Σημειώσεις Θεωρίας Μέτρου

Θέμης Μήτσης

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης
Ηράκλειο

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Μέτρα

Ορισμός 1.1. *Έστω X ένα σύνολο. Μια οικογένεια $\mathscr{A}$ υποσυνόλων τού X ονομάζεται σ-άλγεβρα αν*

(1) $X \in \mathscr{A}$.

(2) $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^{\complement} \in \mathscr{A}$ *(η $\mathscr{A}$ είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα).*

(3) $A_n \in \mathscr{A}$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$ *(η $\mathscr{A}$ είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις).*

Το ζευγάρι $(X, \mathscr{A})$ ονομάζεται μετρήσιμος χώρος και τα στοιχεία της $\mathscr{A}$ μετρήσιμα σύνολα.

Παραδείγματα.

- Ολόκληρο το δυναμοσύνολο $\mathscr{P}(X)$ και η οικογένεια $\{\emptyset, X\}$ είναι (τετριμμένα) παραδείγματα σ-αλγεβρών.
- Αν το X είναι υπεραριθμήσιμο τότε η οικογένεια $\{A \subset X : A$ ή $A^{\complement}$ αριθμήσιμο$\}$ είναι σ-άλγεβρα.

Παρατήρηση. Η τομή είναι το συμπλήρωμα τής ένωσης των συμπληρωμάτων, άρα μια σ-άλγεβρα είναι κλειστή ως προς όλες τις συνολοθεωρητικές πράξεις αρκεί αυτές να πραγματοποιούνται αριθμήσιμες το πλήθος φορές.

Ορισμός 1.2. *Αν η $\mathscr{C}$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου X τότε η τομή όλων των σ-αλγεβρών που περιέχουν τη $\mathscr{C}$, δηλαδή*

$$\bigcap_{\substack{\mathscr{C}\subset\mathscr{A}\subset\mathscr{P}(X)\\ \mathscr{A}\ \sigma\text{-άλγεβρα}}} \mathscr{A}$$

είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει τη $\mathscr{C}$, συμβολίζεται με $\sigma(\mathscr{C})$ και ονομάζεται η σ-άλγεβρα που παράγεται από τη $\mathscr{C}$.

Παραδείγματα. Αν το X είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο, τότε η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των μονοσυνόλων είναι ολόκληρο το δυναμοσύνολο. Αν το X είναι υπεραριθμήσιμο, τότε η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα μονοσύνολα είναι $\{A \subset X : A$ ή $A^{\complement}$ αριθμήσιμο$\}$.

Ορισμός 1.3. *Αν ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα ανοιχτά σύνολα ονομάζεται σ-άλγεβρα των συνόλων Borel και συμβολίζεται με $\mathscr{B}(X)$.*

Παράδειγμα. Στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη τοπολογία έχουμε

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{F \subset \mathbb{R} : F \text{ κλειστό}\}) = \sigma(\{(a, b) : a < b\})$$

Ορισμός 1.4. *Ένας χώρος μέτρου είναι μια τριάδα $(X, \mathscr{A}, \mu)$, όπου X είναι ένα σύνολο, $\mathscr{A}$ μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων τού X και μ μια συνολοσυνάρτηση*

$$\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$$

με τις ιδιότητες

(1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) *Αν τα A_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι μετρήσιμα και ξένα ανά δύο τότε*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Το μ λέγεται μέτρο και η δεύτερη ιδιότητα παραπάνω, προσθετικότητα. Αν το σύνολο στο οποίο μια ιδιότητα δεν ισχύει έχει μέτρο μηδέν, τότε λέμε ότι η ιδιότητα ισχύει σχεδόν παντού.

Παραδείγματα.

