορά των αποστάσεών τους είναι  $(2n+1)\lambda/2$ ,  $n=0,1,\dots$  οι πηγές είναι εκτός φάσης (διαφορά φάσης  $\pi, 3\pi \dots$ ).

Θεωρώντας τα δύο σήματα από τις πηγές που αναφέραμε προηγουμένως, παίρνουμε

$$\Delta\rho_1 = a \exp[i(\omega t - kR_1)] \quad (\text{A1.10})$$

$$\Delta\rho_2 = a \exp[i(\omega t - kR_2)] \quad (\text{A1.11})$$

Το άθροισμα των δύο σημάτων είναι

$$\begin{aligned}\Delta\rho_i &= \Delta\rho_1 + \Delta\rho_2 = a\{\exp[i(\omega t - kR_1)] + \exp[i(\omega t - kR_2)]\} \\ &= a \exp(i\omega t)[\exp(-ikR_1) + \exp(-ikR_2)]\end{aligned}\quad (\text{A1.12})$$

Παίρνοντας το γινόμενο  $\Delta\rho_i\Delta\rho_i^*$  όπου  $\Delta\rho_i^*$  σημαίνει μιγαδικός συζυγής και παρατηρώντας ότι το γινόμενο  $\exp(i\omega t)\exp(-i\omega t)$  είναι μονάδα, έχουμε

$$\begin{aligned}|\Delta\rho_i|^2 &= a^2[\exp(-ikR_1) + \exp(-ikR_2)][\exp(ikR_1) + \exp(ikR_2)] \\ &= a^2\{2 + \exp[ik(R_1 - R_2)] + \exp[-ik(R_1 - R_2)]\}\end{aligned}\quad (\text{A1.13})$$

Και τελικά

$$|\Delta\rho_i|^2 = 2a^2[1 + \cos k(R_1 - R_2)]\quad (\text{A1.14})$$

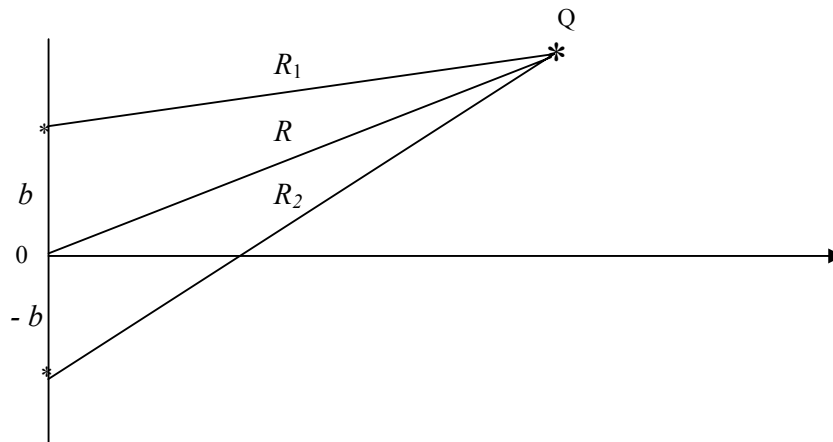
Παρατηρούμε και πάλι ότι σε πλήρη αντιστοιχία με την περίπτωση που η μελέτη μας δεν έγινε με την χρήση μιγαδικών αριθμών, τα μέγιστα εμφανίζονται όταν

$k(R_1 - R_2) = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$  και τα ελάχιστα όταν έχουμε  $\pi, 3\pi, \dots$

Οι αποστάσεις  $R_1$  και  $R_2$  υπολογίζονται από τις A1.7 και A1.8

## A.2 Σύνθεση τριών πηγών.

Θα εξετάσουμε με τη μορφή άσκησης την περίπτωση της σύνθεσης τριών πηγών που απέχουν απόσταση  $b$  μεταξύ τους στην ίδια ευθεία και για τις οποίες θεωρούμε άξονα συντεταγμένων να περνά από την μεσαία πηγή. Οι αντίστοιχες αποστάσεις είναι



Σχήμα A2. Γεωμετρία για τη σύνθεση τριών πηγών



$$\begin{aligned}
 R_1 &\approx R - b \sin \phi \\
 R_2 &= R \\
 R_3 &\approx R + b \sin \phi
 \end{aligned}
 \tag{A2.1}$$

Χρησιμοποιώντας ξανά την θεώρηση μέσω εκθετικών συναρτήσεων παίρνομε

$$\Delta \rho_i = a \exp[i(\omega t - kR + kbsi\phi)] + a \exp[i(\omega t - kR)] + a \exp[i(\omega t - kR - kbsin\phi)]
 \tag{A2.2}$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα, τον εκθετικό όρο  $\exp[i(\omega t - kR)]$  που χαρακτηρίζει το κύμα σε απόσταση  $R$  από την πηγή, έχομε

$$\begin{aligned}
 \Delta \rho_i &= a \exp[i(\omega t - kR)][1 + \exp(ikb \sin \phi) + \exp(-ikb \sin \phi)] \\
 &= a \exp[i(\omega t - kR)][1 + 2 \cos(kb \sin \phi)]
 \end{aligned}
 \tag{A2.3}$$

