

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ
ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ
ΣΤΗ ΘΑΛΑΣΣΑ

Μιχάλη Ταρουδάκη
Αναπληρωτή Καθηγητή

Ηράκλειο 2008

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ	1
ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	3
1. ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ	5
1.1 Εισαγωγή.....	5
1.2 Στοιχειώδεις λύσεις της ακουστικής εξίσωσης.....	6
1.2.1 Χωρισμός μεταβλητών χώρο-χρόνου.....	6
1.2.2 Χωρισμός μεταβλητών για την χωρική εξάρτηση της πίεσης	8
1.2.3 Η λύση στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων.....	10
1.2.4 Η εξίσωση Bessel και οι λύσεις της	12
1.2.5 Έκφραση της λύσης στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων	14
1.3 Προβλήματα σε μια διάσταση. Το πρόβλημα Sturm-Liouville	15
1.3.1 Γενικοί ορισμοί	15
1.3.2 Θεμελιώδες θεώρημα στο πρόβλημα Sturm-Liouville	15
1.3.3 Πληρότητα ομάδας ιδιοσυναρτήσεων	17
1.3.4 Το συνεχές φάσμα.....	19
1.3.5 Μερικές ιδιότητες της συνάρτησης δέλτα (<i>Dirac</i>)	20
2. ΘΕΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ GREEN.....	21
2.1 Ορισμός.....	21
2.2 Ανάπτυγμα της Green σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων	23
2.3 Η Στοιχειώδης Πηγή	25
2.4 Οι συναρτήσεις δέλτα στο κυλινδρικό και σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων	25
2.4.1 Κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων.....	26
2.4.2 Σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων.....	28
3. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΣΕ ΠΕΔΙΑ ΜΕ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΥΝΟΡΑ.....	29
3.1 Γενική γεωμετρία-οριακές συνθήκες	29
3.2 Ο απλός κυματοδηγός – Πρόβλημα Π1	30
3.2.1 Χωρισμός μεταβλητών.....	31
3.2.2 Οι συναρτήσεις Green του προβλήματος	32
3.2.3 Η λύση του προβλήματος	33
3.2.4 Υπολογισμός των συναρτήσεων G_1 και G_2	35
3.2.5 Ανάπτυγμα σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων	39
3.2.6 Κανονικές-Μη κανονικές ιδιοτιμές.....	43
3.3 Ο κυματοδηγός PEKERIS - Πρόβλημα Π2	46
3.3.1 Υπολογισμός των ιδιοσυναρτήσεων	49
3.3.2 Αναπαράσταση της λύσης	53
3.4 Ο κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη ταχύτητα συναρτήσει του z . Πρόβλημα Π3 ..	55
3.4.1 Ένα σχήμα διαφορών για την λύση της εξίσωσης βάθους με μεταβαλλόμενο συναρτήσει του z, k	56
3.4.2 Ο υπολογισμός των ιδιοτιμών	59
3.4.3 Κανονικοποίηση.....	62
3.5 Η Απώλεια Διάδοσης.....	63
4 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ.....	66
4.1 Γενική περίπτωση	66
4.2 Περιβάλλον με τοπική ανομοιομορφία	69
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	74

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το μάθημα αναφέρεται στο πρόβλημα του υπολογισμού του ηχητικού πεδίου στο θαλάσσιο περιβάλλον που προέρχεται από μία σημειακή αρμονική πηγή. Το θαλάσσιο περιβάλλον μοντελοποιείται ως κυματοδηγός με σύνορα που γεωμετρικά αντιστοιχούν στην επιφάνεια και στον πυθμένα της θάλασσας. Ο πυθμένας μοντελοποιείται ως ρευστό ακουστικό μέσο με πεπερασμένο ή ημιάπειρο πάχος.

Η μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος περιλαμβάνει τη διατύπωση και στη συνέχεια επίλυση προβλήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων με συνοριακές συνθήκες. Από τις σχετικές μεθόδους επίλυσης θα υιοθετήσουμε και θα αναφερθούμε στο τεύχος αυτό μόνο στην μέθοδο της ανάπτυξης της προς υπολογισμό συνάρτησης (ακουστικής πίεσης) σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων. Οι ιδιοσυναρτήσεις εν προκειμένω ορίζονται με βάση ένα πρόβλημα οριακών συνθηκών σε μία διάσταση, τύπου Sturm-Liouville. Η σχετική θεωρία είναι γνωστή στη διεθνή βιβλιογραφία ως "Θεωρία Κανονικών Ιδιομορφών" (Normal-Mode theory).

Στα πλαίσια του μαθήματος γίνεται μία ανασκόπηση της θεωρίας των προβλημάτων Sturm-Liouville, ενώ παρατίθενται θέματα συναρτήσεων Green καθώς και ειδικών συναρτήσεων που είναι απαραίτητα στην ανάπτυξη των μαθηματικών μοντέλων επίλυσης των προβλημάτων που θα συζητηθούν. Αναφέρονται επίσης τα θεωρήματα αναπαράστασης επί τη βάση των οποίων είναι δυνατή η έκφραση της ακουστικής πίεσης σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων.

Ως εφαρμογή της σχετικής θεωρίας εξετάζονται συγκεκριμένα προβλήματα ακουστικής διάδοσης στη θάλασσα και σχολιάζεται η φυσική σημασία των μεγεθών που υπεισέρχονται στην μαθηματική μελέτη των προβλημάτων. Τα περιβάλλοντα στα οποία αναφέρονται τα ως άνω προβλήματα παρουσιάζουν αξονική συμμετρία, ενώ οι μεταβολές των φυσικών παραμέτρων που υπεισέρχονται ως συντελεστές στο αντίστοιχο πρόβλημα μερικών διαφορικών εξισώσεων που ορίζεται, μπορεί να μεταβάλλονται με το βάθος και την απόσταση από την ηχητική πηγή.

Εφαρμογές των μοντέλων που παρουσιάζονται στο μάθημα συναντά κανείς σε κάθε πρόβλημα που σχετίζεται με την χρήση του ήχου στη θάλασσα. Τα προβλήματα αυτά αναφέρονται σε θαλάσσιες επικοινωνίες, σε θέματα ακουστικής αναγνώρισης της σύστασης του θαλάσσιου ύδατος και του πυθμένα, παρακολούθησης των μεταβολών στο θαλάσσιο περιβάλλον καθώς και σε εφαρμογές της θαλάσσιας επιστήμης και τεχνολογίας που σχετίζονται με τον εντοπισμό και την αναγνώριση αντικειμένων στο νερό και τον πυθμένα.

Στην τελευταία έκδοση των σημειώσεων του μαθήματος έχουν προστεθεί παραδείγματα τυπικής απεικόνισης του ακουστικού πεδίου σε θαλάσσιους κυματοδηγούς

Σεπτέμβριος 2008

Μιχάλης Ταρουδάκης

1. ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1.1 Εισαγωγή

Τα ακουστικά κύματα είναι διαταραχή της πίεσης ενός ακουστικού μέσου που διαδίδονται στο εν λόγω μέσον. Η μελέτη των χαρακτηριστικών διάδοσης των κυμάτων προϋποθέτει τη διατύπωση των εξισώσεων που διέπουν τη μεταβολή των χαρακτηριστικών μεγεθών του μέσου. Τα μεγέθη αυτά είναι η πίεση p , η ταχύτητα των στοιχειωδών σωματιδίων του μέσου \vec{u} και η πυκνότητα ρ . Τα μεγέθη αυτά είναι συναρτήσεις των χωρικών μεταβλητών και του χρόνου :

$$p = p(\vec{x}, t), u = \vec{u}(\vec{x}, t), \rho = \rho(\vec{x}, t)$$

όπου με \vec{x} συμβολίζουμε τις χωρικές μεταβλητές. Δεδομένου ότι θα ασχοληθούμε με τη διάδοση του ήχου στο νερό, θα αντιμετωπίσουμε μόνο ρευστά ακουστικά μέσα, στα οποία τα ακουστικά κύματα είναι διαμήκη. Προσέξτε ότι η ταχύτητα των στοιχειωδών σωματιδίων είναι διανυσματικό μέγεθος.

Το πρόβλημα θα το μελετήσουμε κατ' αρχήν στις τρεις διαστάσεις και στη συνέχεια θα περιοριστούμε για λόγους απλότητας στις δύο διαστάσεις όπου και θα μελετήσουμε μερικές χαρακτηριστικές λύσεις. Το πρόβλημα διέπεται από την ακουστική εξίσωση που προκύπτει από την εφαρμογή των βασικών εξισώσεων των ρευστών που με την σειρά τους περιγράφουν μαθηματικά τις μεταβολές των χαρακτηριστικών μεγεθών του μέσου. Οι τρεις εξισώσεις που υπεισέρχονται στην ανάλυση είναι

- Η εξίσωση της συνέχειας
- Η εξίσωση του Euler και
- Η καταστατική εξίσωση

Η ακουστική διέγερση έχει ως αποτέλεσμα την μεταβολή των τιμών ισορροπίας των βασικών μεγεθών που αναφέρθηκαν προηγουμένως.

$$p(\vec{x}, t) = p_0(\vec{x}, t) + p_1(\vec{x}, t)$$

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{u}_0(\vec{x}, t) + \vec{u}_1(\vec{x}, t)$$

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho_0(\vec{x}, t) + \rho_1(\vec{x}, t)$$

Εδώ οι μεταβολές συμβολίζονται με τον δείκτη 1 και οι τιμές ισορροπίας με τον δείκτη 0. Οι μεταβολές αυτές είναι μικρές σε σχέση με τις τιμές ισορροπίας είναι όμως αρκετές για να διεγείρουν τα όργανα που είναι ευαίσθητα σ' αυτές και να μας δώσουν το αίσθημα του ήχου. Μελετώντας την διάδοση του ήχου μελετούμε στην πραγματικότητα την διάδοση των διαταραχών αυτών.

Διατηρώντας όρους πρώτης τάξης ως προς τις μεταβολές των μεγεθών, η σύζευξη των τριών εξισώσεων μας οδηγεί εύκολα (βλ. π.χ. Boyles 1994) στην «γραμμικοποιημένη» ακουστική εξίσωση που εκφράζεται συνήθως για την πίεση διαταραχής (ακουστική πίεση) που είναι το μέγεθος που ενδιαφέρει τις εφαρμογές:

$$\nabla^2 p_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \quad (1.1.1)$$

όπου ο όρος c^2 αντιστοιχεί στον λόγο $\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0}$ και εκφράζει το τετράγωνο της ταχύτητας διάδοσης της διαταραχής (θερμοδυναμικός ορισμός της ταχύτητας). Σχολιασμό της διαδικασίας διατύπωσης της παραπάνω εξίσωσης μπορεί ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης να βρεί στην βιβλιογραφία που παρατίθεται στο τέλος των σημειώσεων και στις σημειώσεις του μαθήματος «Εισαγωγή στην Ακουστική Ωκεανογραφία».

1.2 Στοιχειώδεις λύσεις της ακουστικής εξίσωσης

1.2.1 Χωρισμός μεταβλητών χώρου-χρόνου

Μια τεχνική με πολλές δυνατότητες για τη λύση των μερικών διαφορικών εξισώσεων είναι η μέθοδος του χωρισμού μεταβλητών. Με βάση τη μέθοδο αυτή μια μερική διαφορική εξίσωση για μία συνάρτηση πολλών μεταβλητών μπορεί να χωριστεί σε μια ομάδα συνήθων διαφορικών εξισώσεων κάθε μια από τις οποίες ορίζεται για μια συνάρτηση που εξαρτάται από μία μόνο μεταβλητή (συναρτήσεις που μεταβάλλονται ανεξάρτητα η μία από την άλλη). Ο χωρισμός μεταβλητών δεν είναι βέβαια δυνατός σε κάθε περίπτωση. Ειδικά για την κυματική εξίσωση ο χωρισμός είναι δυνατός σε 11 συστήματα συντεταγμένων (βλ. Morse and Feshbach) και μόνον εάν οι διεπιφάνειες του προβλήματος συμπίπτουν με μία επιφάνεια συντεταγμένων των ως άνω 11 συστημάτων, Επιπλέον ο όρος $\frac{1}{c^2}$ της κυματικής εξίσωσης θα πρέπει να είναι είτε άθροισμα όρων καθένας από τους οποίους εξαρτάται από μια μόνο μεταβλητή, ή να είναι ο ίδιος συνάρτηση μιας μόνο μεταβλητής. Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε ότι οι ανωτέρω όροι πληρούνται και θα οδηγηθούμε σε συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων που θα μας δώσουν τη λύση απλών σχετικά προβλημάτων που αναφέρονται στη διάδοση του ήχου στη θάλασσα.

Θα προσπαθήσουμε κατ' αρχήν να απομονώσουμε την χρονική εξάρτηση.

Θεωρούμε ότι η ακουστική πίεση μπορεί να γραφεί ως:

$$p_1(\vec{x}, t) = \bar{p}(\vec{x})T(t) \quad (1.2.1)$$

Σημειώνουμε ότι από το σημείο αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό p για τη χωρική συνιστώσα της ακουστικής πίεσης (αντί για \bar{p}) και δεν θα πρέπει να συγχέεται με την ολική πίεση του μέσου. Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου c θα θεωρηθεί εδώ ως συνάρτηση μόνο των χωρικών μεταβλητών $c = c(\vec{x})$. Έτσι μπορούμε να αντικαταστήσουμε την 1.2.1 στην ακουστική εξίσωση 1.1.1 και να πάρουμε:

$$T \nabla^2 p = \frac{1}{c^2} p \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (1.2.2)$$

ή

$$\frac{c^2}{p} \nabla^2 p = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (1.2.3)$$

Μια και ο αριστερός όρος της 1.2.3 είναι συνάρτηση μόνο των χωρικών μεταβλητών και ο δεξιός όρος συνάρτηση μόνο του χρόνου, για να ισχύει πάντοτε η εξίσωση, θα πρέπει κάθε όρος να ισούται με μια σταθερά. Έτσι παίρνουμε :

$$\frac{c^2}{p} \nabla^2 p = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\omega^2 \quad (1.2.4)$$

όπου το αρνητικό σημείο αλλά και η ίδια η μορφή της σταθεράς ω^2 έχουν επιλεγεί έτσι ώστε να διευκολύνονται οι μαθηματικοί χειρισμοί αφ' ενός αλλά και η φυσική ερμηνεία αφ' ετέρου. Έτσι, στην 1.2.4 αναγνωρίζει κανείς στην σταθερά ω την κυκλική συχνότητα του κύματος ($\omega = 2\pi f$, όπου f είναι η συχνότητα σε Hz).

Από την 1.2.4 παίρνουμε δύο εξισώσεις :

$$\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad (1.2.5)$$

και

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \quad (1.2.6)$$

Από τις εξισώσεις αυτές η πρώτη είναι γνωστή ως **εξίσωση Helmholtz** ενώ η λύση της δεύτερης δίνει την χρονική εξάρτηση της ακουστικής πίεσης

Η 1.2.6 έχει δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους λύσεις :

$$T = A e^{\pm i\omega t} \quad (1.2.7)$$

με A σταθερά.

Χωρίς να χαθεί η γενικότητα της λύσης θα θεωρήσουμε ότι η σταθερά A είναι 1, και θα δεχθούμε από τις δύο πιθανές λύσεις εκείνη που αντιστοιχεί σε αρνητικό πρόσημο στον εκθέτη. Αυτό σημαίνει ότι θα μελετήσουμε πηγές οι οποίες εκπέμπουν ενέργεια στο περιβάλλον με χρονική εξάρτηση $e^{-i\omega t}$. Καταλήγουμε δηλαδή σε λύσεις της μορφής

$$T = e^{-i\omega t} \quad (1.2.8)$$

Κατόπιν αυτών, η λύση μας για την πίεση διαταραχής γράφεται

$$p_1(\vec{x}, t) = p(\vec{x}) e^{-i\omega t} \quad (1.2.9)$$

1.2.2 Χωρισμός μεταβλητών για την χωρική εξάρτηση της πίεσης

Ο λόγος που αναφερόμαστε στην ειδική μορφή της λύσης για τη συνάρτηση p είναι ότι μας ενδιαφέρει να βρούμε έκφραση για επίπεδα κύματα που θα αποτελέσουν το πρώτο ειδικό αντικείμενο της μελέτης μας. Το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο θα αναφερόμαστε είναι το καρτεσιανό, για το οποίο ο τελεστής ∇^2 παίρνει τη μορφή $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Θεωρώντας ακόμη ότι

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2, \quad (1.2.10)$$

όπου κάθε ένας από τους προσθετέους k_i^2 , $i = x, y, z$ εξαρτάται από μία μόνο μεταβλητή (την αντίστοιχη στο συμβολισμό που υιοθετήθηκε), θα κάνουμε χωρισμό των μεταβλητών και θα ζητήσουμε λύσεις της μορφής

$$p(x, y, z) = p_x(x)p_y(y)p_z(z) \quad (1.2.11)$$

Αντικαθιστώντας την ανωτέρω έκφραση στην εξίσωση Helmholtz και χρησιμοποιώντας την 1.2.10, παίρνουμε

$$\frac{\partial^2 p_x}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{p_x} + \frac{\partial^2 p_y}{\partial y^2} \cdot \frac{1}{p_y} + \frac{\partial^2 p_z}{\partial z^2} \cdot \frac{1}{p_z} + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0 \quad (1.2.12)$$

Παρατηρούμε ότι στο ανωτέρω άθροισμα έχουμε εξ προσθετέους οι οποίοι ανά δύο είναι συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Ζητάμε τα ζεύγη των όρων αυτών να έχουν άθροισμα 0 (σταθερά χωρισμού), οπότε καταλήγουμε σε σύστημα τριών εξισώσεων :

$$\frac{d^2 p_x}{dx^2} + k_x^2 p_x = 0 \quad (1.2.13\alpha)$$

$$\frac{d^2 p_y}{dy^2} + k_y^2 p_y = 0 \quad (1.2.13\beta)$$

$$\frac{d^2 p_z}{dz^2} + k_z^2 p_z = 0 \quad (1.2.13\gamma)$$

Προσέξτε την αλλαγή στο συμβολισμό της παραγώγου που πλέον είναι συνήθης και όχι μερική παράγωγος με δεδομένο ότι κάθε μία από τις συναρτήσεις p_i , $i = x, y, z$ είναι συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

Στο σημείο αυτό να υπενθυμίσουμε ότι δεν έχουμε λάβει υπ' όψιν μας οριακές συνθήκες στο πρόβλημα. Επομένως δεν μιλάμε ακόμη για λύση ενός προβλήματος αλλά λύσεις μιας εξίσωσης, κάνοντας ακόμη την υπόθεση ότι δεν υπάρχει πρόβλημα ως προς την εφαρμογή του χωρισμού των μεταβλητών. Κατόπιν αυτών, προχωράμε στην διατύπωση λύσεων για τις εξισώσεις 1.2.13(α-γ) που για k_i ($i = x, y, z$) $\neq 0$ είναι

$$p_x(x) = A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x} \quad (1.2.14\alpha)$$

$$p_y(x) = B_1 e^{ik_y y} + B_2 e^{-ik_y y} \quad (1.2.14\beta)$$

$$p_z(x) = C_1 e^{ik_z z} + C_2 e^{-ik_z z} \quad (1.2.14\gamma)$$

όπου οι συντελεστές θα υπολογιστούν εφ' όσον έχει οριστεί πλήρως το πρόβλημα και σε συνδυασμό με πιθανές οριακές συνθήκες.

Εάν υποθέσουμε ότι η ακουστική πίεση εξαρτάται μόνο από μία μεταβλητή, έχουμε διάδοση προς μία μόνο διεύθυνση. Θεωρώντας x την διεύθυνση αυτή, η ακουστική πίεση γράφεται

$$p_1(x, t) = p_x(x) e^{-i\omega t} = (A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x}) e^{-i\omega t} = A_1 e^{i(k_x x - \omega t)} + A_2 e^{i(-k_x x - \omega t)} \quad (1.2.15)$$

Από τους δύο τελευταίους όρους, ο πρώτος αντιπροσωπεύει κύμα οδεύον προς τα αυξανόμενα (θετικά) x και ο δεύτερος, κύμα οδεύον προς τα μειούμενα (αρνητικά) x .

Για τις ανάγκες της θεωρίας μας θα πρέπει να ορίσουμε τα *επίπεδα κύματα*. Ένα κύμα λέγεται επίπεδο, εάν η επιφάνεια σταθερής φάσης σε μία δεδομένη χρονική στιγμή είναι επίπεδο. Παρατηρώντας την λύση της ακουστικής εξίσωσης όπως δίδεται από την 1.2.15, βλέπουμε ότι για t σταθερό, η φάση του κύματος είναι σταθερή όταν x είναι σταθερό. Η επιφάνεια σταθερής φάσης επομένως είναι μία επίπεδη επιφάνεια κάθετη στον άξονα των x σε οποιοδήποτε σημείο του άξονα. Συνεπώς η λύση 1.2.15 αντιπροσωπεύει επίπεδο κύμα.

Θεωρώντας το πρόβλημά μας στις τρεις διαστάσεις και κρατώντας τον πρώτο από τους δύο όρους της λύσης μας για κάθε μία από τις συναρτήσεις p_x, p_y, p_z , βλέπουμε ότι η ακουστική πίεση παίρνει τη μορφή

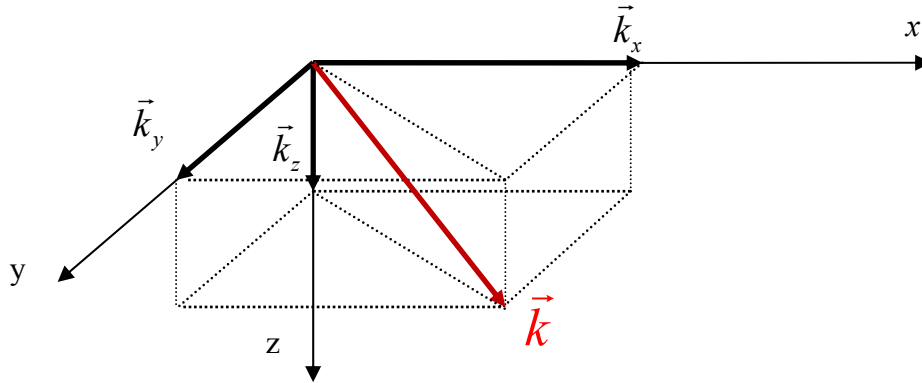
$$p_1(x, y, z, t) = A_1 B_1 C_1 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \quad (1.2.16)$$

και σε διανυσματική μορφή ως προς τον εκθέτη του e ,

$$p_1(x, y, z, t) = D e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (1.2.17)$$

όπου $D = A_1 B_1 C_1$

Βλέπουμε δηλαδή ότι ο αριθμός κύματος k μπορεί να θεωρηθεί ως διανυσματικό μέγεθος με συνιστώσες k_x, k_y, k_z κατά τους αντίστοιχους άξονες. Η θεώρηση αυτή είναι συμβατή με την εξίσωση 1.2.10 που μας δίνει μία έκφραση του τετραγώνου του μέτρου του αριθμού κύματος. Στο σχήμα 1.1 βλέπουμε την γεωμετρική απεικόνιση του αριθμού κύματος με τις αντίστοιχες συνιστώσες. Παρατηρούμε τέλος ότι επιφάνειες σταθερής φάσης είναι επίπεδα κάθετα στο διάνυσμα \vec{k} . Επομένως από την 1.2.17 παίρνουμε και πάλι λύση για επίπεδα κύματα.

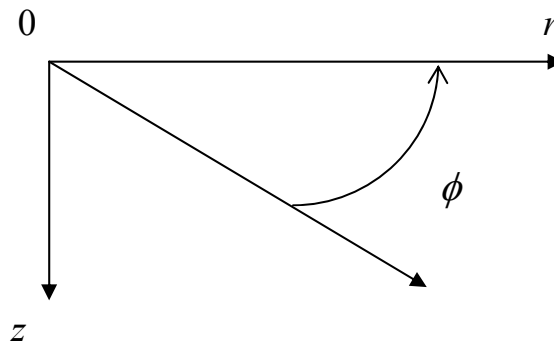


Σχήμα 1.1 Ο Αριθμός κύματος και οι συνιστώσες του.

1.2.3 Η λύση στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων

Σε πολλά προβλήματα που σχετίζονται με τη διάδοση του ήχου στη θάλασσα η βασική υπόθεση ως προς την ακουστική διέγερση είναι ότι η ακουστική πηγή είναι σημειακή αρμονική. Σε συνδυασμό με τη γεωμετρία του ακουστικού χώρου (επίπεδες διαχωριστικές επιφάνειες) το σύστημα συντεταγμένων που βοηθά στην επίλυση των σχετικών προβλημάτων φαίνεται ότι είναι το κυλινδρικό. Χρησιμοποιώντας την έκφραση του τελεστή Laplace στο κυλινδρικό σύστημα (Σχ. 1.2) παίρνουμε την εξίσωση του Helmholtz στη μορφή :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = 0 \quad (1.2.18)$$



Σχήμα 1.2 Το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων

Σημειώνουμε ότι οι σχέσεις ανάμεσα στις καρτεσιανές και τις κυλινδρικές συντεταγμένες είναι : $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $z = z$

Εφαρμόζοντας χωρισμό μεταβλητών, γράφουμε την p ως:

$$p(r, z, \phi) = F(r, \phi)u(z) \quad (1.2.19)$$

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση Helmholtz παίρνουμε:

$$\frac{1}{rF} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 F} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + \frac{1}{u} \frac{d^2 u}{dz^2} + k^2 = 0 \quad (1.2.20)$$

Θα θεωρήσουμε στη συνέχεια ότι το k^2 γράφεται ως : $k^2 = k_z^2(z) + q^2(r, \phi)$, οπότε παίρνουμε το σύστημα :

$$\frac{1}{u} \frac{d^2 u}{dz^2} + k_z^2 = 0 \quad (1.2.21)$$

$$\frac{1}{rF} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 F} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + q^2 = 0 \quad (1.2.22)$$

Η Συνήθης Διαφορική Εξίσωση κατά τα γνωστά έχει ως γενική λύση:

$$u = D_1 e^{ik_z z} + D_2 e^{-ik_z z} \quad (1.2.23)$$

Στη συνέχεια κάνουμε χωρισμό μεταβλητών στην F και παίρνουμε

$$F(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi) \quad (1.2.24)$$

Αντικαθιστώντας στην 1.2.22 έχουμε :

$$\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -q^2 \quad (1.2.25)$$

ή

$$\frac{r^2}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + q^2 r^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} \quad (1.2.26)$$

Κάθε όρος της 1.2.26 θα πρέπει να είναι σταθερά για να έχουμε ισχύ για κάθε r και ϕ . Έτσι παίρνουμε :

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \Phi \quad (1.2.27)$$

και

$$\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \left(q^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) = 0 \quad (1.2.28)$$

Η γενική λύση της 1.2.27 είναι:

$$\Phi = E_1 e^{im\phi} + E_2 e^{-im\phi} \quad (1.2.29)$$

Απομένει να μελετήσουμε την εξίσωση 1.2.28.