(1) Αν το X είναι ένα σύνολο και x_0 ένα σταθεροποιημένο στοιχείο τού X, τότε η τριάδα $(X, \mathscr{P}(X), \delta_{x_0})$, όπου

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x_0 \in A \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases},$$

είναι χώρος μέτρου. Το δ_{x_0} ονομάζεται μέτρο Dirac (Ο συμβολισμός με "δ" είναι παραδοσιακός για το συγκεκριμένο μέτρο).

(2) Αν το X είναι ένα σύνολο, τότε η τριάδα $(X, \mathscr{P}(X), \mu)$, όπου

$$\mu(A) = \begin{cases} |A|, & \text{αν } A \text{ πεπερασμένο} \\ +\infty, & \text{διαφορετικά} \end{cases},$$

είναι χώρος μέτρου. Το μ λέγεται αριθμητικό μέτρο. Παρατηρήστε ότι

$$\mu(A) = \sup\left\{\sum_{x\in F} \delta_x(A) : F \subset X,\ F \text{ πεπερασμένο}\right\}.$$

Θεώρημα 1.5. *Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Τότε*

(1) *(Μονοτονία.) Αν τα A, B είναι μετρήσιμα και $A \subset B$ τότε $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

(2) *(Υποπροσθετικότητα.) Αν τα A_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι μετρήσιμα, τότε*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Απόδειξη.

(1) $B = A \cup (B \setminus A)$, και η ένωση είναι ξένη, άρα από προσθετικότητα

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

(2) Θέτουμε $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k<n} A_k$. Τότε τα B_n είναι ανά δύο ξένα και η ένωσή τους είναι ίση με την ένωση των A_n. Έτσι

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$$

□

Παρατήρηση. Στο (1) τού προηγούμενου θεωρήματος αν το A έχει πεπερασμένο μέτρο, τότε το μέτρο τής συνολοθεωρητικής διαφοράς είναι ίσο με τη διαφορά των μέτρων.

Θεώρημα 1.6. *Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και A_n μια αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων. Τότε*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim \mu(A_n).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τους "δακτυλίους" $B_1 = A_1$ και $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n$. Τότε τα B_n είναι ανά δύο ξένα και η ένωση των n πρώτων είναι ίση με A_n. Επομένως

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

□

Θεώρημα 1.7. *Στο προηγούμενο θεώρημα αν η A_n είναι φθίνουσα και το A_1 έχει πεπερασμένο μέτρο, τότε το μέτρο τής τομής είναι ίσο με το όριο των μέτρων των A_n.*

Απόδειξη. Η $A_1 \setminus A_n$ είναι αύξουσα. □

Παρατήρηση. Το προηγούμενο θεώρημα δεν ισχύει αν τα σύνολα δεν έχουν πεπερασμένο μέτρο. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{N}$ με το αριθμητικό μέτρο, η ακολουθία $A_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$. Τα A_n έχουν άπειρο μέτρο, αλλά η τομή τους είναι κενή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Εξωτερικά μέτρα

Ορισμός 2.1. *Ένα εξωτερικό μέτρο στο σύνολο X είναι μια συνολοσυνάρτηση*

$$\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0, +\infty]$$

τέτοια ώστε

- $\mu^*(\emptyset) = 0$.
- *Αν $A \subset B$ τότε $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$ (μονοτονία).*
- *Για κάθε ακολουθία συνόλων A_n έχουμε (υποπροσθετικότητα)*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n)$$

Κάθε εξωτερικό μέτρο γίνεται μέτρο (δηλαδή προσθετικό), αν περιοριστεί σε μια κατάλληλη σ-άλγεβρα

Θεώρημα 2.2. *Αν το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο στο X και θέσουμε*

$$\mathscr{M}_{\mu^*} = \{E : \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) = \mu^*(A), \ \text{για κάθε } A \subset X\},$$

τότε η $\mathscr{M}_{\mu^*}$ είναι σ-άλγεβρα και το $\mu^*|_{\mathscr{M}_{\mu^*}}$ μέτρο. Τα σύνολα στην $\mathscr{M}_{\mu^*}$ ονομάζονται μ^*-μετρήσιμα.

Απόδειξη.