Γράφοντας

$$\Delta \rho_i \equiv C \exp[i(\omega t - kR)]
 \tag{A2.4}$$

παίρνομε

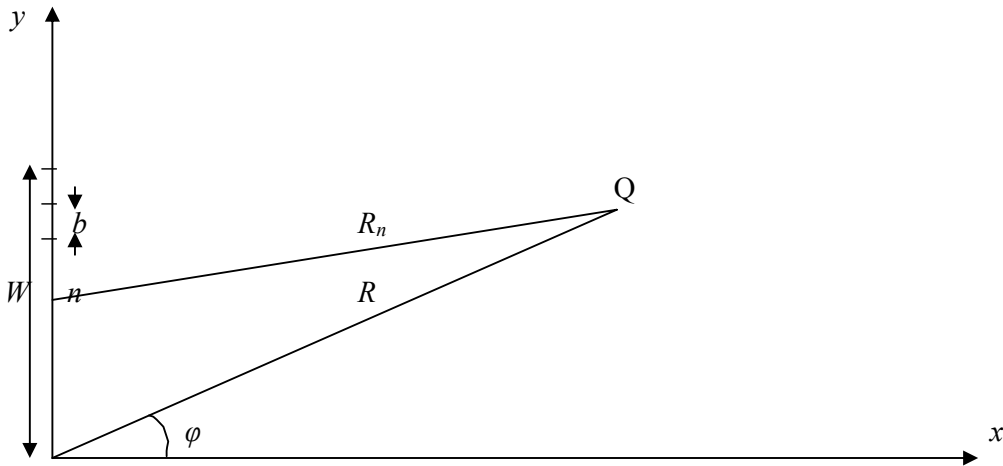
$$C = [1 + 2 \cos(kb \sin \phi)]a
 \tag{A2.5}$$

Ο συντελεστής  $C$  επιδρά στο πλάτος της διαταραχής και εξαρτάται από την γωνία παρατήρησης.

### A.3 Πολλαπλές πηγές

Θα θεωρήσουμε πολλές πηγές τοποθετημένες στην ίδια ευθεία σε ισαποστάσεις. Εάν η πρώτη απέχει απόσταση  $W$  ως προς την τελευταία και ο αριθμός τους είναι  $N$ , η ισαπόσταση των πηγών είναι

$$b = \frac{W}{N - 1}
 \tag{A3.1}$$



Σχήμα A3. Γεωμετρία για τη σύνδεση πολλαπλών διακριτών πηγών

Έτσι, η διαταραχή από την  $n$  οστή πηγή σε απόσταση  $R$  σύμφωνα με τα παραπάνω θα είναι

$$\Delta\rho_n = a \exp[i(\omega t - kR + \frac{nkW \sin \phi}{N-1})] \quad (\text{A3.2})$$

Όπου  $a$  είναι σταθερά.

Βγάζοντας κοινό παράγοντα τον  $(\omega t - kR)$  από όλες τις επί μέρους διαταραχές (σήματα) παίρνουμε

$$\Delta\rho_t = a \exp[i(\omega t - kR)] \sum_{n=0}^{N-1} \exp(\frac{inkW \sin \phi}{N-1}) \quad (\text{A3.3})$$

Θέτουμε

$$C = a \sum_{n=0}^{N-1} \exp(\frac{inkW \sin \phi}{N-1}) \quad (\text{A3.4})$$

Η έκφραση αυτή έχει τη μορφή γεωμετρικής σειράς

$$\sum_{n=0}^{N-1} r^n = \frac{1-r^N}{1-r} \quad (\text{A3.5})$$

Στην περίπτωση μας  $\exp(iny) = [\exp(iy)]^n$  και

$$r = \exp(\frac{ikW \sin \phi}{N-1}) \quad (\text{A3.6})$$

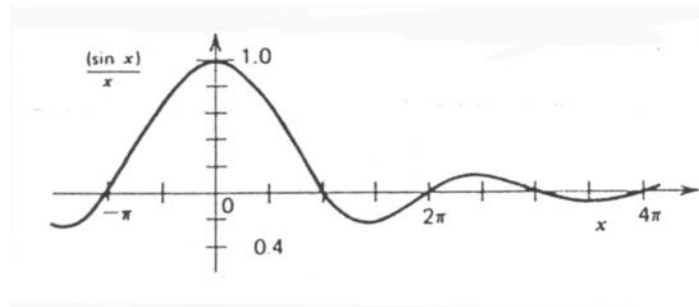
$$C = a \frac{1 - \exp(\frac{iNkW \sin \phi}{N-1})}{1 - \exp(\frac{ikW \sin \phi}{N-1})} \quad (\text{A3.7})$$