Εάν το q είναι σταθερά, η εξίσωση 1.2.28 είναι μία εξίσωση Bessel m τάξης. Για την θεωρία των εξισώσεων Bessel υπάρχει αρκετή βιβλιογραφία. Εμείς εδώ θα αρκεστούμε στην παράθεση ορισμένων ιδιοτήτων τους που θα μας χρειαστούν στη συνέχεια.

1.2.4 Η εξίσωση Bessel και οι λύσεις της

Η διαφορική εξίσωση :

$$\left[x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + (x^2 - \nu^2) \right] f(x) = 0 \quad (1.2.30)$$

όπου ν πραγματικός αριθμός, είναι μία εξίσωση Bessel ν τάξης.

Οι λύσεις της είναι συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους $J_\nu(x)$, οι συναρτήσεις Bessel δευτέρου είδους ή συναρτήσεις Neumann $N_\nu(x)$ και οι συναρτήσεις Bessel τρίτου είδους ή συναρτήσεις Hankel $H_\nu^{(1)}(x)$ και $H_\nu^{(2)}(x)$.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να αναπτύξει κανείς μία συνάρτηση Bessel και δεν είναι του παρόντος να αναλυθούν όλες οι περιπτώσεις. Ως παράδειγμα και μόνο αναφέρουμε την έκφραση των συναρτήσεων Bessel πρώτου είδους τάξης ν με τη μορφή σειράς ως :

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} \quad (1.2.31)$$

όπου $\Gamma(x)$ είναι συναρτήσεις Γάμα που αποτελούν άλλο είδος ειδικών συναρτήσεων (Βλ. Gradshteyn & Ryzhik). Περισσότερο μας ενδιαφέρουν εδώ οι ασυμπτωτικές εκφράσεις των συναρτήσεων για μικρά ή μεγάλα ορίσματα που θα δούμε στη συνέχεια.

Οι συναρτήσεις Hankel προκύπτουν από τις συναρτήσεις Bessel και Neumann μέσω των σχέσεων:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x) \quad (1.2.32)$$

και

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x) \quad (1.2.33)$$

Οι συναρτήσεις Hankel είναι αναλυτικές συναρτήσεις για $x > 0$

Είναι ενδιαφέρον να δούμε ορισμένες ασυμπτωτικές εκφράσεις των συναρτήσεων Bessel για μικρά ή μεγάλα ορίσματα:

$$\text{για } x \rightarrow 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} J_\nu(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \quad \nu \geq 0 \\ N_\nu(x) \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{\pi} [\ln(\frac{x}{2}) + \gamma], & \nu = 0 \\ -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu, & \nu > 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (1.2.34)$$

όπου

$$\gamma = -\int_0^\infty e^{-t} \ln t dt$$

$$\text{για } x \gg 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} J_\nu(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ N_\nu(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ H_\nu^{(1)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left\{i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \\ H_\nu^{(2)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left\{-i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \end{array} \right. \quad (1.2.35)$$

Στις τελευταίες αυτές εκφράσεις μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι συναρτήσεις Bessel και Neumann¹ αντιστοιχούν σε στάσιμα κύματα ενώ οι συναρτήσεις Hankel σε αποκλίνοντα ή συγκλίνοντα κύματα για τη σύμβαση που έχουμε επιλέξει ως προς την χρονική εξάρτηση της λύσης μας ($e^{-i\omega t}$)

Μερικές αναδρομικές σχέσεις που αναφέρονται σε μία συνάρτηση Bessel οποιουδήποτε είδους $f_\nu(x)$ είναι:

$$f_{\nu-1}(x) + f_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} f_\nu(x) \quad (1.2.36)$$

$$f_{\nu-1}(x) - f_{\nu+1}(x) = 2 \frac{df_\nu(x)}{dx} \quad (1.2.37)$$

$$\frac{\nu}{x} f_\nu(x) - f_{\nu+1}(x) = \frac{df_\nu(x)}{dx} \quad (1.2.38)$$

$$f_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} f_\nu(x) = \frac{df_\nu(x)}{dx} \quad (1.2.39)$$

¹ Οι συναρτήσεις Neumann ονομάστηκαν έτσι προς τιμήν του Γερμανού μαθηματικού C. Neumann (1832-1925) που μελέτησε τις ιδιότητές τους. Στην βιβλιογραφία συμβολίζονται επίσης με το σύμβολο $Y_\nu(x)$

1.2.5 Έκφραση της λύσης στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε εύκολα η 1.2.28 είναι μία εξίσωση Bessel m τάξης ως προς qr .

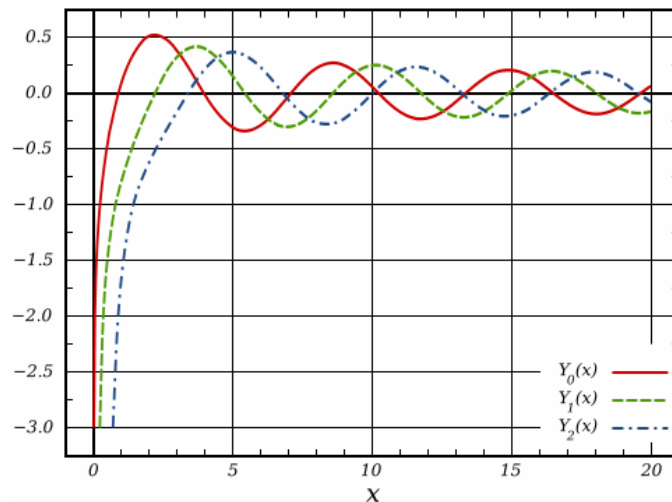
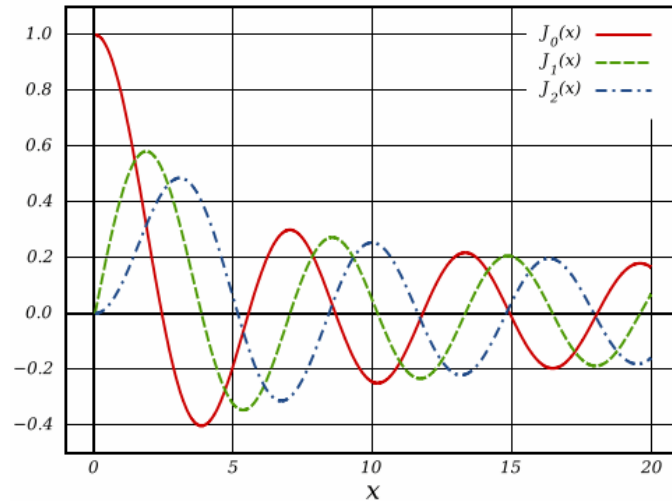
Επομένως η λύση της είναι μία από τις εκφράσεις:

$$R(r) = E_3 J_m(qr) + E_4 N_m(qr) \quad (1.2.40)$$

$$R(r) = E_5 H_m^{(1)}(qr) + E_6 H_m^{(2)}(qr) \quad (1.2.41)$$

Σε επόμενα εδάφια θα αναφερθούμε με περισσότερες λεπτομέρειες στην κατάλληλη επιλογή μας.

Σημείωση: Οι συναρτήσεις Bessel ανήκουν στην κατηγορία των "σχεδόν" περιοδικών συναρτήσεων. (βλ. Σχ. 1.3)



Σχήμα 1.3 Γραφική παράσταση των συναρτήσεων Bessel και Neumann των τριών πρώτων τάξεων

1.3 Προβλήματα σε μια διάσταση. Το πρόβλημα Sturm-Liouville

1.3.1 Γενικοί ορισμοί

Όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις που συναντήσαμε μέχρι τώρα, αποτελούν ειδικές μορφές της εξίσωσης

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\psi}{dx} \right] + [q(x) + \lambda r(x)]\psi = 0 \quad (1.3.1)$$

Εάν θεωρήσουμε ότι η εξίσωση ορίζεται στο διάστημα $[a, b]$ με τις εξής ιδιότητες:

- $p(x), q(x), r(x)$ πραγματικές και συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$
- $p(x)$ διαφορίσιμη συνάρτηση στο $[a, b]$
- $p(x)$ και $r(x) > 0$ στο $[a, b]$, $q(x) \leq 0$ στο $[a, b]$

τότε το πρόβλημα δύο σημείων που ορίζεται από την εξίσωση 1.3.1 και τις οριακές συνθήκες

$$A_1 \frac{d\psi}{dx}(a) - A_2 \psi(a) = 0 \quad (1.3.2\alpha)$$

$$B_1 \frac{d\psi}{dx}(b) + B_2 \psi(b) = 0 \quad (1.3.2\beta)$$

με A_1, A_2, B_1, B_2 πραγματικούς αριθμούς, ονομάζεται πρόβλημα **Sturm-Liouville** (S-L) κανονικό (regular). Οι συναρτήσεις A_1, A_2, B_1, B_2 θεωρούνται ανεξάρτητοι του λ και δεν μπορεί τα A_1, A_2 και B_1, B_2 να είναι ως ζεύγη ταυτόχρονα 0.

Θα αναφερθούμε στη συνέχεια σε ορισμένες από τις ιδιότητες του προβλήματος αφού σημειώσουμε ότι το πρόβλημα S-L είναι πρόβλημα ιδιοτιμών. Οι ιδιοτιμές είναι οι επιτρεπτές τιμές του λ κάτω από τις οριακές συνθήκες 1.3.2α και 1.3.2β. Σε κάθε επιτρεπτή τιμή του λ (λ_m) αντιστοιχεί μία ιδιοσυνάρτηση ψ_m .

1.3.2 Θεμελιώδες θεώρημα στο πρόβλημα Sturm-Liouville

ΘΕΩΡΗΜΑ Θεωρούμε το πρόβλημα S-L, όπως ορίστηκε ανωτέρω. Τότε υπάρχει μία άπειρη ομάδα πραγματικών αριθμών $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \dots$ τέτοιες ώστε $\lambda \rightarrow \infty$ για $m \rightarrow \infty$. Εάν οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m, \dots$, η ιδιοσυνάρτηση ψ_m έχει ακριβώς $m-1$ μηδενισμούς στο διάστημα $a < x < b$. Επιπλέον, εάν $A_1 A_2$ και $B_1 B_2 \neq 0$, τότε $\lambda_m > 0$ για όλα τα m .

- **Θ1. Οι ιδιοσυναρτήσεις $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \dots$ είναι ορθογόνιες με συνάρτηση βάρους την $r(x)$**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω οι ιδιοσυναρτήσεις ψ_m, ψ_n που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές m και n τάξης αντίστοιχα. Οι αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις γράφονται:

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\psi_m}{dx} \right] + [q(x) + \lambda_m r(x)] \psi_m = 0 \quad (1.3.3)$$

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\psi_n}{dx} \right] + [q(x) + \lambda_n r(x)] \psi_n = 0 \quad (1.3.4)$$

Πολλαπλασιάζουμε την 1.3.3 με ψ_n και την 1.3.4 με ψ_m και αφαιρούμε τις εξισώσεις κατά μέλη. Το αποτέλεσμα είναι:

$$(\lambda_m - \lambda_n) r(x) \psi_m \psi_n + \frac{d}{dx} \left\{ p(x) \psi_n \frac{d\psi_m}{dx} - p(x) \psi_m \frac{d\psi_n}{dx} \right\} \quad (1.3.5)$$

ολοκληρώνουμε από a έως b και παίρνουμε :

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b r(x) \psi_m \psi_n dx + p(b) \left[\psi_n \frac{d\psi_m}{dx} - \psi_m \frac{d\psi_n}{dx} \right]_b - p(a) \left[\psi_n \frac{d\psi_m}{dx} - \psi_m \frac{d\psi_n}{dx} \right]_a = 0 \quad (1.3.6)$$

Μια και οι ιδιοσυναρτήσεις ψ_m, ψ_n υπόκεινται στις οριακές συνθήκες, ο δεύτερος και τρίτος όρος της 1.3.6 μηδενίζεται. Έτσι, για $\lambda_m \neq \lambda_n$ θα πρέπει να ισχύει :

$$\int_a^b r(x) \psi_m(x) \psi_n(x) dx = 0 \quad (1.3.7)$$

που είναι η συνθήκη ορθογωνιότητας.

Οι ιδιοσυναρτήσεις μπορεί χωρίς άρση της γενικότητας της λύσης να θεωρηθούν επί πλέον ορθοκανονικές. Έτσι δεχόμαστε συνήθως τη συνθήκη

$$\int_a^b r(x) \psi_m(x) \psi_n(x) dx = \delta_{mn} \quad (1.3.8)$$

Το σύνολο των ιδιοτιμών του προβλήματος ονομάζεται **φάσμα (spectrum)** και κάτω από τις συνθήκες που ορίσαμε για το πρόβλημα S-L είναι διακριτό. Οι συνθήκες αυτές ορίζουν ένα **κανονικό** (regular) S-L πρόβλημα. Είναι πάντως δυνατόν να οριστεί ένα **μη κανονικό** (singular) πρόβλημα S-L που θα περιλαμβάνει και συνεχές φάσμα όπως θα δούμε στη συνέχεια. Αυτό μπορεί να γίνει εάν για παράδειγμα θεωρήσουμε μιγαδικούς συντελεστές ή άπειρο σύνολο (a ή $b \Rightarrow \infty$)

• Θ2 Οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω ότι οι ιδιοτιμές του κανονικού προβλήματος Sturm-Liouville είναι μιγαδικές. Τότε και οι ιδιοσυναρτήσεις θα είναι μιγαδικές $\psi_m(x) = u_m(x) + i v_m(x)$ όπου u_m και v_m πραγματικές συναρτήσεις. Οι εξισώσεις S-L για την ψ_m και την συζυγή της ψ_m^* γράφονται ως:

$$\frac{d}{dx} \left[p \frac{d\psi_m}{dx} \right] + [q + \lambda_m r] \psi_m = 0 \quad (1.3.9)$$

$$\frac{d}{dx} \left[p \frac{d\psi_m^*}{dx} \right] + [q + \lambda_m^* r] \psi_m^* = 0 \quad (1.3.10)$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με ψ_m^* και την δεύτερη με ψ_m αφαιρώντας κατά μέλη, ολοκληρώνοντας από a έως b και εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες παίρνουμε:

$$(\lambda_m - \lambda_m^*) \int_a^b r(x) \psi_m \psi_m^* dx = 0 \quad (1.3.11)$$

Αλλά $\psi_m \psi_m^* = u^2 + v^2 > 0$. Αφού για το κανονικό πρόβλημα S-L έχουμε $r(x) > 0$ και $\lambda_m \neq \lambda_m^*$ καταλήγουμε σε άτοπο. Το άτοπο έχει την αφορμή του στην υπόθεση για μιγαδικές ιδιοτιμές. Επομένως οι ιδιοτιμές λ πρέπει να είναι πραγματικές.

Θα συνεχίσουμε τώρα με μερικές ιδιότητες που σχετίζονται με τις ιδιοσυναρτήσεις και τη δυνατότητα αναπαράστασης της λύσης μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης μέσω σειράς ιδιοσυναρτήσεων.

1.3.3 Πληρότητα ομάδας ιδιοσυναρτήσεων

➤ Σύγκλιση στο μέσον (in the mean)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) : [a, b]$ και μία ομάδα ιδιοσυναρτήσεων του κανονικού προβλήματος S-L $\{\psi_m\}$. Σχηματίζουμε την πεπερασμένη σειρά

$$\sum_{m=1}^M c_m \psi_m(x) \quad (1.3.12)$$

και παίρνουμε την ποσότητα

$$I_M = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{m=1}^M c_m \psi_m(x) \right]^2 dx \quad (1.3.13)$$

Είναι προφανές ότι το I_M είναι ένα μέτρο του πόσο καλά η πεπερασμένη σειρά προσεγγίζει την $f(x)$. Εάν I_M τείνει στο 0 για $M \rightarrow \infty$ τότε η σειρά 1.3.12 συγκλίνει στο μέσον στην $f(x)$ (converges in the mean). Με άλλα λόγια:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M_0(\varepsilon) : \forall M > M_0 \Rightarrow I_M < \varepsilon$$

Κάτω από τις συνθήκες αυτές γράφουμε :

$$f(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^M c_m \psi_m(x) \quad (1.3.14)$$

(*l.i.m* σημαίνει limit in the mean)

Η σύγκλιση αυτή ονομάζεται και μέση τετραγωνική σύγκλιση. Η ομάδα των ιδιοσυναρτήσεων ψ_m με τα παραπάνω χαρακτηριστικά ονομάζεται "πλήρης".

Η ομάδα $\{\psi_m(x)\}, m = 1, 2, \dots, \}$ του κανονικού προβλήματος S-L είναι μία πλήρης ομάδα τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο διάστημα $[a, b]$.

Ως συνέπεια του ανωτέρω διατυπώνουμε το εξής θεώρημα αναπαράστασης:

➤ 1^ο Θεώρημα Αναπαράστασης

Εάν μία συνάρτηση $f(x)$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$, η αναπαράσταση της μέσω της σειράς 1.3.14, όπου ψ_m είναι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος S-L, συγκλίνει εις το μέσον στην $f(x)$. Οι συντελεστές της 1.3.14 είναι οι συντελεστές Fourier της $f(x)$:

$$c_m = \int_a^b r(x) f(x) \psi_m(x) dx \quad (1.3.15)$$

Η σύγκλιση αυτή δεν είναι η ισχυρότερη που μπορεί να επιτύχει κανείς. Είναι όμως ικανή στις περισσότερες περιπτώσεις να μας δώσει ικανοποιητικές εκφράσεις μιας συνάρτησης. Οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος S-L πάντως μπορούν να μας δώσουν δύο ακόμη θεωρήματα αναπαράστασης που θα τα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια και τα οποία μας δίδουν ισχυρότερη σύγκλιση των αναπαραστάσεων.

➤ 2^ο Θεώρημα Αναπαράστασης

Έστω \mathfrak{S} μία ομάδα συνεχών συναρτήσεων $f(x)$ που διαθέτουν τμηματικά συνεχή πρώτη παράγωγο στο διάστημα $[a, b]$. Έστω $\{\psi_m\}$ η ομάδα των ιδιοσυναρτήσεων ενός κανονικού προβλήματος S-L στο διάστημα αυτό. Εάν οι συναρτήσεις $f(x)$ ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες του προβλήματος S-L, τότε κάθε συνάρτηση $f(x) \in \mathfrak{S}$ μπορεί να αναπτυχθεί σε μία σειρά που συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \psi_m(x) \quad (1.3.16)$$

όπου a_m είναι οι συντελεστές Fourier της $f(x)$. Η σειρά ονομάζεται «Σειρά Fourier» της $f(x)$.

➤ 3^ο Θεώρημα Αναπαράστασης

Έστω ότι η $f(x) \in \mathfrak{S}'$ ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες του προβλήματος S-L και είναι τμηματικές συνεχές στο $[a, b]$. Τότε η σειρά Fourier της $f(x)$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στο:

1. $f(x)$ όπου $x \in [a, b]$ και x δεν είναι σημείο ασυνέχειας της $f(x)$.
2. $\frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)]$ όταν x σημείο ασυνέχειας της $f(x)$.

Εδώ $f(x^+)$, $f(x^-)$ είναι τα προς τα δεξιά και αριστερά όρια της $f(x)$ στο σημείο ασυνέχειας x .

ΑΣΚΗΣΗ: Αποδείξτε ότι οι συντελεστές a_m της 1.3.16 είναι οι συντελεστές Fourier της $f(x)$. Ομοίως αποδείξτε ότι οι συντελεστές c_m της 1.3.14 είναι επίσης οι συντελεστές Fourier της $f(x)$.

ΕΡΩΤΗΣΗ: Σχολιάστε τις διαφορές ανάμεσα στα θεωρήματα αναπαράστασης.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: \mathfrak{S}' είναι η ομάδα των τμηματικά συνεχών συναρτήσεων στο $[a, b]$ που διαθέτουν τμηματικά συνεχή πρώτη παράγωγο.

1.3.4 Το συνεχές φάσμα

Μέχρι τώρα η αναφορά μας στα θεωρήματα αναπαράστασης ή πληρότητας μιας ομάδας ιδιοσυναρτήσεων είχε τη βάση της στο κανονικό πρόβλημα Sturm Liouville , όπως αυτό ορίστηκε στην αρχή. Μάλιστα ο τελεστής

$$L \equiv \frac{1}{r(x)} \left\{ \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x) \right\} \tag{1.3.17}$$

ονομάζεται κανονικός (proper) τελεστής ενώ η εξίσωση του προβλήματος S-L μπορεί να γραφεί ως

$$L\psi + \lambda\psi = 0 \tag{1.3.18}$$

Εάν δεν ισχύει κάποια από τις ιδιότητες του τελεστή L , όπως για παράδειγμα όταν κάποια από τις p, q, r δεν είναι ορισμένες σε όλο το διάστημα $[a, b]$ σύμφωνα με τις ιδιότητες του προβλήματος ή όταν κάποιο από τα άκρα του διαστήματος $[a, b]$ τείνει στο άπειρο, ο τελεστής L καλείται **ιδιόμορφος** (singular). Ένας ιδιόμορφος τελεστής L δεν μπορεί να ορίσει μία πλήρη ομάδα ιδιοσυναρτήσεων και μία τυχαία συνάρτηση δεν μπορεί να αναπτυχθεί ως άπειρη σειρά ιδιοσυναρτήσεων. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει μία αντίστοιχη αναπαράσταση για την τυχαία συνάρτηση $f(x)$ που αναπτύσσεται πλέον ως:

$$f(x) = \sum_{m=1}^M a_m \psi_m(x) + \int_S b(\lambda) \phi(x, \lambda) d\lambda \tag{1.3.19}$$

όπου $\phi(x, \lambda)$ είναι συναρτήσεις οριζόμενες συνεχώς πάνω στο διάστημα S του λ και ονομάζονται **μη κανονικές ιδιοσυναρτήσεις** (improper eigenfunctions) σε αντίθεση με

τις κανονικές (proper) ιδιοσυναρτήσεις που απαρτίζουν το διακριτό φάσμα $\{\psi_m\}$. Το διάστημα S είναι επομένως ένα υποσύνολο τιμών της λ και ονομάζεται συνεχές φάσμα του τελεστή L .

Οι κανονικές ιδιοσυναρτήσεις είναι ορθογώνιες και κατά τα γνωστά ορθοκανονοποιούνται μέσω της σχέσης

$$\int_I r(x) \psi_m(x) \psi_n(x) dx = \delta_{mn} \quad (1.3.20)$$

όπου I είναι το διάστημα ορισμού της ψ_m . Αντίστοιχα για τις μη κανονικές ιδιοσυναρτήσεις ισχύει

$$\int_I r(x) \phi(x, \lambda') \phi(x, \lambda) dx = \delta(\lambda' - \lambda) \quad (1.3.21)$$

όπου $\delta(\lambda' - \lambda)$ είναι η συνάρτηση Dirac (δέλτα)

1.3.5 Μερικές ιδιότητες της συνάρτησης δέλτα (Dirac)

Η συνάρτηση δέλτα $\delta(x)$ εξ ορισμού είναι μηδέν για κάθε τιμή του ορίσματος x εκτός από την αρχή όπου έχει άπειρη τιμή, έτσι ώστε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (1.3.22)$$

Μπορεί να δειχτεί ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση $f(x)$ ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (1.3.23)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \quad (1.3.24)$$

Μερικές ιδιότητες της συνάρτησης δέλτα που θα χρειαστούμε στη συνέχεια παρατίθενται κατωτέρω:

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad (1.3.25)$$

$$x \delta(x) = 0 \quad (1.3.26)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (1.3.27)$$

$$\delta[f(x)] = \frac{1}{\left| \frac{df}{dx} \right|} \delta(x - x_0), \quad f(x_0) = 0 \quad (1.3.28)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x'') \delta(x'' - x') dx'' = \delta(x - x') \quad (1.3.29)$$

$$\frac{d}{dx} \delta(x) = -\frac{1}{x} \delta(x) \quad (1.3.30)$$

2. ΘΕΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ GREEN

2.1 Ορισμός

Σε πρόβλημα κυματικής διάδοσης, πολλές φορές θα πρέπει να θεωρήσουμε στο πρόβλημα και την πηγή της κυματικής διέγερσης. Η μοντελοποίηση της ακουστικής πηγής γίνεται συνήθως με σύνθεση στοιχειωδών πηγών οι οποίες θεωρούνται σημειακές και αρμονικές, αναπαρίστανται δε μέσω συναρτήσεων δέλτα. Η ύπαρξη της πηγής λαμβάνεται υπ' όψιν με την εισαγωγή μη ομογενούς όρου στην κυματική εξίσωση που έχει ως συνέπεια να διατυπωθεί η λύση της κυματικής εξίσωσης μέσω συναρτήσεων **Green**. Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να συνοψίσουμε ιδιότητες των συναρτήσεων Green που είναι απαραίτητες στην ανάλυση που θα ακολουθήσει.

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση

$$\frac{d}{dz} \left[p(z) \frac{dG}{dz} \right] + [q(z) + \lambda r(z)]G = -\delta(z - z_0) \quad (2.1.1)$$

για μία συνάρτηση $G(z)$ ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$.

Η εξίσωση μας θυμίζει την αντίστοιχη του προβλήματος Sturm-Liouville, όπου η βασική διαφορά βρίσκεται στον μη ομογενή όρο. Ας θεωρήσουμε επίσης ότι η άγνωστη συνάρτηση G , ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος S-L. Η λύση της εξίσωσης αυτής είναι μία συνάρτηση Green μίας διάστασης και συμβολίζεται ως $G(z, z_0; \lambda)$. Υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση δέλτα μηδενίζεται για $z \neq z_0$ και

$$\int_{z_1}^{z_2} \delta(z - z_0) dz = \begin{cases} 1 & z_0 \in [z_1, z_2] \\ 0 & z_0 \notin [z_1, z_2] \end{cases}$$

Για τη συνάρτηση G θα δεχτούμε ότι είναι συνεχής στο διάστημα ορισμού της με συνεχή πρώτη παράγωγο παντού εκτός από τη θέση $z=z_0$. Προσέξτε στο όρισμα της Green ότι περιέχονται ως μεταβλητές το ιδιόμορφο σημείο z_0 και η παράμετρος λ .

Θα προσδιορίσουμε την ασυνέχεια της παραγώγου της G για $z=z_0$.