(1) $\mu^*(A \cap X) + \mu^*(A \setminus X) = \mu^*(A)$, άρα $X \in \mathscr{M}_{\mu^*}$.

(2) $\mu^*(A \cap E^{\complement}) + \mu^*(A \setminus E^{\complement}) = \mu^*(A \setminus E) + \mu^*(A \cap E)$, άρα η $\mathscr{M}_{\mu^*}$ είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα.

(3) Θα δείξουμε ότι η $\mathscr{M}_{\mu^*}$ είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις. Έστω E_n, $n \in \mathbb{N}$, μετρήσιμα και $A \subset X$ τυχόν. Αφού το E_1 είναι μετρήσιμο έχουμε

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \setminus E_1) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^{\complement}).$$

Αφού το E_2 είναι μετρήσιμο έχουμε

$$\mu^*(A \cap E_1^{\complement}) = \mu^*(A \cap E_1^{\complement} \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1^{\complement} \cap E_2^{\complement}).$$

άρα

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap (E_2 \setminus E_1)) + \mu^*(A \setminus (E_1 \cup E_2)).$$

Προχωρώντας ένα βήμα ακόμα, από τη μετρησιμότητα του E_3 παίρνουμε

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap (E_2 \setminus E_1)) + \mu^*(A \cap (E_3 \setminus (E_1 \cup E_2))) + \mu^*(A \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)).$$

Επομένως μετά από n βήματα έχουμε

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \sum_{k=1}^{n} \mu^*\left(A \cap \left(E_k \setminus \bigcup_{j<k} E_j\right)\right) + \mu^*\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)\\ &\ge \sum_{k=1}^{n} \mu^*\left(A \cap \left(E_k \setminus \bigcup_{j<k} E_j\right)\right) + \mu^*\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)\end{aligned}$$

η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε n, άρα

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &\ge \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*\left(A \cap \left(E_k \setminus \bigcup_{j<k} E_j\right)\right) + \mu^*\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)\\ &\ge \mu^*\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(E_k \setminus \bigcup_{j<k} E_j\right)\right) + \mu^*\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)\end{aligned}$$

$$= \mu^*\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) + \mu^*\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right).$$

Αυτό σημαίνει ότι το $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ είναι μετρήσιμο.

Έστω τώρα $E_n \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ξένα ανά δύο, μετρήσιμα. Τότε

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Πράγματι, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n),$$

διότι η αντίστροφη ανισότητα ισχύει πάντα (υποπροσθετικότητα). Στην πορεία της προηγούμενης απόδειξης δείξαμε ότι για κάθε A ισχύει

$$(\star) \qquad \mu^*(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*\left(A \cap \left(E_k \setminus \bigcup_{j<k} E_j\right)\right) + \mu^*\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right).$$

Αφού τα E_n είναι ξένα έχουμε

$$E_k \setminus \bigcup_{j<k} E_j = E_k$$

για κάθε k. Άρα αν στην $(\star)$ θέσουμε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, παίρνουμε το ζητούμενο. □

Ο περιορισμός του μ^* στη σ-άλγεβρα $\mathscr{M}_{\mu^*}$ συμβολίζεται με μ (χωρίς το αστεράκι). Η προηγούμενη κατασκευή μέτρου από εξωτερικό μέτρο οφείλεται στον Carathéodory. Τα μέτρα που προκύπτουν με αυτόν τον τρόπο είναι πλήρη. Δηλαδή κάθε υποσύνολο ενός συνόλου με μέτρο μηδέν είναι μετρήσιμο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Το μέτρο Lebesgue

Ένα ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^d$ είναι ένα σύνολο τής μορφής $R = \prod_{k=1}^d I_k$, όπου τα I_k είναι διαστήματα (οποιουδήποτε τύπου). Ο όγκος τού R συμβολίζεται με $v(R)$ και ορίζεται να είναι το γινόμενο των μηκών των I_k (κάνουμε τη σύμβαση $0 \cdot (+\infty) = 0$). Ένας δυαδικός κύβος είναι ένα ορθογώνιο τής μορφής

$$\prod_{k=1}^{d} \Big[\frac{j_k}{2^n}, \frac{j_k+1}{2^n}\Big),$$

όπου τα j_k είναι ακέραιοι και το n φυσικός. Αποδεικνύεται ότι κάθε ανοιχτό σύνολο γράφεται σαν (αριθμήσιμη) ένωση ξένων ανά δύο δυαδικών κύβων.