Αλλάζοντας λίγο τη μορφή του εκθετικού χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$1 - e^{ix} = -e^{ix/2}(e^{ix/2} - e^{-ix/2}) = -2ie^{ix/2} \sin \frac{x}{2} \quad (\text{A3.8})$$

Παίρνουμε

$$C = Na \left\{ \frac{\exp\left[ iNk(W/2) \frac{\sin \phi}{N-1} \right]}{\exp\left[ ik(W/2) \frac{\sin \phi}{N-1} \right]} \right\} \frac{\sin\left[ Nk(W/2) \frac{\sin \phi}{N-1} \right]}{N \sin\left[ k(W/2) \frac{\sin \phi}{N-1} \right]} \quad (\text{A3.9})$$

Σχήμα Α4. Η συνάρτηση  $(\sin x)/x$ 

Η έκφραση στις αγκύλες έχει απόλυτη τιμή 1 και ορίζει μία διαφορά φάσης. Για μεγάλα  $N$  η μεταβολή της φάσης είναι  $(kW \sin \phi)/2$  και η φάση γίνεται  $i(\omega t - kR + (kW \sin \phi)/2)$

Ο τελευταίος όρος είναι γνωστός ως συντελεστής κατευθυντότητας ή απόκριση κατευθυντότητας (directional response) και γράφεται ως

$$D = \frac{\sin\left(\frac{N}{N-1} \frac{kW}{2} \sin \phi\right)}{N \sin\left(\frac{1}{N-1} \frac{kW}{2} \sin \phi\right)} \quad (\text{A3.10})$$

Για  $N$  μεγάλο χρησιμοποιούμε την προσεγγιστική έκφραση του ημιτόνου  $\sin(\theta) \approx \theta$  για μικρό όρισμα και καταλήγουμε στη σχέση

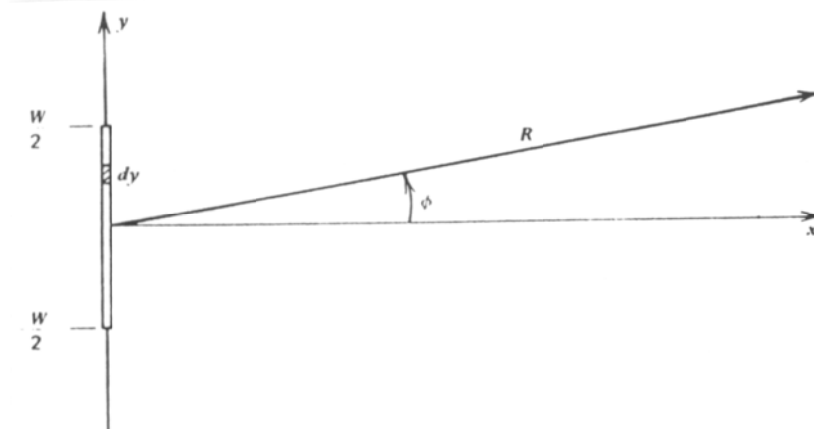
$$D = \frac{\sin \frac{kW \sin \phi}{2}}{\frac{kW \sin \phi}{2}} \quad (\text{A3.11})$$

Η τελευταία αυτή συνάρτηση είναι της μορφής  $(\sin x)/x$  για την οποία γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right) = 1 \quad (\text{A3.12})$$

#### A.4 Πηγές κατανεμημένες συνεχώς

Εάν θεωρήσουμε ότι οι πηγές μας βρίσκονται μεν στην ίδια ευθεία αλλά κατανέμονται συνεχώς σε μήκος  $W$ , μπορούμε να δείξουμε ότι ο συντελεστής κατευθυντότητας είναι ίδιος με αυτόν που βρήκαμε στην προηγούμενη περίπτωση των διακριτά κατανεμημένων πηγών. Πράγματι, με αναφορά στο σχήμα Α5 θεωρούμε την ένταση της στοιχειώδους πηγής σε μήκος  $dy$  ίσο με  $dy/W$ . Η συνεισφορά στην διαταραχή από την πηγή αυτή είναι



Σχήμα A5 Γεωμετρία για τον υπολογισμό τη σύνθεσης πηγών κατανομμένων συνεχώς

$$d\rho = a \frac{dy}{W} \exp[i(\omega t - kR + ky \sin \phi)] \quad (\text{A4.1})$$