Ολοκληρώνουμε την εξίσωση 2.1.1 από $z_0 - \varepsilon$ έως $z_0 + \varepsilon$ για $\varepsilon > 0$. Παίρνουμε:

$$\int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} \frac{d}{dz} \left[p(z) \frac{dG}{dz} \right] dz + \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} [q(z) + \lambda r(z)]G dz = - \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} \delta(z - z_0) dz \quad (2.1.2)$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα για $\varepsilon \rightarrow 0$ λόγω συνέχειας των G, q και r τείνει στο 0.

Λόγω των ιδιοτήτων της συνάρτησης δ , το ολοκλήρωμα στο δεύτερο μέλος της 2.1.2 είναι:

$$\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} \delta(z-z_0) dz = 1 \quad (2.1.3)$$

Έτσι έχουμε:

$$\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} \frac{d}{dz} \left[p(z) \frac{dG}{dz} \right] dz = \left[p(z) \frac{dG}{dz} (z, z_0; \lambda) \right]_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} = -1 \quad (2.1.4)$$

Επομένως:

$$p(z_0 + \varepsilon) \frac{dG}{dz} (z_0 + \varepsilon, z_0; \lambda) - p(z_0 - \varepsilon) \frac{dG}{dz} (z_0 - \varepsilon, z_0; \lambda) = -1 \quad (2.1.5)$$

όπου έχουμε πλέον χρησιμοποιήσει και το όρισμα της συνάρτησης Green.

Για $\varepsilon \rightarrow 0$ και εφ'όσον $p(z)$ συνεχής συνάρτηση έχουμε:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{dG}{dz} (z_0 + \varepsilon, z_0; \lambda) - \frac{dG}{dz} (z_0 - \varepsilon, z_0; \lambda) \right] = -\frac{1}{p(z_0)} \quad (2.1.6)$$

Μία ενδιαφέρουσα σημείωση στο σημείο αυτό αναφέρεται στο ανάπτυγμα της συνάρτησης δέλτα σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων.

Θεωρώντας μία συνάρτηση $f(z)$ που αναπτύσσεται κατά τα θεωρήματα αναπαράστασης σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων, παίρνουμε διαδοχικά

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(z) , \quad (2.1.7)$$

όπου

$$A_n = \int_a^b r(z) f(z) \psi_n(z) dz \quad (2.1.8)$$

και αντικαθιστώντας την 2.1.8 στη 2.1.7 (αλλάζοντας για αποφυγή σύγχυσης τον συμβολισμό στην μεταβλητή ολοκλήρωσης) έχουμε:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b r(z') f(z') \psi_n(z') \psi_n(z) dz' \quad (2.1.9)$$

$$f(z) = \int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} r(z') \psi_n(z') \psi_n(z) \right\} f(z') dz' \quad (2.1.10)$$

Για να ισχύει η τελευταία ισότητα, θα πρέπει

$$\sum_{n=1}^{\infty} r(z') \psi_n(z') \psi_n(z) = \delta(z - z') \quad (2.1.11)$$

που είναι γνωστή και ως σχέση πληρότητας (completeness relation) του προβλήματος S-L.

2.2 Ανάπτυγμα της Green σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων

Η συνάρτηση Green πληροί τις απαιτήσεις που θέσαμε για να είναι δυνατή η ανάπτυξη της σε συγκλίνουσα σειρά ιδιοσυναρτήσεων ενός προβλήματος S-L. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$G(z, z_0; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(z) \quad (2.2.1)$$

Αντικαθιστούμε τις G και δ από τις 2.1.12 και 2.1.11 στην 2.2.1 και παίρνουμε:

$$\frac{d}{dz} p \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{d\psi_n}{dz}(z) \right] + q \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(z) + \lambda r \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} r(z) \psi_n(z_0) \psi_n(z) \quad (2.2.2)$$

Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης μπορούμε να αντιμετωπίσουμε άθροισμα με παράγωγο και να πάρουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left\{ \frac{d}{dz} \left(p \frac{d\psi_n}{dz} \right) + q \psi_n \right\} + \lambda r \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} r(z) \psi_n(z_0) \psi_n(z) \quad (2.2.3)$$

ή τελικά χρησιμοποιώντας την εξίσωση S-L για τις ιδιοσυναρτήσεις

$$- \sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda_n r(z) \psi_n(z) + \lambda r(z) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} r(z) \psi_n(z_0) \psi_n(z) \quad (2.2.4)$$

ή

$$r(z) \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\lambda - \lambda_n) \psi_n(z) = - \delta(z - z_0). \quad (2.2.5)$$

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζοντας την τελευταία εξίσωση με $\psi_m(z)$, ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[a, b]$ και κάνοντας χρήση της συνθήκης ορθογωνιότητας των ιδιοσυναρτήσεων παίρνουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n (\lambda - \lambda_n) \int_a^b r \psi_n(z) \psi_m(z) dz = - \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z_0) \int_a^b r(z) \psi_n(z) \psi_m(z) dz \quad (2.2.6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n (\lambda - \lambda_n) \delta_{mn} = - \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z_0) \delta_{nm} \quad (2.2.7)$$

$$A_m(\lambda - \lambda_m) = -\psi_m(z_0) \quad (2.2.8)$$

Έτσι το ανάπτυγμα της Green (εξίσωση 2.2.1) γίνεται

$$G(z, z_0; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(z)\psi_n(z_0)}{\lambda_n - \lambda} \quad (2.2.9)$$

Η συνάρτηση Green του προβλήματος επομένως αναπτύχθηκε σε σειρά, μέσω ιδιοσυναρτήσεων και ιδιοτιμών του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος. Η συνάρτηση Green είναι συμμετρική, γεγονός που επιτρέπει την αντιμετάθεση της θέσης της πηγής και του πεδριακού σημείου. (γιατί;).

$$G(z, z_0; \lambda) = G(z_0, z; \lambda) \quad (2.2.10)$$

Θα πρέπει επίσης να παρατηρήσουμε ότι το λ δεν είναι ιδιοτιμή του προβλήματος. Επιπλέον η μέχρι τώρα θεώρηση αφορούσε πραγματικές ιδιοτιμές-ιδιοσυναρτήσεις.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι το λ είναι μιγαδική μεταβλητή. Η συνάρτηση Green του αντίστοιχου προβλήματος θα είναι επομένως μιγαδική. Λόγω της διαφοράς που εμφανίζεται στον παρανομαστή της αναπαράστασης 2.2.9, η $G(z, z_0; \lambda)$ είναι αναλυτική παντού εκτός από τα σημεία για τα οποία $\lambda = \lambda_n$. Τα σημεία αυτά είναι οι πόλοι της G στο μιγαδικό επίπεδο του λ και είναι απλοί.

Εάν ολοκληρώσουμε τη συνάρτηση Green στο επίπεδο του λ πάνω σε μία καμπύλη C_λ που περιέχει τους πόλους, παίρνουμε:

$$\int_{C_\lambda} G(z, z_0; \lambda) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z)\psi_n(z_0) \int_{C_\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda_n - \lambda}. \quad (2.2.11)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων του Cauchy (residue theorem) παίρνουμε:

$$\int_{C_\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda_n - \lambda} = -2\pi i \quad (2.2.12)$$

όπου i είναι η φανταστική μονάδα, απ' όπου προκύπτει η εξής έκφραση του ολοκληρώματος της Green

$$\int_{C_\lambda} G(z, z_0; \lambda) dz = -2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z)\psi_n(z_0), \quad (2.2.13)$$

ενώ χρησιμοποιώντας τη συνθήκη πληρότητας 2.1.11 έχουμε

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} G(z, z_0; \lambda) d\lambda = -\frac{\delta(z - z_0)}{r(z)} \quad (2.2.14)$$

Το αποτέλεσμα αυτό θα το χρησιμοποιήσουμε σε επόμενο εδάφιο.

2.3 Η Στοιχειώδης Πηγή

Ας θεωρήσουμε την διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d}{dz} \left[p(z) \frac{dF}{dz} \right] + [q(z) + \lambda r(z)]F = -S(z) \quad (2.3.1)$$

Η εξίσωση αυτή μας θυμίζει την εξίσωση ορισμού της συνάρτησης Green (2.1.1) με τη διαφορά να βρίσκεται στην έκφραση του μη ομογενούς όρου $S(z)$. Ο όρος αυτός στην πραγματικότητα εκφράζει μία διανομή σημειακών πηγών στον άξονα z , που εκτείνεται σε μία περιοχή Z_r . Το σημαντικό στην προκειμένη περίπτωση είναι ότι η συνάρτηση F που αποτελεί λύση της 2.3.1 μπορεί να εκφραστεί με χρήση της συνάρτησης Green του αντίστοιχου προβλήματος 2.1.1 μέσω της σχέσης :

$$F(z) = \int_{Z_r} G(z, z_0; \lambda) S(z_0) dz_0 \quad (2.3.2)$$

Η F ικανοποιεί τις ίδιες οριακές συνθήκες με την $G(z, z_0; \lambda)$

2.4 Οι συναρτήσεις δέλτα στο κυλινδρικό και σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

Μέχρι τώρα είδαμε τον ορισμό της συνάρτησης Green μέσω κάποιων συνήθους διαφορικής εξίσωσης. Έγινε φανερό ότι η συνάρτηση Green συνδέεται με τη διέγερση (forcing) μιας εξίσωσης που προέρχεται από σημειακή πηγή. Στη φύση βέβαια τα προβλήματα είναι τρισδιάστατα και με την έννοια αυτή θα πρέπει να αναζητήσουμε εκφράσεις της σημειακής διέγερσης στα διάφορα συστήματα συντεταγμένων ώστε να χρησιμοποιείται ως έκφραση ανάλογα με το σύστημα συντεταγμένων που υιοθετείται σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Στα προβλήματα κυματική διάδοσης η σημειακή αρμονική πηγή ορίζεται μέσω της συνάρτησης $S(\vec{x}, t)$ ως εξής:

$$S(\vec{x}, t) = S(\vec{x}, \vec{x}_0, t) = A \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) e^{-i\omega t} \quad (2.4.1)$$

Εάν γυρίσουμε τώρα στην εξίσωση που διέπει τη διάδοση του ήχου σε ένα ρευστό ακουστικό μέσον, και επιβάλουμε τη διέγερση που περιγράφεται από την 2.4.1, καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\nabla^2 p_1(\vec{x}, t) - \frac{1}{c(\vec{x})^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p_1 = -A \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) e^{-i\omega t} \quad (2.4.2)$$

Η μορφή αυτή της διέγερσης μας επιτρέπει το χωρισμό των μεταβλητών ως

$$p_1(\vec{x}, t) = p(\vec{x}) \cdot T(t)$$

και μας οδηγεί στη μη ομογενή εξίσωση Helmholtz

$$\nabla^2 p(\vec{x}) + k^2(\vec{x}) p(\vec{x}) = -\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (2.4.3)$$

όπου για λόγους απλότητας έχουμε υποθέσει $A=1$.

Εργαζόμενοι σε διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων θα πρέπει να εκφράσουμε σε αυτά τόσο τον τελεστή ∇^2 (Λαπλασιανή) όσο και τη συνάρτηση δέλτα.

2.4.1 Κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων

Οι συντεταγμένες του κυλινδρικού συστήματος είναι r, z, φ και συνδέονται με τις καρτεσιανές μέσω των σχέσεων: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$.

Σε ένα τυχαίο σύστημα συντεταγμένων (ξ_1, ξ_2, ξ_3) η συνάρτηση δέλτα έχει νόημα μόνο εάν μπορεί να εκφραστεί μέσω ολοκληρώματος της μορφής

$$\iiint \delta(\xi_1 - \xi'_1) \delta(\xi_2 - \xi'_2) \delta(\xi_3 - \xi'_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (2.4.4)$$

Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων έχουμε :

$$\iiint \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) dx dy dz = \iiint \delta(\bar{x} - \bar{x}_0) \quad (2.4.5)$$

Για να μετατρέψουμε το στοιχειώδη όγκο $dx dy dz$ στο τυχαίο σύστημα συντεταγμένων έχουμε τη σχέση

$$dx dy dz = |J| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (2.4.6)$$

όπου J είναι η Ιακωβιανή (Jacobian) του μετασχηματισμού από το ένα σύστημα στο άλλο που ορίζεται ως

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi_1} & \frac{\partial z}{\partial \xi_2} & \frac{\partial z}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} \quad (2.4.7)$$

Έτσι, γράφουμε τη συνάρτηση δέλτα με χρήση των συντεταγμένων ξ_1, ξ_2, ξ_3 ως

$$\delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) = \frac{1}{|J|} \delta(\xi_1 - \xi'_1) \delta(\xi_2 - \xi'_2) \delta(\xi_3 - \xi'_3) \quad (2.4.8)$$

ώστε οι εκφράσεις 2.4.4 και 2.4.5 να είναι ισοδύναμες. Στην περίπτωση του κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων έχουμε:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.4.9)$$

Επομένως η συνάρτηση δέλτα στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων γράφεται ως

$$\delta(\bar{x} - \bar{x}_0) = \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\phi - \phi_0) \delta(z - z_0) \quad (2.4.10)$$

Λόγω του ότι για $r=0$ η Ιακωβιανή μηδενίζεται, δεν έχουμε αντιστοιχία ένα προς ένα στη θέση $r=0$ ανάμεσα στα δύο συστήματα συντεταγμένων.

Υπενθυμίζοντας τη σχέση 1.2.18, η μη ομογενής Helmholtz γράφεται στο κυλινδρικό σύστημα:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = -\frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\phi - \phi_0) \delta(z - z_0) \quad (2.4.11)$$

Μία ενδιαφέρουσα περίπτωση που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια είναι εκείνη για την οποία η p δεν εξαρτάται από τη γωνία ϕ . Στην περίπτωση αυτή έχουμε **αξονικά συμμετρικό περιβάλλον**. Η μη ομογενής Helmholtz γράφεται τότε ως

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = -\frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\phi - \phi_0) \delta(z - z_0) \quad (2.4.12)$$

ολοκληρώνοντας από 0 έως 2π παίρνουμε

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p \right) d\phi = -\frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(z - z_0) \int_0^{2\pi} \delta(\phi - \phi_0) d\phi \quad (2.4.13)$$

και αφού η ποσότητα στο ολοκλήρωμα του πρώτου μέρους είναι σταθερά

$$2\pi \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p \right) = -\frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(z - z_0) \quad (2.4.14)$$

Άρα

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r - r_0) \delta(z - z_0) \quad (2.4.15)$$

που είναι η ζητούμενη έκφραση.

2.4.2 Σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

Η αντιστοιχία καρτεσιανών-σφαιρικών συντεταγμένων είναι:

$$x=r\sin\theta\cos\phi, \quad y=r\sin\theta\sin\phi, \quad z=r\cos\theta \quad (2.4.16)$$

και η Ιακωβιανή προκύπτει εύκολα $J = r^2 \sin \theta$

Επομένως,

$$dxdydz = |J|drd\theta d\phi \quad (2.4.17)$$

και

$$\delta(\bar{x} - \bar{x}_0) = \frac{1}{|J|} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\phi - \phi_0) \quad (2.4.18)$$

δηλαδή

$$\delta(\bar{x} - \bar{x}_0) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\phi - \phi_0) \quad (2.4.19)$$

Δεν έχουμε αντιστοιχία ένα προς ένα ανάμεσα στα δύο συστήματα συντεταγμένων, μόνο όταν η Ιακωβιανή μηδενίζεται. Αυτό ισχύει στις περιπτώσεις που $r=0$ ή $\theta=0$.

Στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων ενδιαφέρον παρουσιάζει η εξίσωση Helmholtz όταν η άγνωστη συνάρτηση p δεν εξαρτάται από τις γωνίες. Η εξίσωση Helmholtz (με τον μη ομογενή όρο) γράφεται τότε:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dp}{dr} \right] + k^2 p = -\frac{\delta(r - r_0)}{4\pi r^2} \quad (2.4.20)$$

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, υπάρχει μία περίπτωση που η έκφραση αυτή θα μας είναι χρήσιμη.

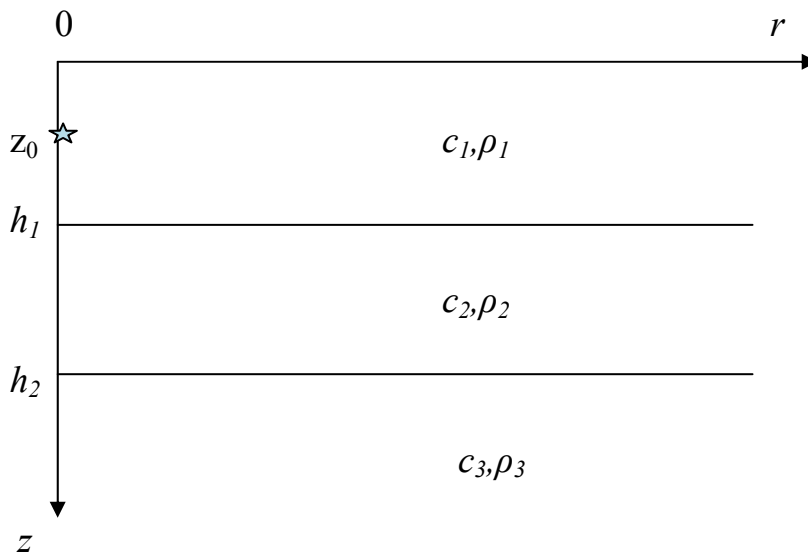
3. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΣΕ ΠΕΔΙΑ ΜΕ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΥΝΟΡΑ

3.1 Γενική γεωμετρία-οριακές συνθήκες

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε το πρόβλημα της διάδοσης του ήχου σε ένα θαλάσσιο περιβάλλον που ορίζεται από επίπεδα σύνορα χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά εργαλεία που αναπτύχθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια αλλά και πρόσθετες μεθόδους που θα αναφερθούν στη συνέχεια.

Η απλούστερη γεωμετρία του προβλήματος περιγράφεται στο σχήμα 3.1

Πρόκειται για ένα περιβάλλον που ορίζεται από την επιφάνεια της θάλασσας σε βάθος $z=0$ (κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων) και επάλληλα στρώματα στον πυθμένα που χωρίζονται από επίπεδα και οριζόντια σύνορα. Το πρόβλημα μελετάται για μια σημειακή πηγή που θα θεωρηθεί ότι τοποθετείται σε απόσταση $r_0=0$ και βάθος $z=z_0$. Στην γενικότερη περίπτωση η πυκνότητα (ρ) και η ταχύτητα διάδοσης του ήχου (c) μπορεί να μεταβάλλεται με το βάθος και την απόσταση, σε όλα τα ακουστικά στρώματα, από τα οποία το τελευταίο μπορεί να εκτείνεται μέχρι το άπειρο. Τα στρώματα στον πυθμένα μπορεί να είναι οσαδήποτε σε αριθμό. Για να αποφύγουμε τις περιπλοκές του προβλήματος θα περιορίσουμε τη μελέτη μας στις περιπτώσεις που η πυκνότητα είναι σταθερή σε κάθε στρώμα, η ταχύτητα του ήχου μπορεί να μεταβάλλεται μόνο με το βάθος, ενώ στην περίπτωση που θεωρηθεί ημιάπειρο τελευταίο στρώμα, η ταχύτητα του ήχου θα είναι σταθερή σ' αυτό.



Σχήμα 3.1 Η γεωμετρία του προβλήματος της ακουστικής διάδοσης σε πεδίο με επίπεδα σύνορα.

Η μόνη οριακή συνθήκη του προβλήματος που θα θεωρηθεί αμετάβλητη σε όλες τις περιπτώσεις που θα μελετηθούν είναι στην επιφάνεια ($z=0$) όπου η πίεση p θα είναι πάντα 0. Η συνθήκη αυτή αντιστοιχεί στην υπόθεση ότι η επιφάνεια της θάλασσας είναι ελεύθερη πίεσεων και δεν είναι δυνατή η μετάδοση του ήχου από το νερό στον αέρα.

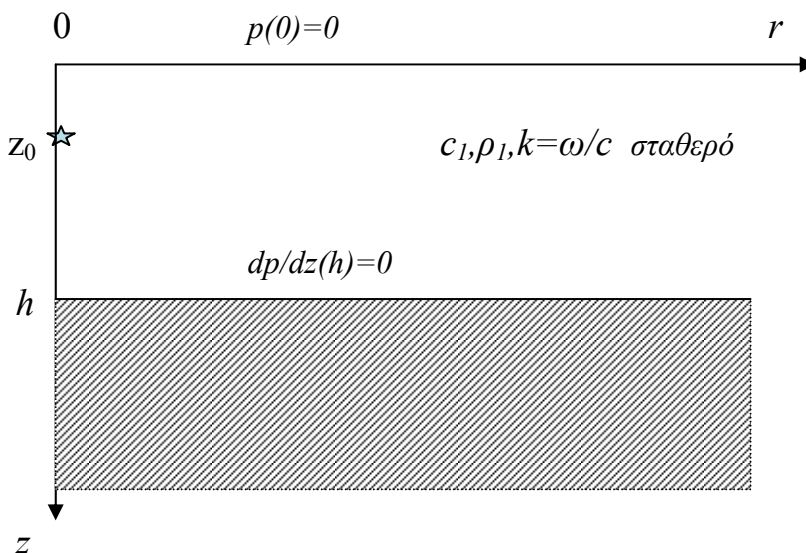
Στο όριο νερού-πυθμένα ζητάμε συνέχεια της πίεσης και της κάθετης ταχύτητας ενώ ίδια απαίτηση έχουμε για κάθε διεπιφάνεια στον πυθμένα. Θα απαιτήσουμε η πίεση να τείνει στο 0 για $z \rightarrow \infty$ ενώ μια συνθήκη ακτινοβολίας τύπου Sommerfeld θα τεθεί για $r \rightarrow \infty$. Σε ειδικές περιπτώσεις θα θεωρήσουμε ότι το πεδίο μας τελειώνει στο z σε έναν ακλόνητο πυθμένα που ισοδυναμεί με μια ομογενή συνθήκη Neumann (κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας \vec{u} μηδενίζεται).

Αξίζει να σημειωθεί ότι κάτω από τις ανωτέρω παραδοχές, η λύση του προβλήματος δεν εξαρτάται από τη γωνία φ του κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων (περιβάλλον αξονικής συμμετρίας) ενώ οι παράμετροι του περιβάλλοντος δεν εξαρτώνται από την απόσταση (περιβάλλον σταθερών συναρτήσεων της απόστασης παραμέτρων –range independent environment).

Θα μελετήσουμε στη συνέχεια μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις ακουστικής διάδοσης σε κυματοδηγούς.

3.2 Ο απλός κυματοδηγός – Πρόβλημα Π1

Ο απλός κυματοδηγός ορίζεται από την επιφάνεια της θάλασσας που θεωρείται οριζόντια και τον πυθμένα που επίσης θεωρείται οριζόντιος. Στον πυθμένα δεχόμαστε ομογενή συνθήκη Neumann. (σχήμα 3.2).



Σχήμα 3.2 Ο απλός κυματοδηγός

Το πρόβλημα που καλούμεθα να επιλύσουμε έχει ως εξής : (πρόβλημα Π1)

- Βρείτε τη συνάρτηση $p(r,z)$ που υπακούει στην εξίσωση:

$$\nabla^2 p(r,z) + k^2 p(r,z) = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r)\delta(z-z_0) \quad (3.2.1)$$

κάτω από τις οριακές συνθήκες :

$$p(\cdot,0) = 0, \quad \frac{dp}{dz}(\cdot, h) = 0 \quad (3.2.2)$$

και μία κατάλληλη συνθήκη ακτινοβολίας για $r \rightarrow \infty$

Ο συμβολισμός με την τελεία στο όρισμα υποδηλώνει ότι η συνθήκη έχει νόημα για κάθε τιμή της αντίστοιχης μεταβλητής.

Η εξίσωση 3.2.1 σε κυλινδρικές συντεταγμένες γράφεται :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r)\delta(z-z_0) \quad (3.2.1\alpha)$$

3.2.1 Χωρισμός μεταβλητών

Εάν θεωρήσουμε την ομογενή εξίσωση Helmholtz, στο ανωτέρω περιβάλλον μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι μπορούμε να καταφύγουμε σε χωρισμό μεταβλητών και να οδηγηθούμε σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις της μορφής:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \lambda R = 0 \quad (3.2.3)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + (k^2 - \lambda)Z = 0 \quad (3.2.4)$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι η $p(r,z) = R(r)Z(z)$ και λ είναι η σταθερά χωρισμού.

Ο ανωτέρω χωρισμός μεταβλητών μας οδηγεί στο να ορίσουμε δύο συναρτήσεις Green για το μη ομογενές πρόβλημα (εξίσωση 3.2.1) από τις οποίες η μία εξαρτάται από το r μόνο και η άλλη από το z μόνο, και να δούμε κατά πόσον μπορούμε να εκφράσουμε τη λύση του προβλήματος Π1 μέσω αυτών.

3.2.2 Οι συναρτήσεις Green του προβλήματος

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις Green $G_1(r, r_0, \lambda)$ και $G_2(z, z_0, \lambda)$ που υπακούουν στις εξισώσεις :

$$\frac{d^2 G_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG_1}{dr} + \lambda G_1 = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \quad (3.2.5)$$

και

$$\frac{d^2 G_2}{dz^2} + (k^2 - \lambda) G_2 = -\delta(z - z_0) \quad (3.2.6)$$

Η ευθεία αντιστοιχία ανάμεσα στις εξισώσεις αυτές και τις 3.2.3 και 3.2.4 είναι προφανής.

Οι συναρτήσεις G_1 και G_2 αποτελούν λύσεις δύο αντίστοιχων προβλημάτων με πεδιακές εξισώσεις τις 3.2.5 και 3.2.6 και οριακές συνθήκες για την G_1

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \varepsilon \frac{dG_1}{dr}(\varepsilon) \right\} = -\frac{1}{2\pi} \quad (3.2.7)$$

και

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left\{ \frac{\partial G_1}{\partial r} - i\sqrt{\lambda} G_1 \right\} = 0 \quad (3.2.8)$$

(πρόβλημα Π1α)

Από τις συνθήκες αυτές, η πρώτη προέρχεται από την εξίσωση 2.1.6 που ορίζει την πεπερασμένη ασυνέχεια στο ιδιόμορφο σημείο z_0 της εξίσωσης 2.1.1 . Από την 2.1.1 οδηγούμεθα στην 3.2.5 μέσω των αντικαταστάσεων

$$z \rightarrow r, z_0 \rightarrow r_0, p(z) \rightarrow 2\pi r, q(z) \rightarrow 0, r(z) \rightarrow 2\pi r$$

Έτσι, για $r > 0$ από την 2.1.6 οδηγούμεθα στην 3.2.7.