Ορισμός 3.1. *Για κάθε $A \subset \mathbb{R}^d$ θέτουμε*

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{+\infty} v(R_n) : A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} R_n,\ R_n \text{ ανοιχτά ορθογώνια}\right\}.$$

Το m^* ονομάζεται εξωτερικό μέτρο Lebesgue. Γράφουμε m_d^* αν θέλουμε να τονίσουμε τη διάσταση.

Το m^* είναι όντως εξωτερικό μέτρο. Για την υποπροσθετικότητα, αν A_n είναι μια ακολουθία συνόλων με πεπερασμένο εξωτερικό μέτρο, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν ανοιχτά ορθογώνια R_j^n τέτοια ώστε

$$A_n \subset \bigcup_j R_j^n, \quad \sum_j v(R_j^n) < m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Επομένως

$$m^*\left(\bigcup_n A_n\right) \le \sum_{j,n} v(R_j^n) < \varepsilon + \sum_n m^*(A_n).$$

Το m ονομάζεται μέτρο Lebesgue και τα m^*-μετρήσιμα σύνολα ονομάζονται Lebesgue μετρήσιμα. Το μέτρο Lebesgue είναι αναλλοίωτο στις μεταθέσεις, δηλαδή αν το A είναι μετρήσιμο τότε και το $x + A = \{x + a : a \in A\}$ είναι μετρήσιμο και $m(A) = m(x + A)$. Επίσης $m(\lambda A) = \lambda^d m(A)$ για κάθε $\lambda > 0$.

Θεώρημα 3.2. *Αν το R είναι οποιοδήποτε ορθογώνιο, τότε $m^*(R) = v(R)$.*

Απόδειξη. Αρκεί να υποθέσουμε ότι το R είναι κλειστό και φραγμένο. Η ανισότητα $m^*(R) \le v(R)$ προκύπτει άμεσα από τον ορισμό τού εξωτερικού μέτρου, θεωρώντας την ανοιχτή κάλυψη που αποτελείται από ένα ορθογώνιο ελαφρώς μεγαλύτερο από το R. Για την αντίστροφη ανισότητα, κάνουμε επαγωγή στη διάσταση d. Για $d = 1$, έστω $R = [a, b]$ και $R \subset \bigcup_{n=1}^\infty I_n$ κάλυψη από ανοιχτά διαστήματα. Το R είναι συμπαγές, άρα η $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχει πεπερασμένη υποκάλυψη, ας πούμε

$$J_1 = (a_1, b_1), J_2 = (a_2, b_2), \ldots, J_N = (a_N, b_N).$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι:

- Κανένα από τα J_k δεν περιέχεται σε κάποιο άλλο.
- Το δεξί άκρο του J_k είναι μεγαλύτερο από το αριστερό άκρο του J_{k+1}, δηλαδή τα J_k είναι "διαδοχικά".