Ολοκληρώνοντας την έκφραση αυτή από  $-W/2$  έως  $W/2$  παίρνουμε

$$\Delta\rho = \frac{a}{W} \int_{-W/2}^{W/2} \exp[i(\omega t - kR + ky \sin \phi)] dy \quad (\text{A4.2})$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα τον εκθετικό όρο  $a \exp[i(\omega t - kR)]$  παίρνουμε για το συντελεστή κατευθυντότητας τη σχέση

$$D = \frac{1}{W} \int_{-W/2}^{W/2} \exp[iky \sin \phi] dy \quad (\text{A4.3})$$

$$D = \frac{1}{W} \frac{\exp(iky \sin \phi)}{ik \sin \phi} \Big|_{-W/2}^{W/2} \quad (\text{A4.4})$$

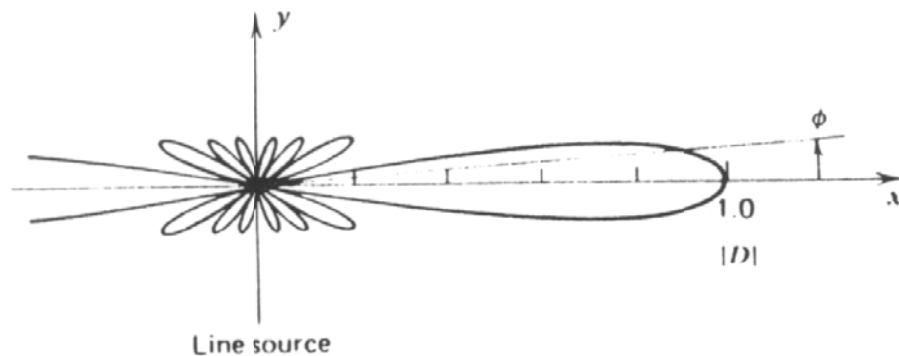
$$D = \frac{\exp\left[\frac{i(kW \sin \phi)}{2}\right] - \exp\left[\frac{-i(kW \sin \phi)}{2}\right]}{ikW \sin \phi} \quad (\text{A4.5})$$

που τελικά γράφεται ως

$$D = \frac{\sin \frac{kW \sin \phi}{2}}{\frac{kW \sin \phi}{2}} \quad (\text{A4.6})$$

Βλέπουμε ότι ο συντελεστής είναι ίδιος με εκείνον που υπολογίσαμε στην περίπτωση των διακριτά κατανομημένων πηγών.

Πολλές φορές, η απεικόνιση του συντελεστή κατευθυντότητας γίνεται σε πολικό διάγραμμα συντεταγμένων που απεικονίζει μία συνάρτηση που εξαρτάται μόνο από τη γωνία. Σχετικό είναι το σχήμα 2.10 που αφορά απόκριση συνεχώς κατανομημένων πηγών στον άξονα των  $y$  συμμετρικά ως προς τον άξονα των  $x$ . Το μήκος της πηγής είναι 4λ και οι τιμές του διαγράμματος είναι κανονικοποιημένες ως προς την μέγιστη τιμή του  $D$ . Υπενθυμίζεται ότι η ανωτέρω ανάπτυξη αφορά απόκριση πηγής σε πολύ μεγάλες αποστάσεις από το σημείο εκπομπής.



Σχήμα Α6. Ένα τυπικό πολικό διάγραμμα εκπομπής πηγής που μοντελοποιείται από συνεχή κατανομή σημειακών πηγών μήκους 4λ.

## Βιβλιογραφία

Αναφέρεται μόνο η βασική βιβλιογραφία στην οποία στηρίζονται οι σημειώσεις. Η βιβλιογραφία της περιοχής είναι πολύ μεγάλη.

- C.S. Clay and H. Medwin: *Acoustical Oceanography: Principles and Applications*, John Wiley 1977. – Το βιβλίο αποτελεί την βάση για τη δομή του μαθήματος.
- L. Brekhovskikh and Yu. Lysanov: *Fundamentals of Ocean Acoustics*, Springer Verlag 1982.
- I. Tolstoy and C.S. Clay: *Ocean Acoustics, Theory and Experiment in Underwater Sound*, American Institute of Physics, 1987.
- L.E.Kinsler, A.R.Frey, A.O. Copens and J.V. Sanders: *Fundamentals of Acoustics*, John Wiley & Sons 1982.
- A.Papoulis: *Signal Analysis* Mc Graw Hill, 1977.
- F. Jensen, W.A. Kuperman, M.B.Porter, H. Schmidt: *Computational Ocean Acoustics*. A.I.P. Press, 2000.

Επίσης

- Μ. Ταρουδάκη : *Μαθηματική Μοντελοποίηση Κυματικής Διάδοσης στη Θάλασσα*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Κρήτης, 2008.