Η δεύτερη συνθήκη αντιστοιχεί στην συμπεριφορά της λύσης στο άπειρο. Πρόκειται για μία έκφραση της **συνθήκης ακτινοβολίας του Sommerfeld** και ορίζει ότι το άπειρο απορροφά και δεν επανακτινοβολεί ενέργεια. Η συνθήκη αυτή είναι απαραίτητη για να έχουμε μοναδική λύση στο πρόβλημά μας.

Οι οριακές συνθήκες για την G_2 είναι :

$$G_2(0, z_0, \lambda) = 0 \quad (3.2.9)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ G_2(z_0 + \varepsilon, z_0, \lambda) - G_2(z_0 - \varepsilon, z_0, \lambda) \} = 0 \quad (3.2.10)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{dG_2}{dz}(z_0 + \varepsilon, z_0, \lambda) - \frac{dG_2}{dz}(z_0 - \varepsilon, z_0, \lambda) \right\} = -1 \quad (3.2.11)$$

$$\frac{dG_2}{dz}(h, z_0, \lambda) = 0 \quad (3.2.12)$$

(πρόβλημα Π1β)

Η αντιστοιχία του προβλήματος που διέπεται από την 2.1.1 με το πρόβλημα της 3.2.6 προκύπτει από τις αντικαταστάσεις :

$$p(z) \rightarrow 1, \quad q(z) \rightarrow k^2, \quad r(z) \rightarrow 1, \quad \lambda \rightarrow -\lambda$$

οπότε οι 3.2.10 και 3.2.11 εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι αντιστοιχούν στην εξίσωση συνέχειας και πεπερασμένης ασυνέχειας (2.1.5) της συνάρτησης Green.

Οι συνθήκες 3.2.9 και 3.2.12 προκύπτουν άμεσα από τις συνθήκες 3.2.1 και 3.2.2 του προβλήματος.

3.2.3 Η λύση του προβλήματος

Θα δείξουμε τώρα το ακόλουθο θεώρημα :

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $G_1(r, r_0, \lambda)$ και $G_2(z, z_0, \lambda)$ συναρτήσεις Green που αποτελούν λύσεις των προβλημάτων Π1α και Π1β αντίστοιχα. Τότε η λύση του προβλήματος Π1, προκύπτει μέσω των G_1 και G_2 ως εξής:

$$p(r, r_0, z, z_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} G_1(r, r_0, \lambda) G_2(z, z_0, \lambda) d\lambda \quad (3.2.13)$$

όπου C_λ είναι κατάλληλη καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο που λαμβάνεται με θετική φορά.

Απόδειξη

Γνωρίζουμε από την αντιστοιχία των προβλημάτων Π1α και Π1β με το πρόβλημα της παραγράφου 2.2 ότι ισχύει :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} G_1(r, r_0, \lambda) d\lambda = -\frac{\delta(r - r_0)}{2\pi r} \quad (3.2.14)$$

και

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} G_2(z, z_0, \lambda) d\lambda = \delta(z - z_0) \quad (3.2.15)$$

Αντικαθιστούμε την έκφραση της p από την 3.2.13 στην 3.2.1 και παίρνουμε :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} \frac{d^2 G_1}{dr^2} G_2 d\lambda - \frac{1}{2\pi i r} \int_{C_\lambda} \frac{dG_1}{dr} G_2 d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} G_1 \frac{d^2 G_2}{dz^2} d\lambda \\
&- \frac{k^2}{2\pi i} \int_{C_\lambda} G_1 G_2 d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} \left\{ \frac{d^2 G_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG_1}{dr} \right\} G_2 d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} G_1 \frac{d^2 G_2}{dz^2} d\lambda - \frac{k^2}{2\pi i} \int_{C_\lambda} G_1 G_2 d\lambda = \\
&- \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} \left\{ -\lambda G_1 - \frac{1}{2\pi r} \delta(r-r_0) \right\} G_2 d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} G_1 \left\{ -k^2 G_2 + \lambda G_2 - \delta(z-z_0) \right\} d\lambda \\
&- \frac{k^2}{2\pi i} \int_{C_\lambda} G_1 G_2 d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} \lambda G_1 G_2 d\lambda + \frac{1}{4\pi^2 i r} \delta(r-r_0) \int_{C_\lambda} G_2 d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} k^2 G_1 G_2 d\lambda \\
&- \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\lambda} \lambda G_1 G_2 d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \delta(z-z_0) \int_{C_\lambda} G_1 d\lambda - \frac{k^2}{2\pi i} \int_{C_\lambda} G_1 G_2 d\lambda \\
&= \frac{1}{4\pi^2 i r} \delta(r-r_0) \int_{C_\lambda} G_2 d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \delta(z-z_0) \int_{C_\lambda} G_1 d\lambda
\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Θα πρέπει τώρα να επιλέξουμε την καμπύλη ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο

Επιλογή 1. Θεωρούμε ότι η C_λ είναι η καμπύλη C_r^+ που περιλαμβάνει τα ιδιόμορφα σημεία της G_1 αλλά όχι της G_2 . Η φορά είναι θετική. Οι 3.2.14 και 3.2.15 θα μας δώσουν :

$$\frac{1}{4\pi^2 i r} \delta(r-r_0) \int_{C_r^+} G_2 d\lambda = 0 \tag{3.2.17}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \delta(z-z_0) \int_{C_r^+} G_1 d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \delta(z-z_0) \cdot \frac{\delta(r-r_0)}{2\pi r} \cdot 2\pi i = -\frac{1}{2\pi r} \delta(z-z_0) \delta(r-r_0) \tag{3.2.18}$$

Αποδείξαμε επομένως ότι η αντικατάσταση της p από την 3.2.13 στην πεδιακή εξίσωση δίνει τη σωστή διέγερση και επομένως αποτελεί λύση του προβλήματος.

Επιλογή 2. Θεωρούμε ότι η C_λ είναι η καμπύλη C_z^- που περιλαμβάνει τα ιδιόμορφα σημεία της G_2 αλλά όχι της G_1 . Η φορά είναι αρνητική. Οι 3.2.14 και 3.2.15 τότε θα μας δώσουν :

$$\frac{1}{4\pi^2 i} \delta(r-r_0) \int_{C_z^-} G_2 d\lambda = \frac{1}{4\pi^2 i r} \delta(r-r_0) \cdot \delta(z-z_0) \cdot 2\pi i = -\frac{1}{2\pi r} \delta(z-z_0) \delta(r-r_0) \tag{3.2.19}$$

$$\frac{1}{4\pi^2 i r} \delta(r-r_0) \int_{C_r^+} G_2 d\lambda = 0 \tag{3.2.20}$$

Επομένως και στην επιλογή αυτή της C_λ καταλήξαμε στο ίδιο αποτέλεσμα. Η επιλογή της καμπύλης C_z^- ή C_r^+ εξαρτάται από την ευκολία χειρισμού της λύσης.

3.2.4. Υπολογισμός των συναρτήσεων G_1 και G_2

Είναι αυτονόητο ότι το επόμενο βήμα στην επίλυση του προβλήματος Π1 είναι ο υπολογισμός των συναρτήσεων G_1 και G_2

I Η συνάρτηση G_1

Η G_1 προκύπτει ως λύση της 3.2.5 . Για να υπολογίσουμε την G_1 μπορούμε να λύσουμε την 3.2.5 για $r>0$, οπότε δεν θα έχουμε τον μη ομογενή όρο , και να επιβάλουμε στη συνέχεια τη σωστή ιδιομορφία μέσω της 3.2.7 .

Η 3.2.5 στην ομογενή της μορφή είναι μία εξίσωση Bessel μηδενικής τάξης . Η γενική της λύση εκφρασμένη μέσω συναρτήσεων Hankel είναι :

$$G_1 = AH_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r) + BH_0^{(2)}(\sqrt{\lambda}r) \quad (3.2.21)$$

Η οριακή συνθήκη 3.2.8 επιβάλλει κύματα που αποκλίνουν από την πηγή σε μεγάλες αποστάσεις. Δεδομένου ότι θεωρώντας αρμονικά κύματα με χρονική εξάρτηση $e^{-i\omega t}$ η συνάρτηση Hankel δευτέρου είδους αντιπροσωπεύει συγκλίνοντα κύματα, διαπιστώνουμε μέσω της 3.2.8 ότι $B=0$. Έτσι για $r>0$ έχουμε :

$$G_1 = AH_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r) \quad (3.2.22)$$

Για μεγάλα ορίσματα από την 1.2.36 παίρνουμε:

$$H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi r \sqrt{\lambda}}} e^{i(\sqrt{\lambda}r - \pi/4)} \quad (3.2.23)$$

Επόμενο βήμα είναι η εφαρμογή της συνθήκης 3.2.7. Για την εφαρμογή της θα χρειαστούμε τις αναδρομικές σχέσεις 1.2.39 . Παίρνουμε διαδοχικά :

$$\varepsilon \frac{dG_1}{dr}(\varepsilon) = A\varepsilon\sqrt{\lambda} H_0^{(1)'}(\sqrt{\lambda}\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi} \quad (3.2.24)$$

Χρησιμοποιώντας την 1.2.33 έχουμε :

$$A\varepsilon\sqrt{\lambda} \{J_0'(\sqrt{\lambda}\varepsilon) + iN_0'(\sqrt{\lambda}\varepsilon)\} = -\frac{1}{2\pi} \quad (3.2.25)$$

$$-A\varepsilon\sqrt{\lambda} \{J_1(\sqrt{\lambda}\varepsilon) + iN_1(\sqrt{\lambda}\varepsilon)\} = -\frac{1}{2\pi} \quad (3.2.26)$$

Αλλά όταν $\varepsilon \rightarrow 0$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ασυμπτωτικές εκφράσεις 1.2.35 και να πάρουμε :

$$J_1(\sqrt{\lambda}\varepsilon) \approx \frac{\sqrt{\lambda}\varepsilon}{2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad (3.2.27)$$

$$N_1(\sqrt{\lambda} \varepsilon) \approx -\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda} \varepsilon} \quad (3.2.28)$$

οπότε

$$-A\varepsilon\sqrt{\lambda} i\left(-\frac{2}{\pi\sqrt{\lambda}\varepsilon}\right) = -\frac{1}{2\pi} \Rightarrow A = \frac{i}{4} \quad (3.2.29)$$

Επομένως παίρνουμε τη σωστή ιδιομορφία για τη τιμή αυτή του A και :

$$\boxed{G_1(r, \lambda) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda} r)} \quad (3.2.30)$$

II Η συνάρτηση G_2

Παρατηρούμε και εδώ ότι η 3.2.6 μεταπίπτει σε ομογενή για $z \neq z_0$. Έτσι μπορούμε να λύσουμε την ομογενή της 3.2.6 για $0 \leq z < z_0$ και για $z_0 < z \leq h$ και να απαιτήσουμε στο όριο για $z \rightarrow z_0$ την εφαρμογή των οριακών συνθηκών.

Η γενική λύση της ομογενούς 3.2. 6 για k σταθερό είναι :

$$G_2(z, z_0, \lambda) = A_2(z_0, \lambda)e^{i\gamma z} + B_2(z_0, \lambda)e^{-i\gamma z}, \quad 0 \leq z < z_0 \quad (3.2.31)$$

$$= A_3(z_0, \lambda)e^{i\gamma z} + B_3(z_0, \lambda)e^{-i\gamma z}, \quad z_0 \leq z < h \quad (3.2.32)$$

όπου

$$k^2 = \gamma^2 + \lambda \quad (3.2.33)$$

Εφαρμόζουμε τις οριακές συνθήκες :

$$(3.2.9) \Rightarrow A_2 + B_2 = 0 \quad (3.2.34)$$

$$(3.2.10) \Rightarrow A_2 e^{i\gamma z_0} + B_2 e^{-i\gamma z_0} = A_3 e^{i\gamma z_0} + B_3 e^{-i\gamma z_0} \quad (3.2.35)$$

$$(3.2.11) \Rightarrow i\gamma \{A_3 e^{i\gamma z_0} - B_3 e^{-i\gamma z_0} - A_2 e^{i\gamma z_0} + B_2 e^{-i\gamma z_0}\} = -1 \quad (3.2.36)$$

$$(3.2.12) \Rightarrow i\gamma A_3 e^{i\gamma h} - i\gamma B_3 e^{-i\gamma h} = 0 \quad (3.2.37)$$

Το ανωτέρω σύστημα επιλύεται εύκολα δίδοντας :

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{i}{2\gamma} \frac{\cos \gamma(z_0 - h)}{\cos \gamma h} & B_2 &= \frac{i}{2\gamma} \frac{\cos \gamma(z_0 - h)}{\cos \gamma h} \\ A_3 &= \frac{e^{-i\gamma h}}{2\gamma} \frac{\sin \gamma z_0}{\cos \gamma h} & B_3 &= \frac{e^{i\gamma h}}{2\gamma} \frac{\sin \gamma z_0}{\cos \gamma h} \end{aligned}$$

Η αντικατάσταση των συντελεστών αυτών στις 3.2.31, 3.2.32 δίδει :

$$G_2(z, z_0, \lambda) = \frac{\cos \gamma(z_0 - h)}{\gamma \cos \gamma h} \sin \gamma z, \quad 0 \leq z \leq z_0 \quad (3.2.38)$$

$$G_2(z, z_0, \lambda) = \frac{\sin \gamma z_0}{\gamma \cos \gamma h} \cos \gamma(z - h), \quad z_0 \leq z \leq h \quad (3.2.39)$$

Επομένως :

$$p(r, z, z_0) = -\frac{1}{8\pi} \int_{C_\lambda} \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{\cos \gamma(z_0 - h)}{\cos \gamma h} \right\} \sin \gamma z H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda} r) d\lambda, \quad 0 \leq z \leq z_0 \quad (3.2.40)$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \int_{C_\lambda} \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{\sin \gamma z_0}{\cos \gamma h} \right\} \cos \gamma(z - h) H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda} r) d\lambda, \quad z_0 \leq z \leq h \quad (3.2.41)$$

Θα προσπαθήσουμε τώρα να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα. Η συνάρτηση στο ολοκλήρωμα είναι παντού αναλυτική εκτός από τα σημεία για τα οποία $\cos \gamma h = 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ : Οι τιμές του γ είναι πραγματικές

Απόδειξη : Έστω $\gamma = \gamma' + i\gamma''$. Τότε θα είχαμε :

$$\cos \gamma h = \cos \gamma' h \cos \gamma'' h - \sin \gamma' h \sinh \gamma'' h = 0 \quad (3.2.42)$$

Αφού $\sinh \gamma'' h \neq 0$ θα πρέπει $\sin \gamma' h = 0$, αλλά τότε από την 3.2.42 θα πρέπει και $\cos \gamma' h = 0$, άτοπο σε συνδυασμό με το παραπάνω αποτέλεσμα. Επομένως $\gamma'' = 0$ □

Η εξίσωση

$$\cos \gamma h = 0 \quad (3.2.43)$$

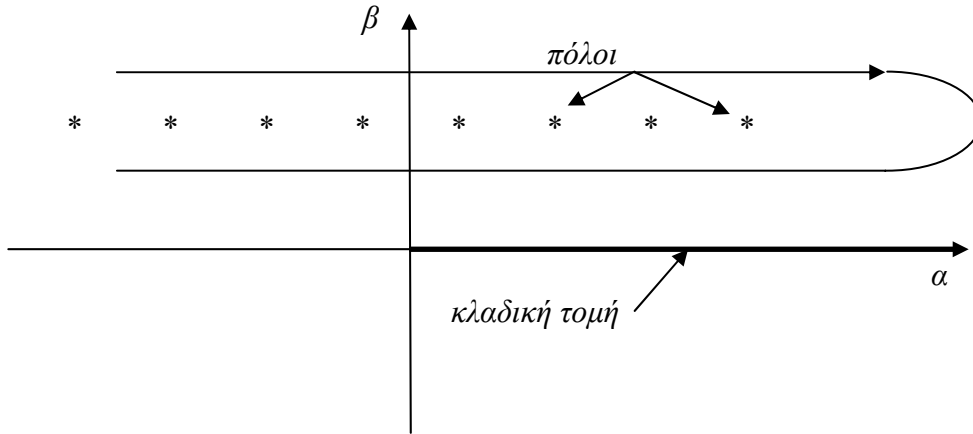
ονομάζεται "**χαρακτηριστική εξίσωση**" του κυματοδηγού.

Οι λύσεις της είναι αριθμοί γ_n για τους οποίους ισχύει :

$$\gamma_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2h}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2.44)$$

$$\lambda_n = k^2 - \left[(2n - 1) \frac{\pi}{2h} \right]^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2.45)$$

Θεωρώντας ότι εργαζόμαστε στο μιγαδικό επίπεδο, οι επιτρεπτές τιμές του λ μπορεί να θεωρηθούν πόλοι της προς ολοκλήρωση συνάρτησης (Υπενθυμίζεται πάντως ότι βρίσκονται στον πραγματικό άξονα) .



Σχήμα 3.3 Η κλαδική τομή και οι μετακινημένοι πόλοι της χαρακτηριστικής συνάρτησης,

Παρατηρούμε επίσης ότι η προς ολοκλήρωση συνάρτηση έχει ένα κλαδικό σημείο στο $\lambda=0$ (στο όρισμα της συνάρτησης Hankel έχουμε $\sqrt{\lambda}$). Έτσι, οι συναρτήσεις p , δεν είναι αναλυτικές σε όλο το μιγαδικό επίπεδο. Μια κλαδική τομή που περνά από το σημείο $\lambda=0$ και δικαιολογείται από την επ'άπειρον συμπεριφορά της λύσης μας, ορίζεται από την απαίτηση $\text{Im}(\sqrt{\lambda}) = 0$ και $\lambda > 0$ (σχήμα 3.3).

Με δεδομένο ότι και οι πόλοι βρίσκονται στον πραγματικό άξονα μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα με μικρή μετατόπιση των πόλων στο φανταστικό ημιεπίπεδο και στη συνέχεια να πάρουμε ως λύση το όριο του ολοκληρώματος 3.2.40-41, όταν το φανταστικό μέρος των πόλων τείνει στο 0.

Υπενθυμίζεται ότι σύμφωνα με τη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων, οι πόλοι

b_1 μιας συνάρτησης $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ προκύπτουν από τη σχέση

$$b_1 = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Με αναφορά στην περίπτωση μας, η συνάρτηση $q(z)$ είναι η $\cos y h$. Επομένως

$$q'(z_0) = \frac{\partial}{\partial \lambda} (\cos y h)_{\lambda=\lambda_n}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων του Cauchy για την καμπύλη C_z^- και για $\text{Im}(\lambda_n) \rightarrow 0$ παίρνουμε :

$$\begin{aligned} p(r, z, z_0) &= \frac{1}{8\pi} \int_{C_z^-} \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{\cos \gamma(z_0 - h)}{\cos y h} \right\} \sin \gamma z H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda} r) d\lambda = \\ &= \frac{i}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \gamma_n(z_0 - h) \sin \gamma_n z H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_n} r)}{\gamma_n \frac{\partial}{\partial \lambda} (\cos y h)_{\lambda=\lambda_n}} \end{aligned} \quad (3.2.46)$$

Ο υπολογισμός της ως προς λ παραγώγου της $\cos \gamma h$ προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned} \gamma^2 = k^2 - \lambda &\Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \cos \gamma h \right]_{\lambda=\lambda_n} = - \left[h(\sin \gamma h) \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_n} \\ &= - \left[h(\sin \gamma h) \frac{\partial}{\partial \lambda} (k^2 - \lambda)^{1/2} \right]_{\lambda=\lambda_n} = h \frac{\sin \gamma_n h}{2\gamma_n} = \frac{h(-1)^{n+1}}{2\gamma_n}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

δεδομένου ότι $\cos \gamma_n h = 0$. Παίρνουμε επίσης :

$$\cos \gamma_n (z_0 - h) = \cos \gamma_n z_0 \cos \gamma_n h + \sin \gamma_n z_0 \sin \gamma_n h = (-1)^{n+1} \sin \gamma_n z_0 \quad (3.2.48)$$

και αντικαθιστώντας στην 3.2.46 παίρνουμε :

$$p(r, z, z_0) = \frac{i}{2h} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \gamma_n z_0 \sin \gamma_n z H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_n} r) \quad (3.2.49)$$

ενδιαφέρον παρουσιάζει η ασυμπτωτική έκφραση για $r \gg$ που είναι :

$$p(r, z, z_0) = \frac{i}{\sqrt{2\pi h}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \gamma_n z_0 \sin \gamma_n z \frac{\exp(i(\sqrt{\lambda_n} r + \frac{\pi}{4}))}{\sqrt{\sqrt{\lambda_n} r}} \quad (3.2.50)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ : Χρησιμοποιήσαμε την έκφραση της πίεσης για $0 \leq z \leq z_0$. Εντελώς αντίστοιχα καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα, χρησιμοποιώντας την έκφραση της πίεσης για $z_0 \leq z \leq h$

3.2.5. Ανάπτυγμα σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων

Ας επανέρθουμε στην εξίσωση που διέπει το πρόβλημά μας σε κυλινδρικές συντεταγμένες :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(z - z_0) \quad (3.2.51)$$

Υπενθυμίζεται ότι η συνάρτηση $p(r, z)$ ορίζεται στο διάστημα $[0, h]$ και είναι παντού συνεχής. Σύμφωνα με τα θεωρήματα αναπαράστασης μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά εάν οριστεί κατάλληλα μια ομάδα ιδιοσυναρτήσεων ενός προβλήματος Sturm-Liouville (βάση) στο ίδιο διάστημα. Εάν μάλιστα εξασφαλισθεί η σύμπτωση των οριακών συνθηκών των δύο προβλημάτων, τότε η σειρά θα συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα. Ποια όμως είναι η εν λόγω ομάδα ;

Θεωρούμε την ομογενή μορφή της 3.2.51. Κατά τα γνωστά μπορούμε να κάνουμε χωρισμό μεταβλητών για την δεδομένη γεωμετρία του προβλήματος $p(r, z) = \Phi(r)u(z)$ και να πάρουμε το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} + \lambda\Phi = 0 \quad (3.2.52)$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} + (k^2 - \lambda)u = 0 \quad (3.2.53)$$

όπου λ είναι η σταθερά χωρισμού. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε και την αντικατάσταση $k^2 - \lambda = \gamma^2$.

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα που ορίζεται από την 3.2.53, με οριακές συνθήκες όπως αυτές προκύπτουν από το αρχικό (μη ομογενές) πρόβλημα για την συνάρτηση $p(r,z)$.

$$u(0) = 0 \quad (3.2.54)$$

$$\frac{du}{dz}(h) = 0 \quad (3.2.55)$$

Το πρόβλημα μας θυμίζει ένα κανονικό πρόβλημα Sturm-Liouville² και συνεπώς ορίζουμε μία ομάδα διακριτών ιδιοσυναρτήσεων $u_n(z)$ με αντίστοιχες ιδιοτιμές λ_n , που είναι ορθογώνιες στο διάστημα $[0,h]$, μπορούν να επιλεγούν ώστε να είναι ορθοκανονικές και επί πλέον αποτελούν βάση στο $[0,h]$. Οι ιδιοσυναρτήσεις αυτές υπολογίζονται ως εξής :

Η γενική λύση της 3.2.53 είναι

$$u(z) = Ae^{i\gamma z} + Be^{-i\gamma z} \quad (3.2.56)$$

Χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες παίρνουμε :

Από την 3.2.54

$$A+B=0 \quad (3.2.57)$$

Από την 3.2.55

$$i\gamma Ae^{i\gamma h} - i\gamma Be^{-i\gamma h} = 0 \quad (3.2.58)$$

Το σύστημα των εξισώσεων 3.2.56 και 3.2.57 για να έχει μη μηδενική λύση θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών του να είναι 0. Παίρνουμε έτσι την χαρακτηριστική εξίσωση του κυματοδηγού που είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ i\gamma e^{i\gamma h} & -i\gamma e^{-i\gamma h} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.2.59)$$

$$\text{ή} \quad -i\gamma[e^{-i\gamma h} + e^{i\gamma h}] = 0 \quad (3.2.59\alpha)$$

² ΑΣΚΗΣΗ : Αποδείξτε ότι το πρόβλημα που ορίζεται από την εξίσωση 3.2.53 και τις οριακές συνθήκες 3.2.54 και 3.2.55 είναι ένα κανονικό πρόβλημα Sturm-Liouville.

ή τελικά cos γh = 0 (3.2.60)

απ' όπου προκύπτουν οι επιτρεπτές τιμές για το γ ως εξής :

$$\gamma h = (2n-1) \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad \gamma = \frac{(2n-1) \frac{\pi}{2}}{h} \quad n=1,2,\dots \quad (3.2.61)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση ανάμεσα στα γ και λ και τον δείκτη n για κάθε επιτρεπτή τιμή παίρνομε

$$\lambda_n = k^2 - \gamma_n^2 = k^2 - \left[\frac{(2n-1) \pi}{h} \frac{\pi}{2} \right]^2 \quad (3.2.62)$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις προκύπτουν εύκολα ως

$$\begin{aligned} u_n(z) &= Ae^{i\gamma_n z} + Be^{-i\gamma_n z} = A(e^{i\gamma_n z} - e^{-i\gamma_n z}) = \\ &= A(\cos \gamma_n z + i \sin \gamma_n z - \cos \gamma_n z + i \sin \gamma_n z) = \\ &= 2Ai \sin \gamma_n z \end{aligned} \quad (3.2.63)$$

Όπως γνωρίζομε, η ομάδα των ιδιοσυναρτήσεων μπορεί να αποτελέσει ένα ορθοκανονικό σύστημα με κατάλληλη επιλογή του συντελεστή A. Έτσι παίρνομε

$$\int_0^h u_n^2(z) dz = 1 \quad (3.2.64)$$

και χρησιμοποιώντας την 3.2.63 και τριγωνομετρικές ιδιότητες καταλήγομε στην

$$2Ai = \sqrt{\frac{2}{h}} \quad (3.2.65)$$

οπότε οι ιδιοσυναρτήσεις γράφονται συναρτήσεις των ιδιοτιμών ως

$$u_n(z) = \sqrt{\frac{2}{h}} \sin \left[(k^2 - \lambda_n)^{1/2} z \right] \quad (3.2.66)$$

Σημειώνομε ότι πολλές φορές στην βιβλιογραφία ως ιδιοτιμή εμφανίζεται το μέγεθος $\kappa_n = \sqrt{\lambda_n}$.

Σύμφωνα τώρα με το δεύτερο θεώρημα αναπαράστασης, η συνάρτηση p(r,z) μπορεί να αναπτυχθεί για κάθε θέση r σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων μέσω των u_n(z). Έτσι γράφομε :

$$p(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r) u_n(z) \quad (3.2.67)$$

Απομένει να υπολογίσουμε τους συντελεστές A_n .