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) &\ge \sum_{k=1}^{N} v(J_k) = \sum_{k=1}^{N}(b_k - a_k)\\ &= -a_1 + (b_1 - a_2) + (b_2 - a_3) + \cdots + (b_{N-1} - a_N) + b_N\\ &\ge b_N - a_1 \ge b - a.\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε κάλυψη του R, επομένως $m^*(R) \geq b - a$. Για $d = 2$ έστω ότι $R = [a, b] \times [c, d]$ και όπως πριν ας υποθέσουμε ότι το R καλύπτεται από τα $R_k = (a_k, b_k) \times (c_k, d_k)$, $k = 1, \ldots, N$. Για κάθε k θέτουμε

$$f_k(x) = \begin{cases} d_k - c_k, & \text{αν } a_k < x < b_k \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Από τη μονοδιάστατη περίπτωση έχουμε ότι για κάθε x

$$d - c \leq \sum_k f_k(x).$$

Επομένως

$$v(R) = \int_a^b (d - c) \leq \sum_k \int_a^b f_k(x)\, dx \leq \sum_k (b_k - a_k)(d_k - c_k) = \sum_k v(R_k).$$

Το γενικό επαγωγικό βήμα $d \to d + 1$ είναι τελείως ανάλογο. □

Θεώρημα 3.3. *Κάθε σύνολο Borel είναι μετρήσιμο.*

Απόδειξη. ($d = 1$) Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$ είναι μετρήσιμο, διότι η οικογένεια των διαστημάτων αυτών παράγει τα σύνολα Borel. Έστω $A \subset \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε ανοιχτά διαστήματα I_n, $n \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < m^*(A) + \varepsilon.$$

Τότε

$$\begin{aligned} m^*(A \cap (a, +\infty)) + m^*(A \setminus (a, +\infty)) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n \cap (a, +\infty)) + \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n \cap (-\infty, a]) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (v(I_n \cap (a, +\infty)) + v(I_n \cap (-\infty, a])) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) < m^*(A) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα

$$m^*(A \cap (a, +\infty)) + m^*(A \setminus (a, +\infty)) \leq m^*(A),$$

το οποίο σημαίνει ότι το $(a, +\infty)$ είναι μετρήσιμο. □

Θεώρημα 3.4. *Αν το A είναι μετρήσιμο τότε:*

(1) *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $G \supset A$ ανοιχτό με $m(G \setminus A) < \varepsilon$.*
(2) *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F \subset A$ κλειστό με $m(A \setminus F) < \varepsilon$.*
(3) *Υπάρχουν σύνολα Borel B_1 και B_2 με $B_1 \subset A \subset B_2$ και $m(B_2 \setminus B_1) = 0$.*

Απόδειξη.

(1) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το A έχει πεπερασμένο μέτρο. Τότε από τον ορισμό τού εξωτερικού μέτρου υπάρχουν ανοιχτά ορθογώνια R_n τέτοια ώστε

$$A \subset \bigcup_n R_n, \quad \sum_n v(R_n) < m(A) + \varepsilon.$$

Θέτουμε $G = \bigcup_n R_n$.
(2) Προκύπτει από το (1) παίρνοντας συμπληρώματα.
(3) Από τα (1) και (2) υπάρχουν ανοιχτά $G_n \supset A$ και κλειστά $F_n \subset A$ με $m(G_n \setminus A) < 1/n$ και $m(A \setminus F_n) < 1/n$. Θέτουμε $B_1 = \bigcup_n F_n$ και $B_2 = \bigcap_n G_n$.

□

Προκύπτει άμεσα από το προηγούμενο θεώρημα ότι για κάθε μετρήσιμο A έχουμε

$$m(A) = \sup\{m(K) : K \text{ συμπαγές}, K \subset A\}, \quad m(A) = \inf\{m(G) : G \text{ ανοιχτό}, G \supset A\}.$$

Όλες οι παραπάνω ιδιότητες αναφέρονται ως "κανονικότητα τού μέτρου Lebesgue". Παρατηρήστε ότι αν το μ είναι ένα πεπερασμένο μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^d$ τότε είναι πάντοτε κανονικό γιατί η οικογένεια

$$\{A : \text{Το } A \text{ είναι Borel και για κάθε } \varepsilon \text{ υπάρχουν } K \subset A \text{ συμπαγές και } G \supset A \text{ ανοιχτό με } \mu(G \setminus K) < \varepsilon\}$$

είναι σ-άλγεβρα και περιέχει τα ανοιχτά σύνολα.

Θεώρημα 3.5. *Το μέτρο Lebesgue είναι το μοναδικό μέτρο Borel μ στον $\mathbb{R}^d$ με την ιδιότητα $\mu(R) = v(R)$ για κάθε ορθογώνιο R.*

Απόδειξη. Έστω E τυχόν σύνολο Borel. Για κάθε κάλυψη τού E από ανοιχτά ορθογώνια R_n έχουμε

$$\mu(E) \leq \sum_n \mu(R_n) = \sum_n v(R_n).$$

Άρα $\mu(E) \leq m(E)$. Έστω τώρα K τυχόν συμπαγές σύνολο. Τότε υπάρχει φραγμένο ανοιχτό ορθογώνιο R με $K \subset R$. Επιλέγουμε ξένους ανά δυο δυαδικούς κύβους Q_n ώστε $R \setminus K = \bigcup_n Q_n$. Έτσι

$$\mu(K) = \mu(R) - \mu(R \setminus K) = \mu(R) - \sum_n \mu(Q_n) = m(R) - \sum_n m(Q_n) = m(K).$$

Επομένως

$$m(E) = \sup\{m(K) : K \text{ συμπαγές}, K \subset E\} = \sup\{\mu(K) : K \text{ συμπαγές}, K \subset E\} \leq \mu(E).$$

□

Θεώρημα 3.6 (Steinhaus)**.** *Έστω E μετρήσιμο με θετικό μέτρο. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε*

$$D(0, \delta) \subset E - E = \{a - b : a, b \in E\}.$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε $K \subset E$ συμπαγές με $\mu(K) > 0$ και $G \supset K$ ανοιχτό με $\mu(G) < 2\mu(K)$. Τα K και $G^{\complement}$ είναι ξένα, το K συμπαγές και το $G^{\complement}$ κλειστό, άρα έχουν θετική απόσταση, ας πούμε $\delta > 0$. Επομένως $K + x \subset G$ για κάθε $|x| < \delta$. Παρατηρούμε τώρα ότι $K \cap (K + x) \neq \emptyset$ για κάθε $|x| < \delta$. Διαφορετικά για κάποιο x θα είχαμε

$$2\mu(K) = \mu(K) + \mu(K + x) = \mu(K \cup (K + x)) \leq \mu(G),$$

το οποίο είναι άτοπο. Επομένως $E \cap (E + x) \neq \emptyset$ για κάθε $|x| < \delta$, το οποίο είναι ισοδύναμο με το ότι $D(0, \delta) \subset E - E$. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Το σύνολο και η συνάρτηση Cantor - Μη Lebesgue μετρήσιμα σύνολα

Κάθε αριθμήσιμο σύνολο έχει μέτρο Lebesgue μηδέν. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Θα δείξουμε ότι υπάρχει υπεραριθμήσιμο συμπαγές σύνολο με μηδενικό μέτρο. Η κατασκευή γίνεται σε διαδοχικά βήματα και είναι η ακόλουθη.
Στο πρώτο βήμα χωρίζουμε το διάστημα $I = [0, 1]$ σε τρία διαδοχικά διαστήματα ίσου μήκους :

$$I = [0, 1] = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Πετάμε έξω το μεσαίο, και έτσι από το I μένουν 2 ξένα κλειστά διαστήματα μήκους $1/3$. Τα ονομάζουμε I_0, I_1 και θέτουμε

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] = I_0 \cup I_1.$$

Δηλαδή το I παράγει ένα "αριστερό" διάστημα I_0, και ένα "δεξί" διάστημα I_1.
Στο δεύτερο βήμα, κάνουμε το ίδιο στα διαστήματα I_0, I_1: Τα χωρίζουμε στα τρία

$$I_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right] = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right],$$