Αντικαθιστώντας την $p(r,z)$ από την 3.2.67 στην 3.2.51 και παραλείποντας τα ορίσματα για λόγους ευκολίας παίρνουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n A_n'' + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} u_n A_n' + \sum_{n=1}^{\infty} u_n'' A_n + k^2 \sum_{n=1}^{\infty} u_n A_n = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(z - z_0) \quad (3.2.68)$$

όπου ' δηλώνει παραγώγιση ως προς r ή z ανάλογα με το όρισμα.

Χρησιμοποιώντας την 3.2.53 έχουμε $u_n'' = (\lambda_n - k^2)u_n$ και αντικαθιστώντας στην 3.2.68 καταλήγουμε στην

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \left\{ A_n'' + \frac{1}{r} A_n' + \lambda_n A_n \right\} = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(z - z_0) \quad (3.2.69)$$

Στο σημείο αυτό αξιολογούμε την ορθοκανονικότητα των ιδιοσυναρτήσεων και αφού πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη της 3.2.69 με $u_m(z)$, ολοκληρώνουμε από 0 έως h . Έτσι παίρνουμε

$$\int_0^h \sum_{n=1}^{\infty} u_n u_m \left\{ A_n'' + \frac{1}{r} A_n' + \lambda_n A_n \right\} dz = -\frac{1}{2\pi r} \int_0^h \delta(r) \delta(z - z_0) u_m dz \quad (3.2.70)$$

Λόγω της ορθογωνιότητας των ιδιοσυναρτήσεων παίρνουμε στη συνέχεια

$$A_m'' + \frac{1}{r} A_m' + \lambda_m A_m = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) u_m(z_0) \quad (3.2.71)$$

Θεωρώντας ότι $u_m(z_0) \neq 0$ παίρνουμε

$$\frac{d^2}{dr^2} \left[\frac{A_m}{u_m(z_0)} \right] + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{A_m}{u_m(z_0)} \right] + \lambda_m \left[\frac{A_m}{u_m(z_0)} \right] = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \quad (3.2.72)$$

Η εξίσωση 3.2.72 μας παραπέμπει άμεσα στην 3.2.5. Προσεκτική ανάλυση της 3.2.72 σε συνδυασμό με τις οριακές συνθήκες του προβλήματος μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση $\frac{A_m}{u_m(z_0)}$ έχει την ίδια λύση με την G_I της 3.2.5 που δίδεται από την 3.2.30. Έτσι παίρνουμε

$$\frac{A_m}{u_m(z_0)} = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_m} r) \quad (3.2.73)$$

$$\text{ή} \quad A_m = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_m} r) u_m(z_0) \quad (3.2.74)$$

Επανερχόμενοι στην 3.2.67 και αντικαθιστώντας τον δείκτη n με m έχουμε

$$p(r, z) = \frac{i}{4} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z_0) u_n(z) H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_n} r) \quad (3.2.75)$$

τέλος χρησιμοποιώντας την έκφραση της ιδιοσυνάρτησης μέσω της 3.2.66 έχουμε

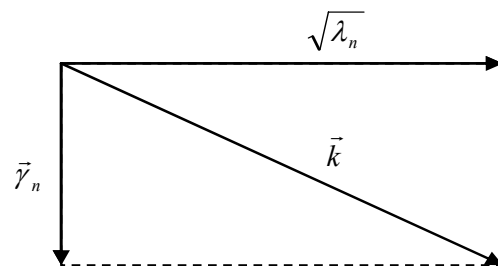
$$p(r, z) = \frac{i}{2h} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\gamma_n z_0) \sin(\gamma_n z) H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_n} r) \quad (3.2.76)$$

Η έκφραση αυτή βέβαια είναι πανομοιότυπη με την 3.2.49 που είχε προκύψει από τον υπολογισμό των συναρτήσεων G_1 και G_2 του προβλήματος. Ετσι, βλέπουμε την πλήρη αντιστοιχία των μεθόδων αναπτύγματος σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων και της ολοκληρωτικής έκφρασης της λύσης μέσω συναρτήσεων Green. Οι ιδιοτιμές λ_n αντιστοιχούν στους πόλους της G_2 . Αξίζει πάντως να σημειωθεί ότι λόγω της ύπαρξης της πηγής, δεν είναι δυνατόν να ξεφύγουμε από τον υπολογισμό μιας συνάρτησης Green (πρβλ 3.2.72).

3.2.6. Κανονικές-Μη κανονικές ιδιοτιμές

Δεδομένου ότι η ιδιοτιμή λ_n εμφανίζεται ως υπόριζος ποσότητα, παρουσιάζει ενδιαφέρον να δούμε τι γίνεται στη λύση μας, όταν $\lambda_n < 0$. Σημειώνουμε ότι για τις οριακές συνθήκες του προβλήματος, οι ιδιοτιμές λ_n μπορεί να είναι αρνητικές, και η αντιστοιχία τους με τους πόλους της G_2 μας παραπέμπει στο σχήμα 3.3 όπου ήδη έχει σημειωθεί (χωρίς άλλη αναφορά) η δυνατότητα των λ_n να έχουν αρνητικές τιμές. Πριν προχωρήσουμε στη σχετική μελέτη, ας δούμε τη φυσική σημασία των ιδιοτιμών.

Ο αριθμός κύματος k μπορεί να θεωρηθεί διανυσματικό μέγεθος με διεύθυνση κάθετη στο μέτωπο ενός κύματος που διαδίδεται σε κάποιο ακουστικό μέσον. Οι αριθμοί γ_n και $\sqrt{\lambda_n}$ είναι τα μέτρα των κάθετων και οριζόντιων συνιστωσών του k . Η αναπαράσταση 3.2.76 μπορεί να θεωρηθεί ότι ισοδυναμεί με σύνθεση επίπεδων κυμάτων που χαρακτηρίζονται με οριζόντιους αριθμούς κύματος μέτρου $\sqrt{\lambda_n}$. Σημειώνεται ότι το μέτρο του $k = (\omega / c)$ παραμένει σταθερό, όχι όμως και η φορά του που μεταβάλλεται ανάλογα με το μέτρο του $\sqrt{\lambda_n}$. Για να έχουμε όμως κύμα, θα πρέπει $|\gamma_n| < |k|$ για να έχει νόημα η ανάλυση του \vec{k} σε συντεταγμένες, όπως φαίνεται από το σχήμα 3.4 οπότε $\sqrt{\lambda_n}$ πρέπει να είναι πραγματικός αριθμός και επομένως $\lambda_n > 0$.



Σχήμα 3.4 Ο αριθμός κύματος και οι συνιστώσες του

Η περίπτωση λοιπόν που αντιστοιχεί σε $\lambda_n > 0$ ορίζει μία ομάδα ιδιοσυναρτήσεων που ονομάζονται κανονικές (normal) σε αντίθεση με τις ιδιοσυναρτήσεις που ορίζονται για $\lambda_n < 0$ που ονομάζονται μη κανονικές (evanescent). Οι μη κανονικές ιδιοσυναρτήσεις συνεισφέρουν βέβαια στη λύση του προβλήματος που δεν μπορεί να είναι πλήρης παρά μόνο με τη συμμετοχή τους, ωστόσο από τη φυσική πλευρά δεν δίδουν συνεισφορά στο κυματικό φαινόμενο.

Μία πρώτη εικόνα της μη κυματικής συμπεριφοράς της λύσης όταν $\lambda_n < 0$ παίρναμε χρησιμοποιώντας τις ασυμπτωτικές εκφράσεις της συνάρτησης Hankel για μεγάλα ορίσματα. Η έκφραση αυτή σε συνδυασμό με την αναπαράσταση 3.2.76 μας δίνει:

$$p(r, z) = \frac{i}{h\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\gamma_n z_0) \sin(\gamma_n z) \frac{e^{i\sqrt{\lambda_n}r + i\pi/4}}{\sqrt{\sqrt{\lambda_n}r}} \quad (3.2.77)$$

Η κυματική συνεισφορά των όρων της 3.2.77 ως προς την απόσταση r φαίνεται για $\lambda_n > 0$ από την εκθετική συνάρτηση $e^{i\sqrt{\lambda_n}r}$ που αντιπροσωπεύει κύμα. Ένα όμως $\lambda_n < 0$ τότε $\sqrt{\lambda_n} = ib_n$, $b_n \in \mathfrak{R}^+$ και η εκθετική συνάρτηση $e^{i\sqrt{\lambda_n}r}$ δεν αντιπροσωπεύει πλέον κύμα, μια και έχουμε:

$$e^{i\sqrt{\lambda_n}r} = e^{-b_n r} \quad (3.2.78)$$

Οι όροι τάξης n στην 3.2.77 δίνουν λύση που αποσβέννεται εκθετικά με την απόσταση r , και επομένως συνεισφέρουν σημαντικά μόνο για μικρά r . Για μεγάλα r , μια καλή προσέγγιση της λύσης είναι μία αναπαράσταση της 3.2.77 μόνο πάνω στις τάξεις n για τις οποίες $\sqrt{\lambda_n} \in \mathfrak{R}$. Το ερώτημα που τίθεται επομένως είναι κατά πόσον υπάρχει η πιθανότητα να έχουμε λύση που να μην αντιπροσωπεύει κυματικό φαινόμενο. Αυτό θα συμβεί εάν:

$$\lambda_n = k^2 - \left[\frac{(2n-1)\pi}{h} \right]^2 < 0 \quad \forall n \in (1, 2, \dots) \quad (3.2.79)$$

Εάν η ανωτέρω ανισότητα ισχύει για $n=1$, θα ισχύει προφανώς και για κάθε n οπότε παίρνομε ως συνθήκη για την ύπαρξη μη κυματικής λύσης :

$$k - \frac{\pi}{2h} < 0 \Rightarrow k (= \frac{\omega}{c}) < \frac{\pi}{2h} \quad (3.2.80)$$

Η ανισότητα αυτή γράφεται :

$$\frac{2\pi f}{c} < \frac{\pi}{2h} \Rightarrow f < \frac{c}{4h} \quad (3.2.81)$$

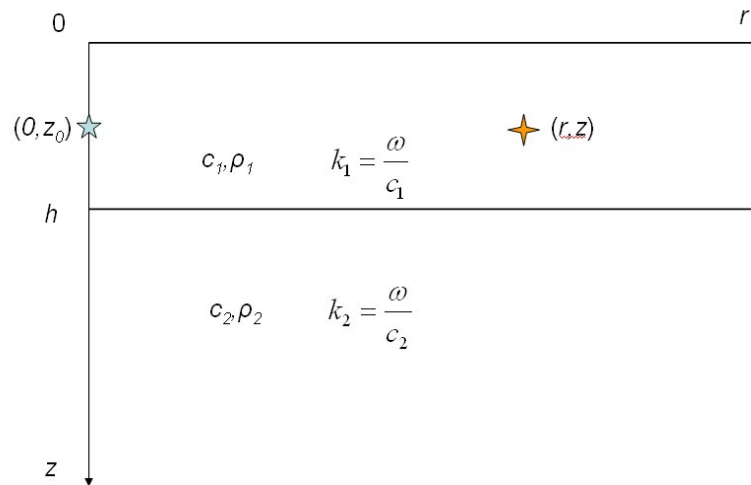
Επομένως, για συχνότητες μικρότερες από $c/4h$ δεν υπάρχει κυματική διάδοση. Η συχνότητα αυτή ονομάζεται συχνότητα αποκοπής (cut-off frequency). Συχνότητα

αποκοπής ορίζεται και για κάθε ιδιομορφή χωριστά και προκύπτει εάν στην 3.2.79 η τάξη n πάρει την αντίστοιχη τιμή.

Τονίζεται και πάλι ότι η συχνότητα αποκοπής είναι το κάτω όριο της συχνότητας για την ύπαρξη κυματικού φαινομένου. Δεν πρέπει να διαφεύγει της προσοχής ότι η αναπαράσταση σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων ισχύει πάντα, ανεξάρτητα από τις παραμέτρους του προβλήματος.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Δεν θα μας απασχολήσει η ειδική περίπτωση κατά την οποία $\lambda_n=0$.

3.3 Ο κυματοδηγός PEKERIS - Πρόβλημα Π2



Σχήμα 3.5 Η γεωμετρία του προβλήματος της ακουστικής διάδοσης για το περιβάλλον PEKERIS

Θεωρείστε το περιβάλλον που ορίζεται κατά το σχήμα 3.5. Το πεδίο ορισμού της ακουστικής πίεσης $p(r,z)$ κατά τον άξονα των z εκτείνεται μέχρι το ∞ . Επομένως η p ορίζεται τώρα στο διάστημα $[0, \infty) \times [0, \infty)$.

Η ύπαρξη της διεπιφάνειας στη θέση $z=h$ μας επιβάλλει την αναζήτηση της κατάλληλης συνθήκης που θα καταστήσει το πρόβλημα καλώς τεθειμένο. Την απάντηση θα τη δώσει η φυσική του προβλήματος που επιβάλλει :

- Συνέχεια της πίεσης
- Συνέχεια της κάθετης παραγώγου της ταχύτητας των στοιχειωδών σωματιδίων του μέσου \vec{u} .

Ανατρέχοντας στη θεμελίωση της κυματικής εξίσωσης και χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς του πρώτου κεφαλαίου θα διαπιστώσουμε ότι ισχύει (βλ Boyles) :

$$-\nabla p_1 = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_1 \quad (3.3.1)$$

Θεωρώντας την ως προς z συνιστώσα της ταχύτητας ($\vec{u}_1 = (u_{1x}, u_{1y}, u_{1z})$) έχουμε :

$$-\frac{\partial p_1}{\partial z} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} u_{1z} \quad (3.3.2)$$

Στην περίπτωση της αρμονικής λύσης ($\vec{u}_1 = \vec{u}e^{-i\omega t}$, $p_1 = pe^{-i\omega t}$) και $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, παίρνουμε:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = -i\omega\rho_0 u_z \quad (3.3.3)$$

ή

$$u_z = \frac{1}{i\omega\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.3.4)$$

Δεδομένου ότι $i\omega$ είναι σταθερά η συνέχεια της ως προς z συνιστώσας της ταχύτητας, ισοδυναμεί με συνέχεια του όρου $\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z}$

Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα στο προαναφερθέν περιβάλλον μπορούμε να θεωρήσουμε την γραμμικοποιημένη ακουστική εξίσωση στη ειδική περίπτωση που η πυκνότητα ρ_0 μεταβάλλεται με το βάθος. Η κυματική εξίσωση τότε είναι:

$$\nabla^2 p_1 - \frac{1}{\rho_0} \nabla \rho_0 \nabla p_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0 \quad (3.3.5)$$

Για αρμονική λύση $p_1 = p e^{-i\omega t}$ η εξίσωση γίνεται:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{\rho_0} \nabla \rho_0 \nabla p + k^2 p = 0 \quad (3.3.6)$$

και στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} + k^2 p = 0 \quad (3.3.7)$$

όταν $\rho_0 = \rho(z)$ όπως στο πρόβλημά μας (αναφερόμαστε στην πυκνότητα με την αδιατάραχτη τιμή της).

Βέβαια εδώ έχουμε:

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_1 & \text{για } 0 \leq z \leq h \\ \rho_2 & \text{για } z > h \end{cases}$$

Αντίστοιχα ορίζουμε την $p(z)$:

$$p(z) = \begin{cases} p^{(1)} & \text{για } 0 \leq z \leq h \\ p^{(2)} & \text{για } z > h \end{cases}$$

Προσοχή : Να μην γίνει σύγχυση στον συμβολισμό της ακουστικής πίεσης όπως ορίζεται στο πρώτο στρώμα (νερό) με την ακουστική πίεση ως συνάρτηση του χώρου και χρόνου (π.χ. στην εξίσωση 3.3.1)

Για την πηγή που έχουμε θεωρήσει, η πεδιακή εξίσωση είναι :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} + k^2 p = -\delta(r)\delta(z - z_0) \quad (3.3.8)$$

με οριακές συνθήκες και συνθήκες διεπιφανειών:

$$p^{(1)}(\cdot, 0) = 0 \quad (3.3.9)$$

$$p^{(1)}(\cdot, h) = p^{(2)}(\cdot, h) \quad (3.3.10)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial z}(\cdot, h) = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial z}(\cdot, h) \quad (3.3.11)$$

και συνθήκη Sommerfeld για $r \rightarrow \infty$

Απομένει η συνθήκη για $z \rightarrow \infty$. Για να έχουμε μοναδική λύση στο πρόβλημα ζητάμε κι εδώ αποκλίνοντες κυματισμούς. Η συνθήκη αυτή (συνθήκη ακτινοβολίας) είναι αντίστοιχη με την Sommerfeld. Μπορεί ωστόσο ναδειχθεί ότι στην περίπτωση που απαιτούμε διάδοση σε μεγάλες αποστάσεις, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνθήκη:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} p^{(2)}(\cdot, z) = 0 \quad (3.3.12)$$

που επιβάλλει μηδενισμό του πεδίου στο άπειρο.

Θα επιλύσουμε το πρόβλημα αυτό (Π2) χρησιμοποιώντας ανάπτυγμα σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων:

Έστω η εξίσωση

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{du}{dz} \right) + \left(\frac{k^2(z)}{\rho(z)} - \frac{\lambda}{\rho(z)} \right) u = 0 \quad (3.3.13)$$

όπου $u(z): [0, \infty)$, με

$$u(z) = \begin{cases} u^{(1)}(z) & \text{για } 0 \leq z \leq h \\ u^{(2)}(z) & \text{για } z \geq h \end{cases}$$

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_1 & \text{για } 0 \leq z < h \\ \rho_2 & \text{για } z > h \end{cases}$$

$$k(z) = \begin{cases} \frac{\omega}{c_1} & \text{για } 0 \leq z < h \\ \frac{\omega}{c_2} & \text{για } z > h \end{cases}$$

και

$$u^{(1)}(h) = u^{(2)}(h) \quad \Sigma.1$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{du^{(1)}}{dz}(h) = \frac{1}{\rho_2} \frac{du^{(2)}}{dz}(h) \quad \Sigma.2$$

$$u^{(1)}(0) = 0 \quad \Sigma.3$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} u^{(2)}(z) = 0 \quad \Sigma.4$$

(πρόβλημα βάθους)

Με αναφορά στο πρόβλημα Sturm-Liouville μπορούμε να δείξουμε ότι το παρόν πρόβλημα είναι αντίστοιχο με ένα μη-κανονικό πρόβλημα Sturm-Liouville, και ορίζει μία ομάδα ιδιοσυναρτήσεων $u_n(z)$ που αντιστοιχεί σε ένα διακριτό φάσμα πεπερασμένων ιδιοτιμών λ_n , $n = 1, \dots, N$ και ένα συνεχές φάσμα ιδιοτιμών λ που ορίζονται στην περιοχή S .

Μία συνάρτηση που ορίζεται στο διάστημα $[0, h)$ με τμηματικά συνεχή πρώτη παράγωγο μπορεί να αναπτυχθεί με βάση τις ανωτέρω ιδιοσυναρτήσεις ως εξής:

$$f(z) = \sum_{n=1}^N A_n u_n(z, \lambda_n) + \int_S b(\lambda) u(z, \lambda) d\lambda \quad (3.3.14)$$

όπου S καλύπτει το συνεχές φάσμα των ιδιοτιμών λ . Στη συνέχεια θα δούμε πως μπορούμε να χειριστούμε το ανωτέρω αποτέλεσμα για να εκφράσουμε την πίεση $p(r, z)$ μέσω των ιδιοσυναρτήσεων που ορίζονται κατά τα ανωτέρω. Για τις ιδιότητες των $u_n(z, \lambda_n)$ και $u(z, \lambda)$ παραπέμπουμε στις 1.3.20 και 1.3.21.

3.3.1 Υπολογισμός των ιδιοσυναρτήσεων

Με βάση τη μεταβολή των παραμέτρων του προβλήματος βάθους μπορούμε να θεωρήσουμε ένα σύστημα δύο Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων της μορφής :

$$\frac{d^2 u^{(*)}}{dz^2} + (k^2 - \lambda) u^{(*)} = 0 \quad * = 1, 2 \quad (3.3.15)$$

και να ζητήσουμε εφαρμογή των συνθηκών στα όρια και τη διεπιφάνεια. Οι λύσεις του προβλήματος είναι της γενικής μορφής:

$$u^{(1)}(z) = A e^{i\gamma_1 z} + B e^{-\gamma_1 z} \quad (3.3.16)$$

όπου $\gamma_1 = \sqrt{k_1^2 - \lambda}$

$$u^{(2)}(z) = C e^{i\gamma_2(z-h)} \quad (3.3.17)$$

για αποκλίνον κύμα

όπου $\gamma_2 = \sqrt{k_2^2 - \lambda}$

Η απαίτηση του προβλήματός μας (δες 3.3.12) είναι για λύση που τείνει στο 0 για $z \rightarrow \infty$. Ο μόνος τρόπος που αυτό είναι δυνατό είναι να έχουμε $\gamma_2 = ib_2$ $b_2 \in \mathfrak{R}^+$, δηλαδή γ_2 φανταστικό. Επομένως θα πρέπει

$$k_2^2 < \lambda.$$

(Περιορισμός I)

Η συνθήκη Σ.3 μας δίνει

$$u^{(1)}(0) = A + B = 0 \Rightarrow A = -B \quad \text{και}$$

$$u^{(1)}(z) = A[e^{i\gamma_1 z} - e^{-i\gamma_1 z}] \quad (3.3.18)$$

Η συνθήκη Σ.1 μας δίνει

$$u^{(1)}(h) = u^{(2)}(h) \Rightarrow A[e^{i\gamma_1 h} - e^{-i\gamma_1 h}] = C \quad (3.3.19)$$

ενώ η συνθήκη Σ.2 επιβάλλει:

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{du^{(1)}}{dz}(h) = \frac{1}{\rho_2} \frac{du^{(2)}}{dz}(h) \Rightarrow \frac{1}{\rho_1} \gamma_1 i A [e^{i\gamma_1 h} + e^{-i\gamma_1 h}] = -\frac{1}{\rho_2} b_2 C \quad (3.3.20)$$

Οι εξισώσεις 3.3.19 και 3.3.20 ορίζουν ένα γραμμικό ομογενές σύστημα ως προς τους αγνώστους A , C . Η ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος πρέπει να είναι 0 για μη τετριμμένη λύση. Έτσι παίρνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση του κυματοδηγού, αφού αντικαταστήσουμε τις εκθετικές συναρτήσεις με τριγωνομετρικές:

από την 3.3.19 έχουμε :

$$2i \sin \gamma_1 h \cdot A - C = 0 \quad (3.3.21)$$

από την 3.3.20 έχουμε:

$$2i \gamma_1 \cos \gamma_1 h \cdot A + b_2 \frac{\rho_1}{\rho_2} C = 0 \quad (3.3.22)$$

Άρα :

$$b_2 \frac{\rho_1}{\rho_2} 2i \sin \gamma_1 h + 2i \gamma_1 \cos \gamma_1 h = 0 \quad (3.3.23)$$

$$\eta \quad \tan \gamma_1 h = -\frac{\rho_2 \gamma_1}{\rho_1 b_2} \quad (3.3.24)$$

που είναι η χαρακτηριστική εξίσωση του κυματοδηγού. Η εξίσωση αυτή θα μας δώσει τις επιτρεπτές ιδιοτιμές λ_n που συνδέονται με τα γ_1 και b_2 μέσω των σχέσεων

$$k_1^2 = \gamma_{1n}^2 + \lambda_n \quad \text{και} \quad b_{2n}^2 = \lambda_n - k_2^2$$

όπου έχουμε εισαγάγει τον δείκτη n και στα αντίστοιχα μεγέθη εκτός από την ιδιοτιμή.

Η 3.3.24 είναι μία μη γραμμική εξίσωση ως προς λ που πρέπει να λυθεί με κατάλληλη μέθοδο. Θα δούμε στη συνέχεια την μορφή της εξίσωσης γραφικά.

Κάνουμε τις αντικαταστάσεις $y = \gamma_1 h$ $b = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ $a = \omega h \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}$ και η χαρακτηριστική εξίσωση γράφεται :

$$\tan y = -\frac{by}{\sqrt{a^2 - y^2}} \quad (3.3.25)$$

Υπολογίζοντας τα y που ικανοποιούν την ανωτέρω εξίσωση, παίρνουμε και τις ιδιοτιμές λ

Για να πάρουμε μία αίσθηση της ποιοτικής συμπεριφοράς των ιδιοτιμών κατασκευάζουμε το σχήμα 3.6, όπου έχουν χαραχτεί δύο καμπύλες για την συνάρτηση $-by/\sqrt{a^2 - y^2}$ που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές συχνότητες ω και ω' . Τα σημεία τομής της καμπύλης που ορίζει η εν λόγω συνάρτηση με τις καμπύλες της $\tan y$, μας δίνουν τις επιτρεπτές τιμές της y , από όπου προκύπτουν και οι ιδιοτιμές λ . Οι επιτρεπτές τιμές του y (για y πραγματικό) είναι πεπερασμένες σε αριθμό.

Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι:

$$u_n^{(1)}(z) = 2Ai \sin \gamma_{1n} z = A' \sin \sqrt{k_1^2 - \lambda_n} z \quad (3.3.26)$$

$$u_n^{(2)}(z) = Ce^{-\sqrt{\lambda_n - k_2^2}(z-h)} \quad (3.3.27)$$

Οι τιμές των A' και C θα προκύψουν από τις 3.3.21 ή 3.3.22 σε συνδυασμό με τη συνθήκη ορθοκανονικότητας των ιδιοσυναρτήσεων, που είναι της μορφής :

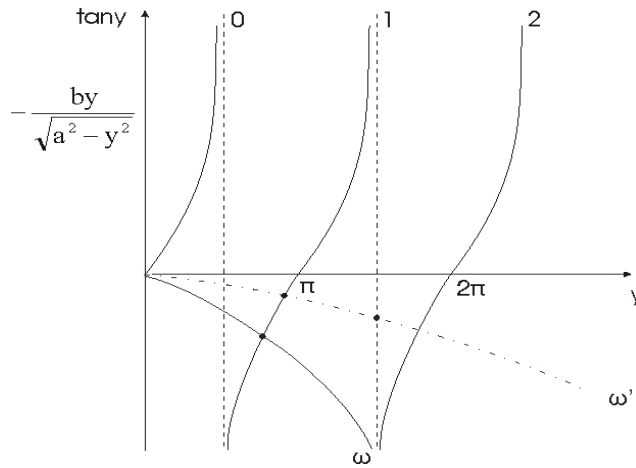
$$\int_0^\infty \frac{1}{\rho(z)} u_n^2(z) dz = \int_0^h \frac{1}{\rho_1} u_n^{(1)2}(z) dz + \int_h^\infty \frac{1}{\rho_2} u_n^{(2)2}(z) dz = 1 \quad (3.3.28)$$

Στο σημείο αυτό καλό είναι να παρατηρήσουμε ότι από τη σχέση $\gamma_{1n} = \sqrt{k_1^2 - \lambda_n}$ φαίνεται ότι για να έχει η λύση μας κυματική συμπεριφορά θα πρέπει να ισχύει

$\lambda_n < k_1^2$

(Περιορισμός II)

ώστε να έχει νόημα ο κατακόρυφος αριθμός κύματος.