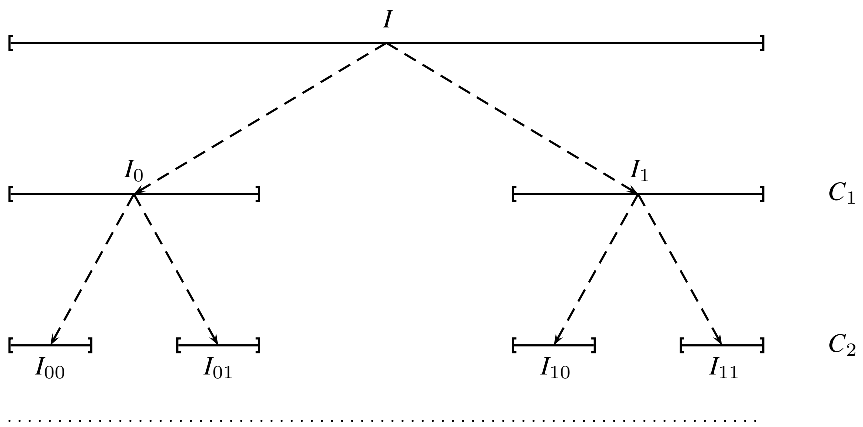
$$I_1 = \left[\frac{2}{3}, 1\right] = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right],$$

και πετάμε έξω τα μεσαία. Από το I έχουν μείνει τώρα 4 ξένα κλειστά διαστήματα μήκους $1/9$, τα οποία ονομάζουμε $I_{00}, I_{01}, I_{10}, I_{11}$. Θέτουμε

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] = I_{00} \cup I_{01} \cup I_{10} \cup I_{11}.$$

Όπως και στο προηγούμενο βήμα, το I_0 παράγει ένα αριστερό διάστημα I_{00}, και ένα δεξί διάστημα I_{01} . Ομοίως και το I_1.
Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Στο n βήμα, από το I έχουν μείνει 2^n ξένα κλειστά διαστήματα μήκους $1/3^n$. Τα ονομάζουμε $I_{d_1 \cdots d_n}$, $d_1, \ldots, d_n \in \{0, 1\}$, κάνοντας τη σύμβαση ότι κάθε διάστημα $I_{d_1 \cdots d_{n-1}}$ του προηγούμενου βήματος παράγει το αριστερό $I_{d_1 \cdots d_{n-1} 0}$ και το δεξί $I_{d_1 \cdots d_{n-1} 1}$. Θέτουμε

$$C_n = \bigcup_{d_1, \ldots, d_n \in \{0,1\}} I_{d_1 \cdots d_n}.$$



Η C_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων. Θέτουμε

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\bigcup_{d_1, \ldots, d_n \in \{0,1\}} I_{d_1 \cdots d_n} \right] = \bigcup_{s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}} \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s(1) \cdots s(n)} \right], \tag{4.1}$$

όπου $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ είναι το σύνολο όλων των ακολουθιών οι όροι των οποίων είναι 0 ή 1. Το C είναι συμπαγές και ονομάζεται σύνολο Cantor. Παρατηρούμε ότι για κάθε $s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, η $I_{s(1)\cdots s(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, είναι μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων, το μήκος των οποίων τείνει στο μηδέν. Άρα η τομή

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s(1)\cdots s(n)}$$

είναι μονοσύνολο. Έτσι το C είναι η ένωση όλων αυτών των μονοσυνόλων. Επίσης αν $s, t \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ με $s \neq t$, τότε

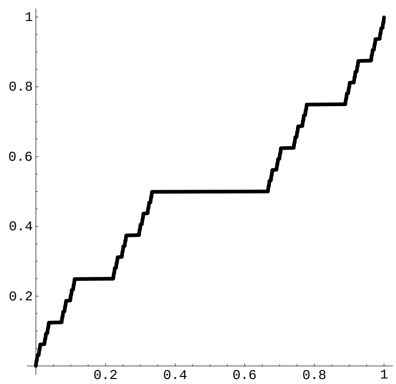
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s(1)\cdots s(n)} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{t(1)\cdots t(n)} = \emptyset.$$