Σχήμα 3.6 Σχηματική παράσταση του υπολογισμού των ιδιοτιμών στο περιβάλλον Pekeris

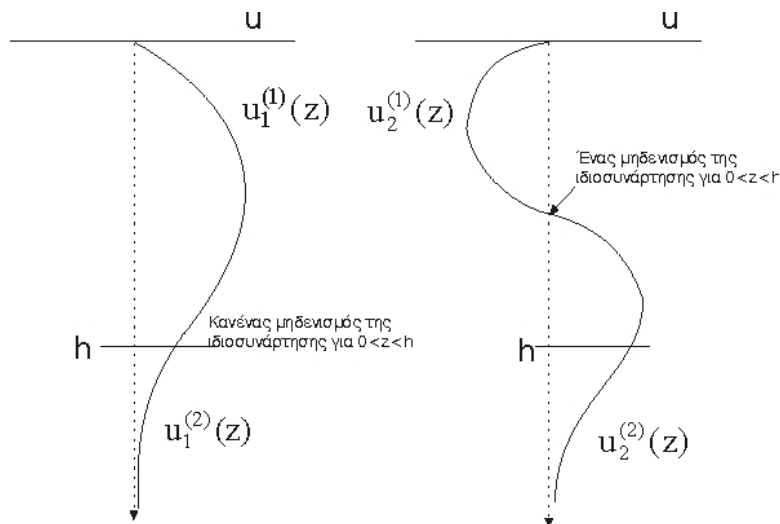
Συνδυάζοντας τους περιορισμούς I και II, βλέπουμε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει η λύση μας κυματική μορφή στο νερό και να έχει αποσβενύμενη συμπεριφορά για $z > h$ είναι:

$$k_2^2 < \lambda_n < k_1^2 \tag{3.3.29}$$

ή

$$\left(\frac{\omega}{c_2}\right)^2 < \lambda_n < \left(\frac{\omega}{c_1}\right)^2 \tag{3.3.30}$$

Επομένως θα πρέπει και $c_2 > c_1$ που είναι μια απαίτηση που στο θαλάσσιο περιβάλλον ισχύει γενικά. (Ο πυθμένας της θάλασσας είναι σκληρότερος από το νερό και η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι μεγαλύτερη). Η μορφή των ιδιοσυναρτήσεων πρώτης και δεύτερης τάξης παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα



Σχήμα 3.7 Η μορφή των ιδιοσυναρτήσεων πρώτης και δεύτερης τάξης για το περιβάλλον Pekeris. Παρατηρείστε τον αριθμό των μηδενισμών της ιδιοσυνάρτησης (εκτός από την θέση $z=0$) που είναι κατά ένα μικρότερος της τάξης της ιδιοσυνάρτησης. Η ιδιοσυνάρτηση είναι ασυνεχής στο βάθος $z=h$ λόγω της συνθήκης της παραγώγου στην διεπιφάνεια.

3.3.2 Αναπαράσταση της λύσης

Όπως αναφέρθηκε ήδη, η αναπαράσταση της λύσης της εξίσωσης Helmholtz στο μη φραγμένο χωρίο του προβλήματος μέσω των ιδιοσυναρτήσεων ενός αντίστοιχου προβλήματος «βάθους» θα πρέπει να γίνει πάνω στις ιδιοσυναρτήσεις τόσο του συνεχούς όσο και του διακριτού φάσματος κατά την 3.3.14. Όμως, από το πρόβλημα που τέθηκε κατά τον υπολογισμό των ιδιοσυναρτήσεων u_n , φάνηκε ότι μόνο πεπερασμένες τον αριθμό ιδιοτιμές προέκυψαν και επομένως μόνο το διακριτό φάσμα υπολογίστηκε. Αυτό ήταν συνέπεια του ότι αποκλείσαμε από τη λύση τιμές του λ που θα μας έδιναν γ_2 πραγματικό ($\lambda < k_2^2$) ερμηνεύοντας με τον τρόπο αυτό την απαίτηση της συνθήκης για την συμπεριφορά της λύσης για $z \rightarrow \infty$. Στην πραγματικότητα ο περιορισμός αυτός μας δίνει το διακριτό φάσμα των ιδιοτιμών και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις ονομάζονται κανονικές (normal modes). Εάν διατηρήσουμε την συνθήκη για αποκλίνον κύμα για μεγάλα z , τότε δεν υπάρχει κάτω περιορισμός στο λ . Όμως το φάσμα των ιδιοτιμών για $\lambda < k_2^2$ μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι συνεχές και αντιστοιχεί στις ιδιοσυναρτήσεις $u(z, \lambda)$ της 3.2.95. Όπως αναφέρθηκε ήδη, η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε λύσεις που αντιστοιχούν σε κύματα που εξασθενούν πολύ γρήγορα μακριά από τη πηγή. Έτσι η συνεισφορά του συνεχούς φάσματος είναι αμελητέα, ιδιαίτερα σε μεγάλα r και αντιπροσωπεύει ενέργεια που χάνεται στο πυθμένα. Έτσι, στην περίπτωση που ενδιαφερόμαστε για το ακουστικό πεδίο σε μεγάλες αποστάσεις μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η λύση του προβλήματος που δίδεται με αναπαράσταση πάνω στο διακριτό φάσμα των ιδιοσυναρτήσεων είναι πολύ κοντά στην πραγματική και να γράψουμε

$$p(r, z) = \sum_{n=1}^N A_n(r) u_n(z) \quad (3.3.31)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Helmholtz στο χωρίο $0 \leq z < \infty$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho^0} \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} + k^2 p = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(z - z_0) \quad (3.3.32)$$

έχουμε

$$\sum_{n=1}^N u_n \frac{d^2 A_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^N u_n \frac{dA_n}{dr} + \sum_{n=1}^N A_n \frac{d^2 p}{dz^2} - \frac{1}{\rho^0} \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial z} \sum_{n=1}^N A_n \frac{du_n}{dz} + k^2 \sum_{n=1}^N u_n A_n = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \delta(z - z_0) \quad (3.3.33)$$

Με στόχο την αξιοποίηση της ορθογωνιότητας των ιδιοσυναρτήσεων πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέρη με $(1/\rho)u_m$ και ολοκληρώνουμε σε όλο το πεδίο ορισμού του προβλήματος παίρνοντας

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} u_m \sum_{n=1}^N u_n \frac{d^2 A_n}{dr^2} dz + \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} u_m \frac{1}{r} \sum_{n=1}^N u_n \frac{dA_n}{dr} dz + \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} u_m \sum_{n=1}^N A_n \frac{d^2 u_n}{dz^2} dz - \\
& \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} u_m \frac{1}{\rho^0} \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial z} \sum_{n=1}^N A_n \frac{du_n}{dz} dz + \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} u_m k^2 \sum_{n=1}^N u_n A_n dz = -\frac{1}{2\pi r} \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} u_n \delta(r) \delta(z - z_0) dz
\end{aligned} \tag{3.3.34}$$

και αξιοποιώντας την 3.3.13 την συνθήκη ορθογωνιότητας και τις ιδιότητες των συναρτήσεων δέλτα, καταλήγουμε στην

$$\frac{d^2}{dr^2} A_m + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} A_m + \lambda_m A_m = -\frac{1}{2\pi r} \frac{1}{\rho(z_0)} \delta(r) u_m(z_0) \tag{3.3.35}$$

Προσέξτε ως αποτέλεσμα των ως άνω ιδιοτήτων οι τιμές της ιδιοσυνάρτησης και της πυκνότητας στο δεύτερο μέρος δίδεται στο βάθος της πηγής και επομένως $\rho(z_0) = \rho_1$.

Άρα,

$$\frac{d^2}{dr^2} \left[\frac{\rho_1}{u_m^{(1)}(z_0)} A_m \right] + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{\rho_1}{u_m^{(1)}(z_0)} A_m \right] + \lambda_m \left[\frac{\rho_1}{u_m^{(1)}(z_0)} A_m \right] = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r) \tag{3.3.36}$$

που είναι η γνωστή μας εξίσωση για τη συνάρτηση Green που ορίζεται από το λόγο $\rho_1 A_m / u_m^{(1)}(z_0)$:

Έτσι παίρνουμε:

$$\frac{\rho_1}{u_m^{(1)}(z_0)} A_m = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_m} r) \tag{3.3.37}$$

Άρα

$$A_m = \frac{i}{4\rho_1} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_m} r) u_m^{(1)}(z_0) \tag{3.3.38}$$

και

$$p(r, z) = \frac{i}{4\rho_1} \sum_{n=1}^N H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_n} r) u_n^{(1)}(z_0) u_n(z) \tag{3.3.39}$$

όπου έχουμε κάνει αντικατάσταση του δείκτη m με τον δείκτη n

Παρατηρούμε ότι η μορφή της αναπαράστασης είναι παρόμοια με εκείνη του απλού κυματοδηγού με τη διαφορά στη μέγιστη τάξη του αθροίσματος που είναι τώρα N .

Για μεγάλες αποστάσεις από την πηγή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ασυμπτωτική έκφραση για την συνάρτηση Hankel και να πάρουμε :

$$p(r, z) = \frac{i}{4\rho_1} \sum_{n=1}^N u_n^{(1)}(z_0) u_n(z) \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{\lambda_n} r}} e^{i(\sqrt{\lambda_n} r - \pi/4)} \tag{3.3.40}$$

3.4 Ο κυματοδηγός με μεταβαλλόμενη ταχύτητα συναρτήσει του z Πρόβλημα Π3

Θεωρούμε την γεωμετρία του προβλήματος Π2 με μία τροποποίηση που έγκειται στο ότι ο αριθμός κύματος k μεταβάλλεται μόνο με το z ($k=f(z)$) μέσα στο πρώτο στρώμα. (Σχήμα 3.8).

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με το πρόβλημα Π2 θα υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές από τη λύση του προβλήματος βάθους.

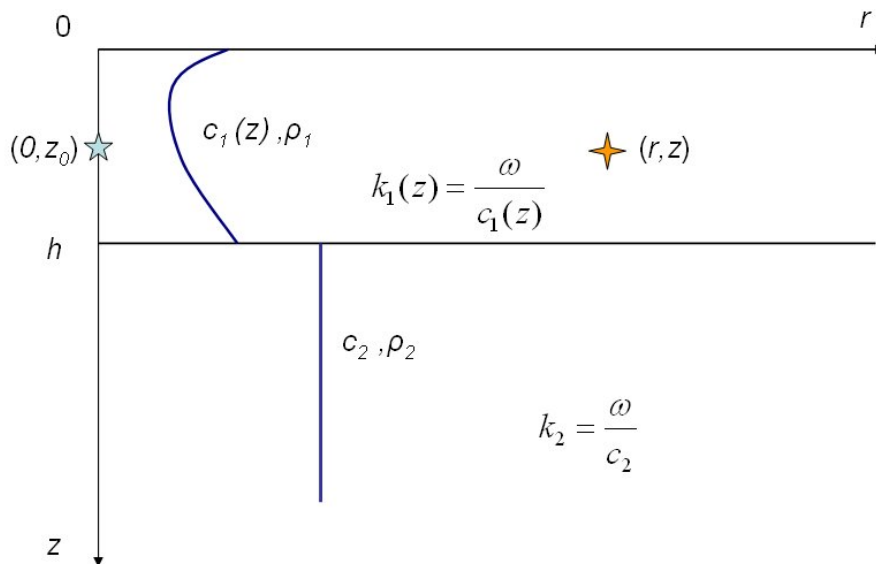
$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\rho(z)} \frac{du}{dz} \right) + \left(\frac{k^2(z)}{\rho(z)} - \frac{\lambda}{\rho(z)} \right) u = 0 \tag{3.4.1}$$

όπου $u(z): [0, \infty)$ με :

$$u(z) = \begin{cases} u^{(1)}(z) & \text{για } 0 \leq z \leq h \\ u^{(2)}(z) & \text{για } z \geq h \end{cases}$$

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_1 & \text{για } 0 \leq z < h \\ \rho_2 & \text{για } z > h \end{cases}$$

$$k(z) = \begin{cases} \frac{\omega}{c_1(z)} & \text{για } 0 \leq z < h \\ \frac{\omega}{c_2} & \text{για } z > h \end{cases}$$



Σχήμα 3.8 Σχηματική παράσταση περιβάλλοντος στο οποίο το προφίλ ταχύτητας στο νερό μεταβάλλεται με το βάθος

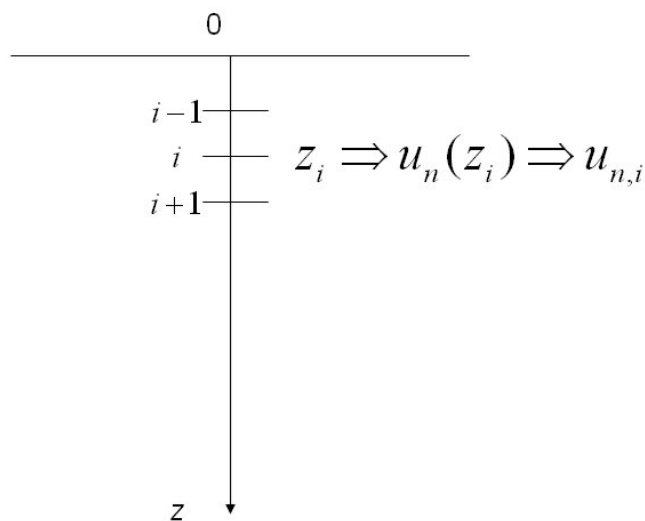
Παρατηρούμε ότι η μόνη διαφοροποίηση σε σχέση με το περιβάλλον Pekeris είναι στην μεταβολή της ταχύτητας διάδοσης του ήχου με το βάθος στο νερό και για τον λόγο αυτό ο αριθμός κύματος k μεταβάλλεται με το z στο διάστημα $[0-h]$. Οι οριακές συνθήκες Σ.1-Σ.4 παραμένουν οι ίδιες και επομένως εκείνο που απομένει να γίνει είναι ο υπολογισμός των ιδιοσυναρτήσεων. Εδώ η δυσκολία βρίσκεται στο ότι η μεταβολή του k με το z με κάποιο γενικό νόμο μεταβολής, που είναι βέβαια και η συνηθισμένη περίπτωση, δεν μας επιτρέπει έκφραση της λύσης σε αναλυτική μορφή στο διάστημα $[0-h]$. Επομένως θα πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα αριθμητικά στο διάστημα αυτό ενώ για το διάστημα $[h-\infty)$ ισχύει η αναλυτική λύση που είδαμε (3.3.17). Στη συνέχεια θα δοθεί μία μέθοδος πεπερασμένων διαφορών που με αρκετή αποδοτικότητα προσεγγίζει τη λύση μας.

3.4.1 Ένα σχήμα διαφορών για την λύση της εξίσωσης βάθους με μεταβαλλόμενο συναρτήσει του z , k .

Το πρόβλημα "βάθους" που ορίζεται από την εξίσωση 3.4.1 και τις οριακές συνθήκες Σ.1-Σ.4 μπορεί να επιλυθεί αριθμητικά με την εφαρμογή ενός σχήματος πεπερασμένων διαφορών. Στα επόμενα αλλάζουμε τον συμβολισμό του βάθους στην θάλασσα από h σε d ώστε να διατηρήσουμε τον τυπικό συμβολισμό των ισοδιαστημάτων ενός αριθμητικού σχήματος πεπερασμένων διαφορών.

Δεν πρέπει να λησμονούμε ότι ταυτόχρονα με τις ιδιοσυναρτήσεις πρέπει να υπολογιστούν και οι ιδιοτιμές του προβλήματος και για το λόγο αυτό θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια ένα συνδυασμένο σχήμα.

Ας θεωρήσουμε προς στιγμήν ότι γνωρίζουμε τις ιδιοτιμές λ_n . Έστω επίσης ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του $[0,d]$ σε I ισοδιαστήματα μήκους h . Τότε στη θέση $z = z_i = (i-1)h$ (εδώ το i αντιστοιχεί σε δείκτη και όχι στην φανταστική μονάδα), η ακριβής λύση του προβλήματος θα είναι $u(z_i)$ ενώ σκοπός μας είναι να εφαρμόσουμε ένα σχήμα διαφορών για τον υπολογισμό μιας καλής προσέγγισης u_i της $u(z_i)$, $i=1,2,\dots,I+1$.



Σχήμα 3.9 Διακριτοποίηση ως προς το βάθος για την εφαρμογή σχήματος πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση του προβλήματος βάθους

Η αντικατάσταση των παραγώγων με αλγεβρικές διαφορές είναι το πρώτο βήμα για την υλοποίηση της μεθόδου.

Όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα Π1 θα θεωρήσουμε την διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2 u^{(*)}}{dz^2} + (k^2 - \lambda)u^{(*)} = 0 \quad , \quad * = 1, 2 \quad (3.4.2)$$

που διέπει το πρόβλημα βάθους για σταθερές πυκνότητες στο νερό και στον πυθμένα. Υπενθυμίζουμε ότι το εν λόγω πρόβλημα είναι πρόβλημα ιδιοτιμών και συνεπώς οι συναρτήσεις που θα υπολογιστούν αριθμητικά αναφέρονται σε κάποια τάξη n . Συνεπώς στόχος μας είναι ο υπολογισμός των ιδιοσυναρτήσεων $u_n(z)$ και με βάση τα γνωστά από την αριθμητική λύση των διαφορικών εξισώσεων με πεπερασμένες διαφορές των προσεγγίσεων $u_{n,i}$ της $u_n(z_i)$.

Σύμφωνα με τα γνωστά από τις σχέσεις διαφορών η δεύτερη παράγωγος της $u_n(z_i)$ προσεγγίζεται με την σχέση:

$$\frac{d^2 u_n}{dz^2} \approx \frac{u_{n,i+1} - 2u_{n,i} + u_{n,i-1}}{h^2} \quad (3.4.3)$$

που όπως είναι γνωστό έχει ακρίβεια δεύτερης τάξης ως προς h

Αντικαθιστώντας στην 3.4.2 παίρνουμε :

$$\frac{u_{n,i+1}^{(1)} - 2u_{n,i}^{(1)} + u_{n,i-1}^{(1)}}{h^2} + \left[\left(\frac{\omega}{c_i} \right)^2 - \lambda_n \right] u_{n,i}^{(1)} = 0 \quad (3.4.4)$$

ή

$$u_{n,i-1}^{(1)} = \left[2 - h^2 \left[\left(\frac{\omega}{c_i} \right)^2 - \lambda_n \right] u_{n,i}^{(1)} \right] - u_{n,i+1}^{(1)} \quad (3.4.5)$$

Η 3.4.5 είναι μία άμεση αναδρομική σχέση. Με γνωστές τις τιμές των $u_{n,i+1}$ και $u_{n,i}$ παίρνουμε το $u_{n,i-1}$. Η αναδρομική σχέση γράφεται με τον τρόπο αυτό μια και ξεκινά συνήθως κανείς από τη διεπιφάνεια στη θέση $z=d$ και συνεχίζει υπολογίζοντας τις τιμές μέχρι το $z=0$. Ένας ισχυρός λόγος γ' αυτό είναι η γνώση της λύσης μας για $z>d$ (άρα και για $z = d$) που μπορεί να γραφεί (δείτε και σχέση 3.3.17) :

$$u_n^{(2)}(z) = A \exp \left\{ -z \left[\lambda_n - \left(\frac{\omega}{c_2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (3.4.6)$$

Οι συνθήκες στη διεπιφάνεια επιβάλλουν :

$$u_n^{(1)}(d) = u_n^{(2)}(d) \quad (3.4.7)$$

και

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{du_n^{(1)}}{dz}(d) = \frac{1}{\rho_2} \frac{du_n^{(2)}}{dz}(d) \quad (3.4.8)$$

Δεδομένου ότι ο συντελεστής της αναπαράστασης της ιδιοσυνάρτησης στο δεύτερο μέσον (πυθμένας) θα υπολογιστεί τελικά από την συνθήκη οροκανονικότητας των ιδιοσυναρτήσεων και για διευκόλυνση του αριθμητικού σχήματος, έχουμε την δυνατότητα να δώσουμε σε πρώτη φάση μία αυθαίρετη τιμή η οποία μπορεί να διορθωθεί στο τέλος. Έτσι δεχόμαστε κατ'αρχην ότι

$$u_n^{(2)}(d) = 1 \quad (3.4.9)$$

Επομένως, κατά την 3.4.7 έχουμε $u_{n,l+1} = 1$.

Από την εφαρμογή της συνθήκης 3.4.8 έχουμε:

$$\frac{du_n^{(1)}}{dz}(d) = -A \frac{\rho_1}{\rho_2} \left[\lambda_n - \left(\frac{\omega}{c_2} \right)^2 \right]^{1/2} \exp \left\{ -d \left[\lambda_n - \left(\frac{\omega}{c_2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} = -\frac{\rho_1}{\rho_2} \left[\lambda_n - \left(\frac{\omega}{c_2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.4.10)$$

Θέτοντας $\rho_1/\rho_2 = R$ και $B = \left[\lambda_n - \left[\frac{\omega}{c_2} \right]^2 \right]$

γράφουμε:

$$\frac{du_n^{(1)}}{dz}(d) = -RB^{\frac{1}{2}} \quad (3.4.11)$$

Στη συνέχεια αναπτύσσουμε την $u_n^{(1)}(z)$ σε σειρά Taylor:

$$u_n^{(1)}(z-h) = u_n^{(1)}(z) - h \frac{du_n^{(1)}}{dz}(z) + \frac{h^2}{2} \frac{d^2u_n^{(1)}}{dz^2}(z) - \frac{h^3}{6} \frac{d^3u_n^{(1)}}{dz^3}(z) + O(h^4) \quad (3.4.12)$$

Εφαρμόζουμε το ανάπτυγμα στη θέση $z=d$ και παίρνουμε από τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2u_n^{(1)}}{dz^2}(d) = - \left[\left[\frac{\omega}{c_1(d)} \right]^2 - \lambda_n \right] u_n^{(1)}(d) \quad (3.4.13)$$

Παραγωγίζοντας ως προς z και παίρνοντας πρώτης τάξης προσέγγιση για την παράγωγο της ποσότητας στην αγκύλη έχουμε:

$$\frac{d^3u_n^{(1)}}{dz^3}(d) \approx - \left[\frac{\omega^2}{c_1^2(d)} - \lambda_n \right] \frac{du_n^{(1)}}{dz}(d) - \frac{\omega^2}{h} \left[\frac{1}{c_1^2(d)} - \frac{1}{c_1^2(d-h)} \right] u_n^{(1)}(d) \quad (3.4.14)$$

Θέτουμε $\frac{\omega^2}{c_1^2(d)} - \lambda_n = C$ και $\frac{\omega^2}{c_1^2(d-h)} - \lambda_n = D$

και παίρνουμε:

$$\frac{d^2 u_n^{(1)}}{dz^2}(d) = -C u_n^{(1)}(d), \quad \frac{d^3 u_n^{(1)}}{dz^3}(d) \approx CRB^{1/2} - \frac{1}{h}[C - D]u_n^{(1)}(d)$$

αλλά αφού $u_n^{(1)}(d) = 1$, έχουμε

$$\frac{d^2 u_n^{(1)}}{dz^2}(d) = -C, \quad \frac{d^3 u_n^{(1)}}{dz^3}(d) \approx CRB^{1/2} - \frac{1}{h}[C - D]$$

αντικαθιστώντας στην 3.4.12 παίρνουμε:

$$u_n^{(1)}(d-h) \approx 1 + hRB^{1/2} - \frac{h^2}{2}C - \frac{h^3}{6}\{CRB^{1/2} - \frac{1}{h}[C - D]\} = \quad (3.4.15)$$

$$= 1 + hRB^{1/2} - \frac{h^2}{3}C - \frac{h^2}{6}D - \frac{h^3}{6}CRB^{1/2} \quad (3.4.15\alpha)$$

Επομένως, το αριθμητικό μας σχήμα γίνεται:

$$u_{n,i-1}^{(1)} = \{2 - h^2[(\frac{\omega}{c_i})^2 - \lambda_n]\}u_{n,i}^{(1)} - u_{n,i+1}^{(1)}, \quad i = 2, \dots, I \quad (3.4.16)$$

με $u_{n,I+1}^{(1)} = 1 \quad (3.4.16\alpha)$

και

$$u_{n,I}^{(1)} = 1 + hRB^{1/2} - \frac{h^2}{3}C - \frac{h^2}{6}D - \frac{h^3}{6}CRB^{1/2} \quad (3.4.16\beta)$$

Έτσι, εκμεταλλευόμενοι τις συνθήκες συνεργασίας προσδιορίζουμε τις δύο αρχικές τιμές που μας δίνουν τις προσεγγίσεις των ιδιοσυναρτήσεων.

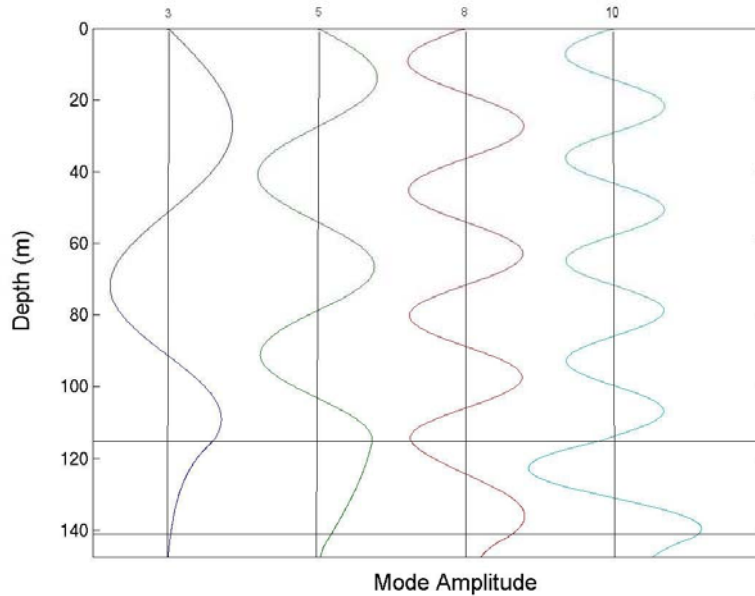
Είναι αυτονόητο ότι το παραπάνω σχήμα δεν είναι το μοναδικό. Μπορεί να εισαγάγει κανείς σχήματα και άλλης μορφής ή ακρίβειας. Το προτεινόμενο ως άνω σχήμα έχει ικανοποιητική ακρίβεια (δευτέρας τάξης).

3.4.2 Ο υπολογισμός των ιδιοτιμών

Χωρίς να μπούμε σε πολλές λεπτομέρειες θα περιγράψουμε μια μέθοδο υπολογισμού των ιδιοτιμών που βασίζεται στο σχήμα που προαναφέραμε.

Έστω ότι στο σχήμα εφαρμόζεται για μία τυχούσα τιμή λ^* , που δεν είναι κατ'ανάγκην ιδιοτιμή του προβλήματος. Τότε θα μας δώσει μία τιμή στην επιφάνεια της θάλασσας $u_{n,1}^{(1)}$ που θα είναι γενικά διάφορη του μηδενός για κάθε n . Στο συνεχές πρόβλημα, εάν το λ^* ήταν ιδιοτιμή τάξης n , τότε το $u_n^{(1)}(0)$ θα έπρεπε να είναι μηδέν 0 ακολουθώντας την οριακή συνθήκη ελεύθερης επιφάνειας. Περιμένουμε λοιπόν ότι και η τιμή $u_{n,1}^{(1)}$ θα είναι πολύ κοντά στο 0, (για την ακρίβεια $\epsilon \ll \ll$). Πάντως στη γενική περίπτωση θα ισχύει :

$$u_{n,1}^{(1)} = f_n(\lambda)$$



Σχήμα 3.10 Ιδιοσυναρτήσεις διαφόρων τάξεων που έχουν υπολογιστεί σε ένα κυματοδηγό βάθους 115m.

Οι ιδιοτιμές του προβλήματος μπορούν επομένως να υπολογιστούν ως τα λ που μηδενίζουν την $f_n(\lambda)$

Η εξίσωση

$$f_n(\lambda) = 0 \quad (3.4.17)$$

μπορεί επομένως να θεωρηθεί ως η «χαρακτηριστική εξίσωση» του διακριτού προβλήματος ιδιοτιμών όπως το ορίσαμε παραπάνω.

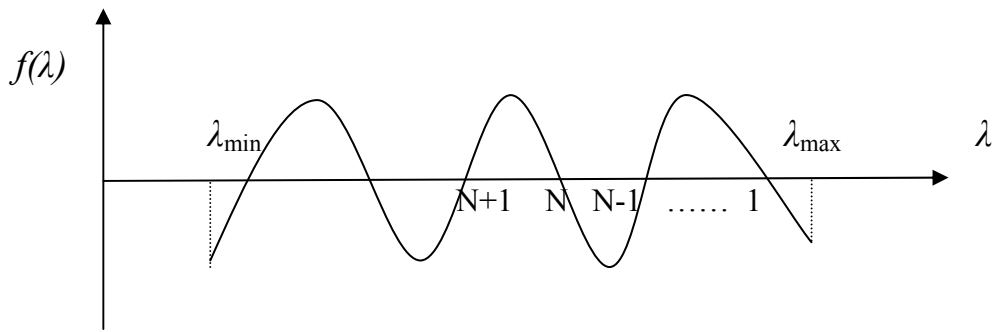
Ας δούμε ωστόσο πως συμπεριφέρεται η $f(\lambda)$. Το σχήμα 3.11 δίδει ποιοτικά τη γραφική της παράσταση

Από τη μέχρι τώρα θεώρηση γνωρίζουμε ότι τα επιτρεπτά λ_n θα βρίσκονται στο διάστημα $\lambda_{\min} < \lambda_n < \lambda_{\max}$, όπου

$$\lambda_{\min} = \frac{\omega^2}{c_2^2} \quad \text{και} \quad \lambda_{\max} = \frac{\omega^2}{c_{1\min}^2}$$

Όπως παρατηρεί κανείς, εδώ έχουμε αντικαταστήσει το c_1 της σχέσης 3.3.30 με το $c_{1\min}$. Αυτό συμβαίνει γιατί, κυματικό φαινόμενο στο νερό έχουμε, για συχνότητες πάνω από τη συχνότητα αποκοπής, όταν μια κυματομορφή (mode) μπορεί να διαδοθεί τουλάχιστον σε μία περιοχή της υδάτινης στήλης, δηλαδή ακόμη και σε ένα συγκεκριμένο βάθος (z^*) μόνο. Για την περιοχή αυτή (ή το συγκεκριμένο βάθος μόνο), η κατακόρυφη συνιστώσα του αριθμού κύματος γίνεται πραγματικός αριθμός

$\gamma_n(z) = \sqrt{k_1^2(z) - \lambda_n}$. Επομένως, για ταχύτητα διάδοσης του ήχου που μεταβάλλεται με το βάθος, αρκεί οι ιδιοτιμές να είναι μικρότερες από τον μέγιστο αριθμό κύματος (ελάχιστη ταχύτητα διάδοσης) ώστε να έχουμε κυματικό φαινόμενο. Υπενθυμίζουμε ότι οι ιδιοτιμές που δίδουν κυματικό φαινόμενο στο νερό και αποσβενύμενο πεδίο στον πυθμένα ονομάζονται κανονικές ιδιοτιμές (normal modes)



Σχήμα 3.11 Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\lambda)$. Οι αριθμοί $N, N-1, \dots$ αντιστοιχούν στις αντίστοιχες τάξεις των ιδιοτιμών.

Γνωρίζουμε λοιπόν το διάστημα στο οποίο θα ψάξουμε για τις ρίζες της $f(\lambda)$. Η εξίσωση $f(\lambda)=0$ είναι βέβαια μη γραμμική εξίσωση. Η μορφή όπως της γραφικής παράστασης της $f(\lambda)$ (Σχήμα 3.11) μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε μία απλή αριθμητική μέθοδο για την επίλυσή της όπως π.χ. Regula Falsi στην οποία και θα αναφερθούμε στη συνέχεια ως παράδειγμα και μόνο.

Χρησιμοποιώντας το σχήμα 3.12 υπενθυμίζουμε την αναδρομική σχέση που μας δίνει μια προσεγγιστική λύση της $f(x)=0$ με την ως άνω μέθοδο :

Εάν εντοπίσουμε δύο τιμές x_l και x_u που μας δίνουν $f(x_l) f(x_u) < 0$ τότε η προσεγγιστική λύση x_r της $f(x)=0$ είναι:

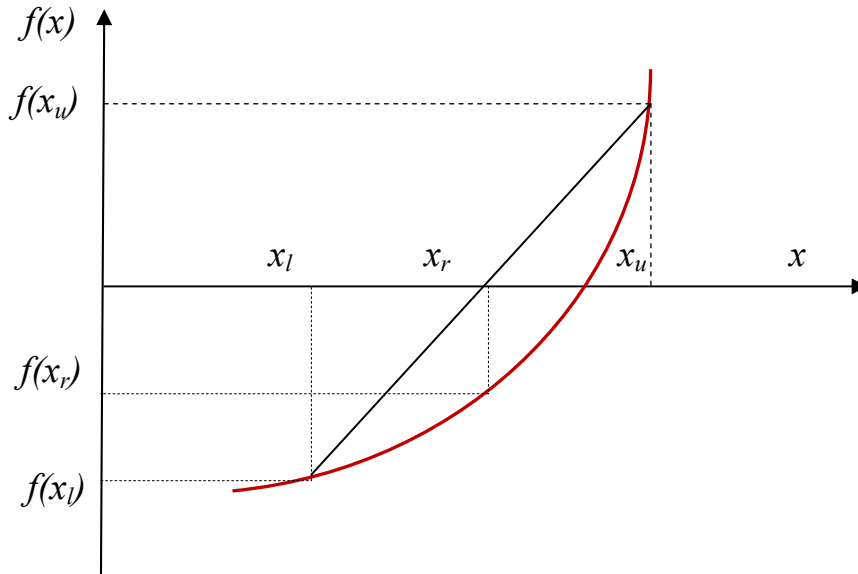
$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)} \tag{3.4.18}$$

Εάν $f(x_r) < \varepsilon$ όπου ε ένας μικρός αριθμός, τότε η λύση μας θεωρείται ικανοποιητική. Στο πρόβλημα που μας ενδιαφέρει έχουμε πολλές λύσεις και θα πρέπει να τις υπολογίσουμε όλες. Το βασικό μας κριτήριο είναι ο αριθμός των μηδενισμών της αντίστοιχης ιδιοσυνάρτησης που θα πρέπει να είναι $n-1$ για κάθε τάξη n . Θα πρέπει συνεπώς να εξασφαλίσουμε ότι έχουμε εξαντλήσει όλες τις αποδεκτές ρίζες της εξίσωσης στο διάστημα ελέγχου.

Μία διαδικασία εντοπισμού των λύσεων x_r έχει ως εξής :

Εντοπίζουμε δύο σημεία x_l και x_u ώστε $f(x_l) f(x_u) < 0$. Υπολογίζουμε το $f(x_r)$ και ελέγχουμε εάν το $f(x_r)$ ικανοποιεί το κριτήριο σύγκλισης της μεθόδου (δηλαδή $f(x_r) < \varepsilon$). Εάν ναι σταματάμε την επανάληψη, ελέγχουμε τον αριθμό των μηδενισμών της αντίστοιχης ιδιοσυνάρτησης που έχει προκύψει ήδη από το σχήμα των πεπερασμένων διαφορών και ψάχνουμε για την επόμενη ρίζα. Εάν όχι, ελέγχουμε ποιο από τα γινόμενα $f(x_r) f(x_l)$ ή $f(x_r) f(x_u)$ είναι < 0 ώστε να «εγκλωβίσουμε» την ρίζα. Τότε το αντίστοιχο x_u ή x_l αντικαθίσταται με το x_r και συνεχίζουμε τη διαδικασία, έως ότου εξαντληθούν όλες οι δυνατές λύσεις της $f(x)=0$.

Όπως αντιλαμβάνεται κανείς, η μέθοδος αυτή δεν δίνει πάντα καλή ταχύτητα σύγκλισης και παρουσιάζει σημαντικά προβλήματα όταν η $f(x)$ είναι έντονα ταλαντευόμενη συνάρτηση με συχνές και πυκνές διελεύσεις από το 0. Αυτό σημαίνει ότι για πολύ υψηλές συχνότητες στο πρόβλημα που εξετάζουμε που ισοδυναμεί με μεγάλο αριθμό επιτρεπτών ιδιοτιμών, μπορεί η μέθοδος να μην είναι αποδοτική. Δεν παύει ωστόσο να είναι ικανοποιητική σε χαμηλές συχνότητες.



Σχήμα 3.12 Μέθοδος Regula Falsi (Σχηματική παράσταση)

3.4.3 Κανονικοποίηση

Οι ιδιοσυναρτήσεις όπως υπολογίστηκαν ανωτέρω, βασίστηκαν σε μια αυθαίρετη επιλογή του συντελεστή της $u_n^{(2)}(z)$. Όμως για να χρησιμοποιήσουμε τις έτοιμες εκφράσεις της λύσης για μοναδιαία διέγερση 3.3.39 οι ιδιοσυναρτήσεις θα πρέπει να αποτελούν ορθοκανονικό σύστημα .

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\rho(z)} u_n^{(2)2}(z) dz = 1 \quad (3.4.19)$$

που στην περίπτωση μας (δύο στρώματα) γράφεται:

$$\int_0^d \frac{1}{\rho_1} u_n^{(1)2}(z) dz + \int_d^{\infty} \frac{1}{\rho_2} u_n^{(2)2}(z) dz = 1 \quad (3.4.20)$$

Η τυχαία επιλογή του συντελεστή της $u_n^{(2)}(z)$, όπως μπορεί να διαπιστώσει πολύ εύκολα κανείς, επηρεάζει μόνο το πλάτος της ιδιοσυνάρτησης. Έτσι το ολοκλήρωμα 3.4.20 θα πάρει μια τιμή N_n^2 που θα είναι εν γένει διάφορη του 0. Εάν τώρα διαιρέσουμε τις υπολογισθείσες με την αριθμητική μέθοδο έτσι ιδιοσυναρτήσεις με N_n , παίρνουμε το ορθοκανονικό σύστημα των ιδιοσυναρτήσεων που θέλουμε για την χρήση της 3.3.39 ή 3.3.40. Αξίζει να προσθέσουμε ότι ο υπολογισμός του ολοκληρώματος γίνεται αριθμητικά στο νερό και αναλυτικά στον ημίπειρο πυθμένα.

3.5 Η Απώλεια Διάδοσης

Πολλές φορές, σε προβλήματα ηχητικής διάδοσης, αντί για την πίεση σε τυχούσα θέση (r,z) υπολογίζεται η απώλεια διάδοσης (transmission loss- TL) που ορίζεται ως:

$$TL(r, z) = -20 \log \frac{|p(r, z)|}{|p_0|} \quad (3.5.1)$$

όπου p_0 είναι μία πίεση αναφοράς που ορίζεται συνήθως ως η πίεση σε απόσταση 1m από μία σημειακή αρμονική πηγή που εκπέμπει σε μη φραγμένο χωρίο. Για να υπολογίσουμε την p_0 επομένως, θα πρέπει να βρούμε τη λύση του προβλήματος της διάδοσης του ήχου σε μη φραγμένο χωρίο.

Η εξίσωση που διέπει το πρόβλημα είναι η Helmholtz:

$$\nabla^2 p + k^2 p = -\delta(\bar{x} - \bar{x}_0) \quad (3.5.2)$$

που σε σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων και στην περίπτωση της σφαιρικής συμμετρίας (όπως στην περίπτωση που εξετάζουμε) και με p εξαρτώμενο μόνο από την απόσταση r γράφεται :

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dp}{dr} + k^2 p = -\frac{\delta(r)}{4\pi r^2} \quad (3.5.3)$$

Το πρόβλημα συμπληρώνεται βέβαια με μία συνθήκη ακτινοβολίας τύπου Sommerfeld (αποκλίνον κύμα) που μας δίνει λύση:

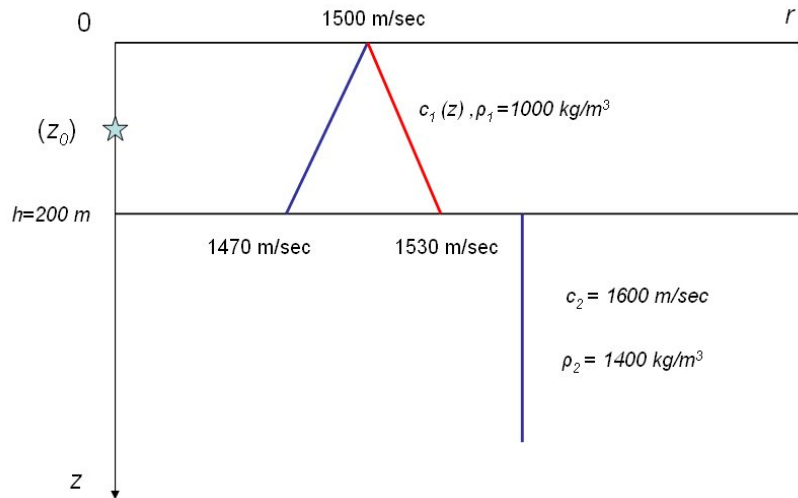
$$p(r) = \frac{1}{4\pi r} e^{ikr} \quad (3.5.4)$$

Έτσι, και με βάση την σύμβαση που έχουμε υιοθετήσει για την απώλεια διάδοσης παίρνουμε

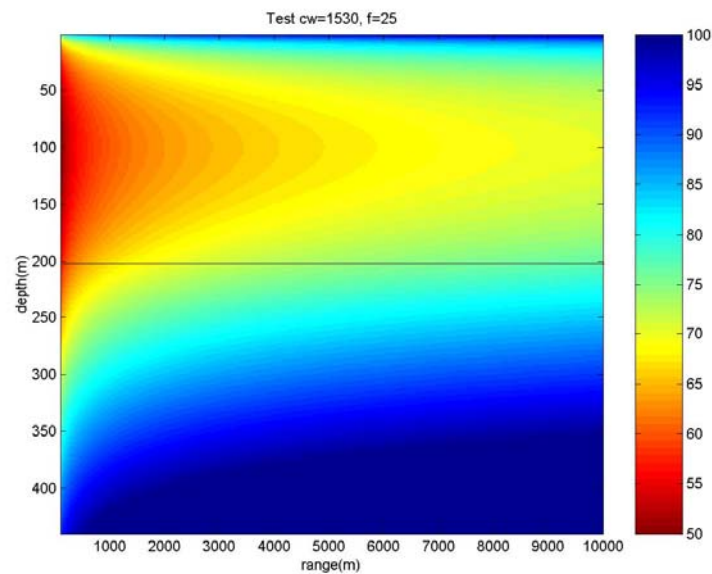
$$|p_0| = \left| \frac{1}{4\pi r} \right| = \frac{1}{4\pi} \quad (3.5.5)$$

Η απώλεια διάδοσης εκφράζεται σε μονάδες dB (decibel) και είναι πρακτικά ένα ενεργειακό μέγεθος που εκφράζει το ποσό της έντασης του ακουστικού πεδίου που μειώνεται καθώς το ακουστικό σήμα διαδίδεται στον κυματοδηγό.

Στα επόμενα σχήματα δίδονται μερικά παραδείγματα υπολογισμού του ακουστικού πεδίου στο βάθος και την απόσταση εκφρασμένου σε μονάδες dB. Τα γραφήματα 3.14-3.16 παρουσιάζουν την απώλεια διάδοσης σε τρόπο ώστε να επικονίζονται οι περιοχές έντονης απώλειας (συνεπώς χαμηλού ακουστικού πεδίου) με χρώμα μπλέ, σε αντίθεση με τις περιοχές χαμηλής απώλειας (συνεπώς υψηλού ακουστικού πεδίου) με χρώμα ερυθρό. Τα γραφήματα αυτά βασίζονται στα δύο περιβάλλοντα που παρουσιάζονται στο σχήμα 3.13 από τα οποία, το πρώτο αφορά ηχητικό πεδίο για προφίλ ταχύτητας στο νερό που αυξάνει γραμμικά με το βάθος ενώ το δεύτερο αφορά περιβάλλον με προφίλ που μειώνεται γραμμικά με το βάθος.

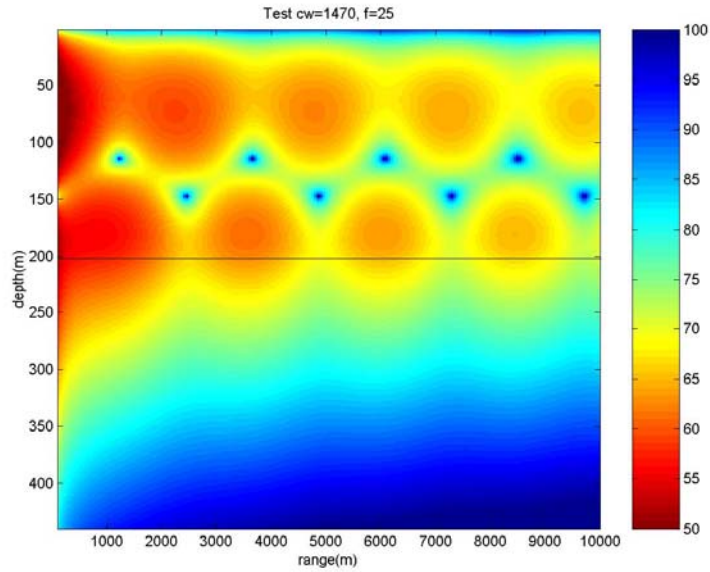


Σχήμα 3.13 Περιβάλλον Pekeris ρηχής θάλασσας για τον υπολογισμό του ακουστικού πεδίου που εμφανίζεται στα επόμενα σχήματα



Σχήμα 3.14 Απώλεια διάδοσης μέχρι τα 10 km για το περιβάλλον του σχήματος 3.13 με γραμμικά αυξανόμενο προφίλ ταχύτητας μέχρι την απόσταση των 10 km. Συχνότητα πηγής 25 Hz.

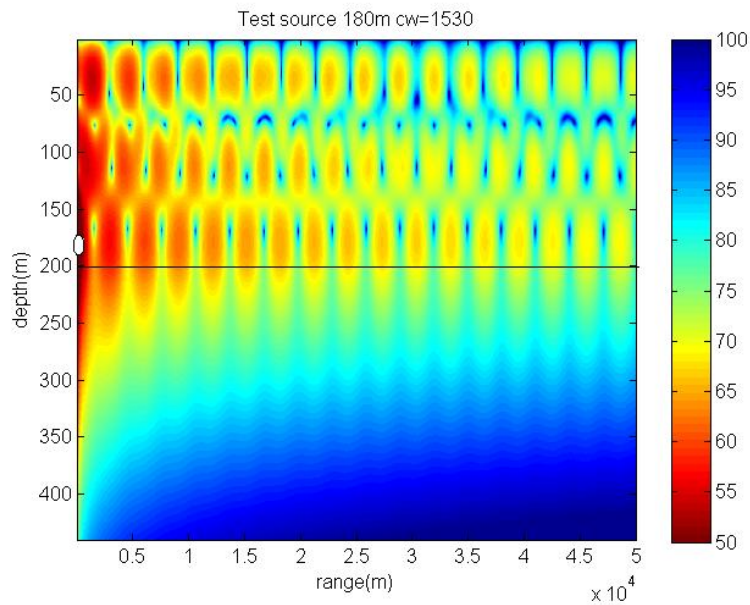
Το Σχήμα 3.14 εμφανίζει χαρακτηριστική περίπτωση διάδοσης του ήχου σε μία ιδιομορφή (mode). Είναι εμφανής η μεγάλη απώλεια διάδοσης στον πυθμένα αλλά και η δυνατότητα ακουστικής διάδοσης στα επιφανειακά τουλάχιστον στρώματα σε οριζόντιες αποστάσεις κοντά στην πηγή.



Σχήμα 3.15 Απώλεια διάδοσης μέχρι τα 10 km για το περιβάλλον του σχήματος 3.13 με γραμμικά μειούμενο προφίλ ταχύτητας μέχρι την απόσταση των 10 km. Συχνότητα πηγής 25 Hz.

Στο Σχήμα 3.15 παρατηρούμε διάδοση σε δύο ιδιομορφές, ενώ η εισχώρηση της ακουστικής ενέργειας στον πυθμένα είναι περισσότερο σημαντική σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση. Ο λόγος είναι ότι το αρνητικό προφίλ ταχύτητας οδηγεί την ενέργεια προς μεγαλύτερα βάθη.

Τέλος στο Σχήμα 3.15 παρουσιάζεται μία περίπτωση διάδοσης με περισσότερες ιδιομορφές. Αφορά και πάλι στο περιβάλλον του Σχήματος 3.13 με το θετικό προφίλ ταχύτητας. Η διαφορά σε σχέση με την περίπτωση του σχήματος 3.14 είναι ότι τώρα πλέον η συχνότητα της πηγής είναι 100 Hz (τρεις ιδιομορφές διάδοσης) ενώ και η πηγή έχει μετακινηθεί σε βάθος 180 μέτρων (κοντά στον πυθμένα).

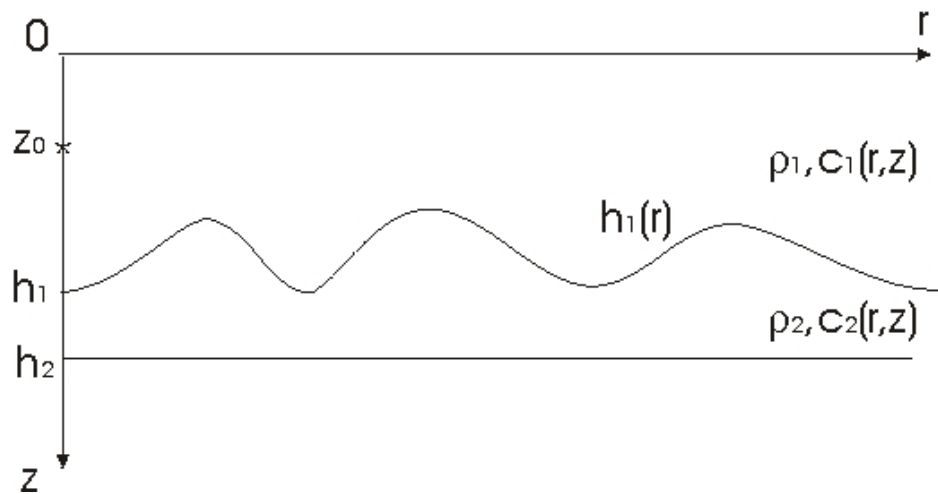


Σχήμα 3.16 Απώλεια διάδοσης μέχρι τα 10 km για το περιβάλλον του σχήματος 3.13 με γραμμικά μειούμενο προφίλ ταχύτητας μέχρι την απόσταση των 10 km. Συχνότητα πηγής 100 Hz.

4 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

4.1 Γενική περίπτωση

Θα μελετήσουμε στη συνέχεια το πρόβλημα της ακουστικής διάδοσης σε ένα περιβάλλον όπου οι παράμετροι που το χαρακτηρίζουν (ταχύτητα ήχου, γεωμετρία συνόρων) μεταβάλλονται μόνο με την απόσταση r σε ένα κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων. Ένα περιβάλλον της μορφής αυτής φαίνεται στο σχήμα 4.1



Σχήμα 4.1 Ένα περιβάλλον μεταβαλλόμενων συναρτήσεων της απόστασης παραμέτρων σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων.

Θα θεωρήσουμε ότι το περιβάλλον ορίζεται από ένα επίπεδο σύνορο σε βάθος h_2 με οριακή συνθήκη ακλόνητου πυθμένα εκεί, ώστε να κάνουμε άμεση αναφορά στο πρόβλημα "Sturm-Liouville". Η πυκνότητα θα θεωρηθεί ανεξάρτητη από την απόσταση. Οι οριακές συνθήκες του προβλήματος θα θεωρηθούν όπως και στα προηγούμενα προβλήματα (ελεύθερη επιφάνεια θάλασσας, συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld και συνθήκες διεπιφάνειας. Προσοχή όμως. Στην διεπιφάνεια η κάθετη ταχύτητα είναι ανάλογη της κάθετης παραγώγου της πίεσης. Λόγω της γεωμετρίας της διεπιφάνειας, η κάθετη παράγωγος δεν είναι παράγωγος ως προς το βάθος z .

Για μία σημειακή αρμονική πηγή σε βάθος z_0 , η κυματική εξίσωση γράφεται :

$$\frac{\partial^2 p(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 p(r, z)}{\partial z^2} + k^2(r, z)p(r, z) = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r)\delta(z - z_0) \quad (4.1.1)$$

Σε κάθε απόσταση r , θα θεωρήσουμε την ομάδα ιδιοσυναρτήσεων του τοπικού προβλήματος βάθους:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial u_n(r, z)}{\partial z} \right] + \left[\frac{k^2(r, z)}{\rho(z)} - \frac{\lambda_n(r)}{\rho(z)} \right] u_n(z) = 0 \quad (4.1.2)$$

όπου
$$u_n(r, z) = \begin{cases} u_n^{(1)}(r, z) & \text{για } 0 \leq z \leq h_1(r) \\ u_n^{(2)}(r, z) & \text{για } h_1(r) \leq z \leq h_2 \end{cases}$$

$$k(r, z) = \begin{cases} k^{(1)}(r, z) & \text{για } 0 \leq z \leq h_1(r) \\ k^{(2)}(r, z) & \text{για } h_1(r) \leq z \leq h_2 \end{cases}$$

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_1 & \text{για } 0 \leq z \leq h_1(r) \\ \rho_2 & \text{για } h_1(r) \leq z \leq h_2 \end{cases}$$

και

$$u_n^{(1)}(r, 0) = 0 \quad (4.1.3\alpha)$$

$$u_n^{(1)}(r, h_1(r)) = u_n^{(2)}(r, h_1(r)) \quad (4.1.3\beta)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial u_n^{(1)}(r, h_1(r))}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial u_n^{(2)}(r, h_1(r))}{\partial z} \quad (4.1.3\gamma)$$

$$\frac{\partial u_n^{(2)}(r, h_2)}{\partial z} = 0 \quad (4.1.3\delta)$$

Γνωρίζουμε ότι υπό τις ανωτέρω συνθήκες, το πρόβλημα βάθους είναι ένα κανονικό πρόβλημα ιδιοτιμών, και ότι οι ιδιοσυναρτήσεις αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύστημα. Επιπλέον είναι πλήρεις στο $[0, h_2]$ οπότε μπορούμε να γράψουμε την λύση για την p της Helmholtz (ιδέ 4.1.1) ως μία συγκλίνουσα σειρά.

$$p(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(r) u_n(r, z) \quad (4.1.4)$$

Αξίζει στο σημείο αυτό να παρατηρήσουμε τα εξής:

1. Η ακουστική πίεση δεν υπόκειται ακριβώς στις ίδιες συνθήκες στη διεπιφάνεια, σε σχέση με τις ιδιοσυναρτήσεις. Αυτό θα ισχύει μόνο εάν η διεπιφάνεια είναι επίπεδη και οριζόντια, οπότε η κάθετη σ' αυτήν παράγωγος είναι παράγωγος ως προς z . Επομένως μόνο στην περίπτωση αυτή εξασφαλίζεται απόλυτη και ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς 4.1.4
2. Οι ιδιοσυναρτήσεις ορίζονται σε κάθε r ως συναρτήσεις του z . Όμως στον συμβολισμό που ακολουθήσαμε φαίνονται ως συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Στην πραγματικότητα θα πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας ότι οι ιδιοσυναρτήσεις ορίζονται συνεχώς για κάθε r

Σημειώνουμε στο σημείο αυτό τη συνθήκη ορθοκανονικότητας των ιδιοσυναρτήσεων που είναι:

$$\int_0^{h_2} \frac{1}{\rho(z)} u_n(r, z) u_m(r, z) dz = \delta_{nm} \quad (4.1.5)$$

Θα θεωρήσουμε προς στιγμήν ότι στο πεδίο ορισμού του προβλήματος δεν υπάρχει πηγή, οπότε αντικατάσταση της 4.1.4 στην ομογενή της 4.1.1 δίνει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 \phi_n}{dr^2} u_n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d\phi_n}{dr} \frac{\partial u_n}{\partial r} + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \phi_n}{\partial r} u_n + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \frac{\partial u_n}{\partial r} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n \phi_n = 0 \quad (4.1.6)$$

Εάν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση με $\frac{1}{\rho(z)} u_m(z)$ και ολοκληρώσουμε από 0 έως h_2 παίρνουμε:

$$\frac{d^2 \phi_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi_m}{dr} + \lambda_m(r) \phi_m = - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{mn}(r) \phi_n + B_{mn}(r) \left[\frac{\phi_n}{r} + 2 \frac{d\phi_n}{dr} \right] \right\} \quad (4.1.7)$$

όπου

$$A_{mn}(r) = \int_0^{h_2} \frac{1}{\rho(z)} u_m(r, z) \frac{\partial^2 u_n(z, r)}{\partial r^2} dz \quad \text{και} \quad (4.1.8)$$

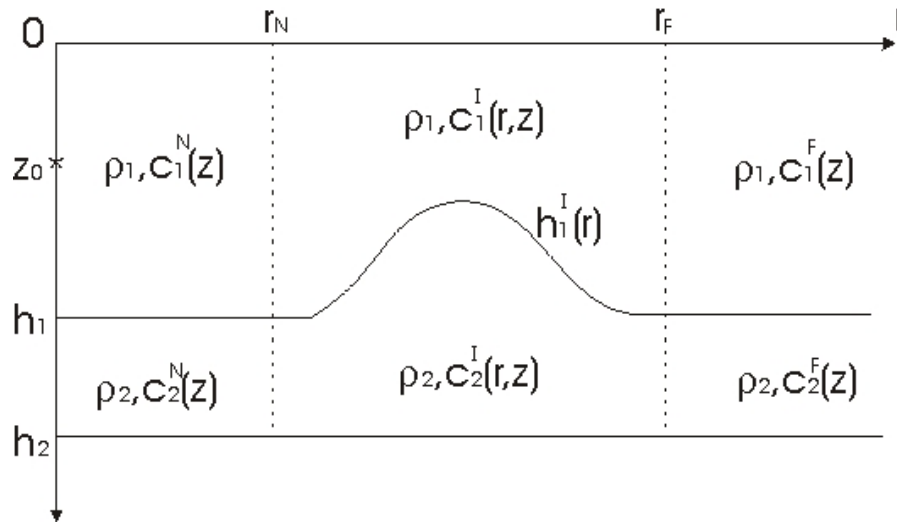
$$B_{mn}(r) = \int_0^{h_2} \frac{1}{\rho(z)} u_m(r, z) \frac{\partial u_n(z, r)}{\partial r} dz \quad (4.1.9)$$

Οι συντελεστές A_{mn} και B_{mn} καλούνται "συντελεστές σύζευξης" (coupling coefficients) και εκφράζουν το βαθμό αλληλεξάρτησης τις ακουστικής διάδοσης μέσω των διαφόρων ιδιομορφών. Στη παρούσα περίπτωση, η διάδοση μιας ιδιομορφής (τάξης m) εξαρτάται από τη διάδοση όλων των υπόλοιπων ιδιομορφών.

Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι εξετάσαμε το πρόβλημα στην απλή περίπτωση που το πεδίο ορισμού δεν έχει πηγή. Η εισαγωγή της πηγής στο πρόβλημα και η αναζήτηση της αντίστοιχης συνάρτησης Green περιπλέκει ακόμη περισσότερο τα πράγματα αλλά η φιλοσοφία επίλυσης με την εισαγωγή των συντελεστών σύζευξης παραμένει η ίδια. Ωστόσο το πρόβλημα στην γενική του περίπτωση αυτό δεν είναι εύκολο να λυθεί. Παρά το γεγονός ότι έχουν προταθεί μέθοδοι για την απλοποίησή του, φαίνεται ότι είμαστε ακόμη μακριά από την επίλυση του προβλήματος σε περιβάλλοντα με γενική γεωμετρία. Στη συνέχεια θα δούμε πως μπορούμε να προσεγγίσουμε κάποια περιβάλλοντα ειδικής μορφής και να πάρουμε ικανοποιητικές προσεγγίσεις της πίεσης.

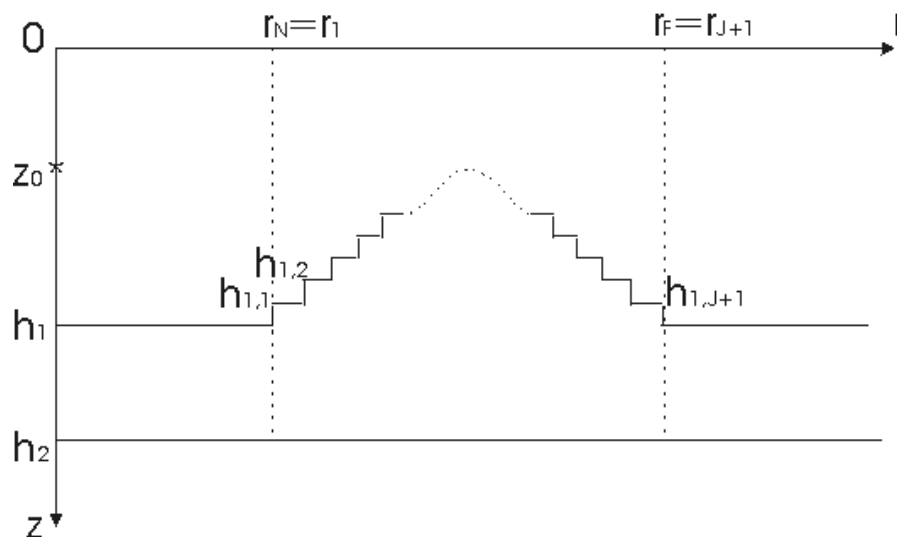
4.2 Περιβάλλον με τοπική ανομοιομορφία

Ας θεωρήσουμε το περιβάλλον του επόμενου σχήματος. Χαρακτηρίζεται από μια τοπική ανομοιομορφία, έξω από την οποία όλες οι παράμετροι του προβλήματος θεωρούνται σταθερές με την απόσταση.



Σχήμα 4.2 Περιβάλλον με τοπική ανομοιομορφία

Έτσι μπορούμε να διακρίνουμε τρεις υποπεριοχές για τη μελέτη του προβλήματος: Την περιοχή "κοντά" στην πηγή (δείκτης N από το **N**ear) την περιοχή της ανομοιομορφίας (I από το **I**ntermediate) και την περιοχή μακράν της ανομοιομορφίας (F από το **F**ar). Οι οριακές συνθήκες στην επιφάνεια και τον πυθμένα παραμένουν οι ίδιες : (ελεύθερη επιφάνεια-ακλόνητος πυθμένας) ενώ ισχύει και πάλι η συνέχεια της πίεσης και της κάθετης ταχύτητας στην διεπιφάνεια ($h_1(r)$). Την ενδιάμεση υποπεριοχή χωρίζουμε σε κυλινδρικούς δακτυλίους που ορίζονται από ακτίνες r_j όπως στο σχήμα 4.3 . Οι δακτύλιοι είναι συνολικά J τον αριθμό.



Σχήμα 4.3: Διακριτοποίηση της ανομοιογένειας ανάμεσα στο r_N και το r_F .

Σε κάθε έναν από τους δακτυλίους οι παράμετροι του προβλήματος μεταβάλλονται μόνο με το βάθος. Η γενική διαφορική εξίσωση και οι συνθήκες που διέπουν το φαινόμενο είναι ταυτόσημες με εκείνες του προηγούμενου προβλήματος με την παρατήρηση ότι οι παράγωγοι που είναι κάθετες στην διεπιφάνεια χωρίζονται σε παραγώγους ως προς το βάθος και την απόσταση. .

Σε κάθε δακτύλιο με δείκτη j ορίζουμε ένα πρόβλημα "βάθους"

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\rho_j(z)} \frac{du_{n,j}(z)}{\partial z} \right] + \left[\frac{k_j^2(z)}{\rho_j(z)} - \frac{\lambda_{n,j}}{\rho_j(z)} \right] u_{n,j}(z) = 0 \quad (4.1.10)$$

όπου $u_{n,j}(z)$ ορίζεται με δείκτες (1) και (2) σε κάθε λωρίδα (νερό, ίζημα) και το ίδιο ισχύει για τα k_j και τα $\rho_j(z)$:

Οι συνθήκες ορίων και διεπιφάνειας είναι :

$$u_{n,j}^{(1)}(0) = 0 \quad (4.1.11\alpha)$$

$$u_{n,j}^{(1)}(h_{1,j}) = u_{n,j}^{(2)}(h_{1,j}) \quad (4.1.11\beta)$$

$$\frac{1}{\rho_{1,j}} \frac{du_{n,j}^{(1)}(h_{1,j})}{dz} = \frac{1}{\rho_{2,j}} \frac{du_{n,j}^{(2)}(h_{1,j})}{dz} \quad (4.1.11\gamma)$$

$$\frac{du_{n,j}^{(2)}(h_2)}{dz} = 0 \quad (4.1.11\delta)$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις $u_{n,j}(z)$ είναι ορθοκανονικές και επομένως κάθε συνεχής συνάρτηση στο $[0, h_2]$ με ίδιες οριακές συνθήκες αναπτύσσεται σε μία ομοιόμορφα συγκλίνουσα σειρά:

$$p_j(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{n,j}(r) u_{n,j}(z) \quad (4.1.12)$$

Όμως καταλήξαμε έτσι στον ορισμό συναρτήσεων p_j , $j = N, 1, 2, \dots, J, F$ (αν περιλάβουμε τους χώρους του εγγύς και πέραν πεδίου) οι οποίες θα πρέπει να είναι συμβιβαστές στα τεχνητά σύνορα r_j ώστε να έχει το πρόβλημα μοναδική λύση. Οι συνθήκες συνέχειας της πίεσης και της κάθετης ταχύτητας στα όρια r_j θα μας δώσουν τις απαραίτητες συνθήκες γι'αυτό:

$$p_j(r_j, z) = p_{j+1}(r_j, z) \quad (4.1.13\alpha)$$

$$\frac{1}{\rho_j} \frac{\partial p_j(r_j, z)}{\partial r} = \frac{1}{\rho_{j+1}} \frac{\partial p_{j+1}(r_j, z)}{\partial r} \quad (4.1.13\beta)$$

Όσο για τις συναρτήσεις $\phi_{n,j}(r)$ εύκολα μπορεί κανείς να δείξει ότι σε κάθε υποχωρίο $j=1, 2, \dots, j+1, F$ υπακούουν στην διαφορική εξίσωση τύπου Bessel :

$$\frac{d^2 \phi_{n,j}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi_{n,j}}{dr} + \lambda_{n,j} \phi_{n,j} = 0 \quad (4.1.14)$$

που έχει γενική λύση εκφρασμένη μέσω συναρτήσεων Hankel την :

$$\phi_{n,j}(r) = A_{n,j} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,j}} r) + B_{n,j} H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{n,j}} r) \quad (4.1.15)$$

Οι συντελεστές $A_{n,j}$ και $B_{n,j}$ θα προκύψουν από τις συνθήκες συνεργασίας στις κατακόρυφες επιφάνειες που ορίζονται για $r = r_j$ (4.1.13α και 4.1.13β).

Από φυσικής πλευράς οι δύο όροι στην 4.1.15 εκφράζουν ενέργεια που οδεύει προς τα αυξανόμενα και μειούμενα r αντίστοιχα.

Για την περίπτωση που $j=F(=J+1)$ γνωρίζουμε από τη συνθήκη ακτινοβολίας ότι $B_{n,j}=0$ καθώς δεν υπάρχει ενέργεια που να επανακτινοβολείται από το άπειρο και να οδεύει προς την αρχή των αξόνων.

Απομένει η μελέτη της συνθήκης πηγής: στο χωρίο που ορίζεται από $0 < r < r_1 = r_N$ και στο οποίο περιλαμβάνεται η ακουστική πηγή. Στο χωρίο αυτό μπορούμε να χωρίσουμε τη λύση μας σε δύο όρους. Ο πρώτος όρος αφορά τη λύση για το πρόβλημά μας όταν δεν υπάρχει η ανομοιογένεια (πεδίο ακτινοβολίας) και ο δεύτερος αφορά τη λύση για το πρόβλημα που προκύπτει λόγω της ανομοιομορφίας (πεδίο περίθλασης) γράφοντας

$$p(r, z) = p_r(r, z) + p_d(r, z) \quad (4.1.16)$$

Η πληροφορία μας για την πηγή ενσωματώνεται στον πρώτο όρο (πίεση ακτινοβολίας) ενώ ο δεύτερος όρος «διορθώνει» την ακουστική πίεση λόγω της ύπαρξης της ανομοιογένειας. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η εξίσωση στην οποία υπακούει η p_r είναι η μη ομογενής Helmholtz με τις παραμέτρους του μέσου (1) ενώ η p_d υπακούει σε μια ομογενή Helmholtz. Οι οριακές συνθήκες στις οριζόντιες διαχωριστικές επιφάνειες του πρώτου χωρίου είναι ίδιες και για τα δύο προβλήματα τα οποία διαφέρουν μόνο ως προς την ύπαρξη του όρου διέγερσης από την πηγή για το πεδίο ακτινοβολίας και την συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld που δεν υφίσταται για το πεδίο περίθλασης. Το πρόβλημα επομένως για το πεδίο ακτινοβολίας ανάγεται σε ένα από τα γνωστά προβλήματα που έχουμε δει μέχρι τώρα και επομένως η λύση του είναι γνωστής μορφής

$$p_r(r, z) = \frac{1}{4\rho_1} \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,N}(z_0) u_{n,N}(z) H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,N}} r) \quad (4.1.17)$$

Για το πεδίο περίθλασης αρκεί να διαπιστώσουμε ότι αναπαράγουμε ένα από τα προβλήματα που διατυπώσαμε σε καθένα από τους κατακόρυφους εσωτερικούς δακτυλίους του χωρίου, με την διαφορά ότι καθώς το $r=0$ περιλαμβάνεται στο πεδίο ορισμού, η λύση για την συνάρτηση ϕ_N θα πρέπει να είναι αναλυτική και στο σημείο αυτό. Από την θεωρία των συναρτήσεων Bessel γνωρίζουμε ότι για να συμβεί αυτό η λύση της αντίστοιχης εξίσωσης Bessel (4.1.14 για $i=N$) πρέπει να εκφράζεται μέσω της συνάρτησης Bessel πρώτου είδους $J_0(x)$. Παίρνομε λοιπόν :

$$p_d(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n,N} J_0(\sqrt{\lambda_{n,N}} r) u_{n,N}(z) \quad (4.1.18)$$

Στη συνέχεια πρέπει να υπολογίσουμε τους άγνωστους συντελεστές A, B και C . Διαπιστώνουμε ότι δεν είναι δυνατός ο υπολογισμός τους εάν δεν θεωρήσουμε πεπερασμένο αριθμό όρων στις σειρές. Ευτυχώς τα θεωρήματα αναπαράστασης που εξασφαλίζουν την σύγκλιση της σειράς μας επιτρέπουν να διατηρήσουμε ένα μεγάλο αριθμό όρων, έστω M σε όλες τις σειρές. Λογαριάζοντας τώρα τους αγνώστους του προβλήματος διαπιστώνουμε ότι αυτοί είναι $2 \times M \times (J+1)$, όπως προκύπτει εάν θεωρήσουμε ότι έχουμε M αγνώστους ($C_{n,N}$) για το εγγύς πεδίο $2 \times M \times J$ αγνώστους ($A_{n,j}, B_{n,j}$) στα J χωρία διαμερισμού της ανομοιογένειας και M αγνώστους ($A_{n,F}$) στο μακρινό πεδίο.

Ο υπολογισμός των αγνώστων θα γίνει μέσω των συνθηκών συνεργασίας στα κατακόρυφα "τεχνητά" σύνορα των ειδικών χωρίων διαμερισμού.

Η φυσική επιβάλλει συνέχεια της πίεσης και της κάθετης ταχύτητας στις κατακόρυφες τεχνητές διεπιφάνειες, όπως ακριβώς απαιτείται στις οριζόντιες. Επομένως οι συνθήκες που πρέπει να επιβληθούν στις επιφάνειες $r=r_j$ είναι οι 4.1.13α και 4.1.13β

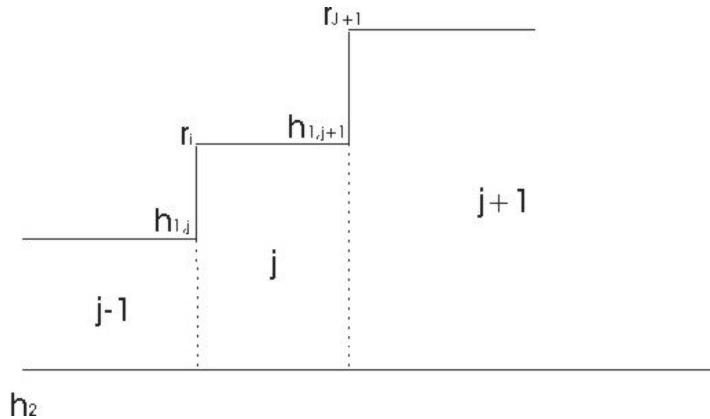
Υπενθυμίζουμε τις εκφράσεις για τις πιέσεις στα διάφορα χωρία, με βάση τις σχέσεις 4.12, 4.15-4.18 και την παρατήρηση για μέγιστη τάξη ιδιοσυναρτήσεων M :

$$p_N(r, z) = \frac{1}{4\rho_1} \sum_{n=1}^M u_{n,N}(z_0) u_{n,N}(z) H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,N}} r) + \sum_{n=1}^M C_{n,N} J_0(\sqrt{\lambda_{n,N}} r) u_{n,N}(z) \quad (4.1.19)$$

$$p_j(r, z) = \sum_{n=1}^M \left\{ A_{n,j} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,j}} r) + B_{n,j} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,j}} r) \right\} u_{n,j}(z), \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (4.1.20)$$

$$p_F(r, z) = \sum_{n=1}^M A_{n,F} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,F}} r) u_{n,F}(z) \quad (4.1.21)$$

Οι συνθήκες 4.1.13 εφαρμοζόμενες χωρίς επεξεργασία δεν μπορούν βέβαια να δώσουν τις απαραίτητες εξισώσεις για να υπολογιστούν οι αγνώστοι του προβλήματος.



Σχήμα 4.4 . Λεπτομέρεια του διαχωρισμού στα εσωτερικά πεδία

Για να διατυπωθεί ο ανάλογος αριθμός εξισώσεων και να καταλήξουμε σε ένα γραμμικό σύστημα ως προς τους αγνώστους του προβλήματος, επιβάλλεται η αξιοποίηση της συνθήκης ορθοκανονικότητας που γίνεται με τον γνωστό τρόπο δηλαδή με πολλαπλασιασμό των σχέσεων 4.1.13 με $\frac{1}{\rho_j} u_{m,j}(z)$ και $u_{m,j}(z)$

αντίστοιχα και ολοκλήρωση από 0 έως h_2 . Οι όροι για τους οποίους $m \neq n$ θα μηδενιστούν και θα παραμείνουν εκφράσεις της μορφής :

$$A_{m,j} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{m,j}} r_j) + B_{m,j} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{m,j}} r_j) = \int_0^{h_2} \frac{1}{\rho_j} \sum_{n=1}^M \{A_{n,j} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,j}} r_j) + B_{n,j} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,j}} r_j)\} u_{n,j+1} u_{m,j} dz \quad (4.1.22)$$

και αντίστοιχες με παραγώγους των συναρτήσεων Hankel.

Μπορούμε τώρα να κάνουμε χρήση των ιδιοτήτων των Hankel:

$$\frac{dH_0^{(\kappa)}(\kappa r)}{dr} = -\kappa H_1^{(\kappa)}(\kappa r) \quad (4.1.23)$$

$$H_1^{(1)}(\kappa r) = -iH_0^{(1)}(\kappa r) \quad \text{και} \quad H_1^{(2)}(\kappa r) = iH_0^{(2)}(\kappa r) \quad (4.1.24)$$

και να χρησιμοποιήσουμε τις αντικαταστάσεις:

$$C_{1mn} = \int_0^{h_2} \frac{1}{\rho_j} u_{m,j} u_{n,j+1} dz \quad (4.1.25)$$

$$C_{2mn} = \int_0^{h_2} \frac{1}{\rho_{j+1}} u_{m,j} u_{n,j+1} dz \quad (4.1.26)$$

για να απλοποιήσουμε τις σχέσεις.

Εύκολα μπορεί να δεί κανείς ότι καταλήγουμε σε $2 \times M \times (J+1)$ εξισώσεις της μορφής 4.1.22 και της αντίστοιχης με τις παραγώγους που απαρτίζουν ένα γραμμικό σύστημα, και η επίλυση του οποίου μας δίνει τους αγνώστους συντελεστές.

Δεν θα επεκταθούμε περισσότερο στο εν λόγω πρόβλημα. Θα σημειώσουμε μόνο ότι οι συντελεστές C_{1mn} και C_{2mn} ονομάζονται **συντελεστές σύζευξης** (coupling coefficients) (δείτε αντίστοιχους συντελεστές στις σχέσεις 4.1.8 και 4.1.9), εκφράζουν την ανταλλαγή ενέργειας κατά την διάδοση του ήχου στις διάφορες κυματομορφές, η δε μέθοδος που αναπτύξαμε ονομάζεται μέθοδος "συζευγμένων ιδιομορφών" και το χαρακτηριστικό της είναι ότι δεν βασίζεται σε καμία παραδοχή ως προς την μορφή της εξίσωσης και το πρόβλημα που επιλύει. Τα μόνα ερωτηματικά, αφορούν την σύγκλιση της μεθόδου όσον αφορά τη διακριτοποίηση του χωρίου και μόνο. Να σημειώσουμε ωστόσο ότι είναι υπολογιστικά απαιτητική, ιδιαίτερα όταν η ακρίβεια που ζητάμε επιβάλει τη θεώρηση μεγάλης τάξης ιδιομορφών στις αναπαραστάσεις (υψηλές συχνότητες μεγάλα βάθη). Επίσης θα πρέπει να πούμε ότι εντελώς αντίστοιχα μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος σε περιβάλλον με ημίαιρο πυθμένα, οπότε οι σειρές που αναπαριστούν την ακουστική πίεση έχουν έτσι κι αλλιώς πεπερασμένους όρους, όσες είναι και οι κανονικές ιδιομορφές του προβλήματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Boyles, Allan: *Acoustic Waveguides. Applications to Oceanic Science*, John Wiley, 1984.
2. Churchill, R.V., Brown, J.W. and Verhey R.F.: *Complex Variables and Applications*, McGraw-Hill, 1974.
3. De Santo, J.A.: *Scalar Wave Theory*, Springer Verlag, Berlin 1992.
4. Etter, Paul.: *Underwater Acoustic Modelling*, Elsevier, London, 1991.
5. Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M.: *Tables of Integrals, Series and Products*, Academic Press, Orlando, 1980.
6. Jensen, F., Kuperman W., Porter, M. And Schmidt, H.: *Computational Ocean Acoustics*, Springer Verlag, New York 2000.
7. Kinsler, L., Frey, A., Coppens, A. and Sanders, J.: *Fundamentals of Acoustics*, John Wiley, 1982.
8. Morse, P. and Feshbach, H.: *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York, 1953.
9. Tolstoy, I. and Clay, C.S. : *Ocean Acoustics: Theory and Experiment in Underwater Sound*, American Institute of Physics, New York, 1987.
10. Zauderer, Erich: *Partial Differential Equations*, John Wiley, Singapore 1989,