Αυτό σημαίνει ότι το C έρχεται σε 1-1 αντιστοιχία με το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, το οποίο γνωρίζουμε ότι είναι υπεραριθμήσιμο. Μένει να δείξουμε ότι το C έχει μέτρο 0. Πράγματι, το C_n αποτελείται από 2^n ξένα διαστήματα μήκους $1/3^n$, άρα $m(C_n) = (2/3)^n$. Επομένως $m(C) = \lim m(C_n) = 0$.
Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα το σύνολο Cantor για να ορίσουμε μια "παθολογική" αύξουσα, συνεχή και επί συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1]$.
Έστω J_i^n, $n \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$, τα ανοιχτά διαστήματα που αφαιρούμε στο n βήμα της κατασκευής του συνόλου Cantor. Υποθέτουμε ότι τα διαστήματα αυτά έχουν αριθμηθεί με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε το J_i^n να βρίσκεται αριστερά του J_{i+1}^n. Αν $x \in [0,1] \setminus C$, δηλαδή αν το x ανήκει σε κάποιο J_i^n, τότε θέτουμε

$$f(x) = \frac{2i-1}{2^n}.$$

Για τα υπόλοιπα x θέτουμε

$$f(x) = \sup\{f(y) : y \in [0,1] \setminus C,\ y < x\},\ f(0) = 0.$$



Έτσι η f είναι σταθερή σε κάθε ένα από τα ανοιχτά διαστήματα που αποτελούν το συμπλήρωμα του C στο $[0,1]$. Η f ονομάζεται συνάρτηση του Cantor.

Θεώρημα 4.1 (Vitali)**.** *Κάθε σύνολο πραγματικών θετικού μέτρου περιέχει ένα μη Lebesgue μετρήσιμο σύνολο.*

Απόδειξη. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ λέμε ότι το x είναι ισοδύναμο με το y και γράφουμε $x \sim y$, αν $x - y \in \mathbb{Q}$. Έτσι το $\mathbb{R}$ διαμερίζεται σε μια οικογένεια ξένων ανά δύο κλάσεων ισοδυναμίας $\{E_\alpha : \alpha \in I\}$.

$$\mathbb{R} = \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha.$$

Τα E_α είναι της μορφής $x + \mathbb{Q}$, επομένως το I πρέπει να είναι υπεραριθμήσιμο. Χρησιμοποιώντας το Αξίωμα της Επιλογής, μπορούμε να επιλέξουμε ακριβώς ένα στοιχείο x_α από κάθε E_α και να σχηματίσουμε το σύνολο $V = \{x_\alpha : \alpha \in I\}$. Τότε

$$\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q + V).$$

Έστω τώρα ότι υπήρχε κάποιο μετρήσιμο A με θετικό μέτρο τέτοιο ώστε κάθε υποσύνολό του να είναι μετρήσιμο. Αφού

$$A = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} [(q + V) \cap A],$$

υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $\mu((q+V)\cap A) > 0$. Από το θεώρημα Steinhaus υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$(-\delta,\delta) \subset ((q+V)\cap A) - ((q+V)\cap A) \subset (q+V) - (q+V) = V - V.$$

Επιλέγουμε τώρα ένα μη μηδενικό ρητό $r \in (-\delta,\delta)$. Τότε $r = x_\alpha - x_\beta$ για κάποια $\alpha,\beta \in I$ με $\alpha \neq \beta$. Δηλαδή $x_\alpha \sim x_\beta$. Αυτό σημαίνει ότι τα x_α, x_β ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας, άτοπο. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Μετρήσιμες συναρτήσεις

Σε όλο το κεφάλαιο, $(X, \mathscr{A}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου.

Ορισμός 5.1. *Έστω Y ένας τοπολογικός χώρος. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται μετρήσιμη αν $f^{-1}(G) \in \mathscr{A}$ για κάθε $G \subset Y$ ανοιχτό.*

Στην περίπτωσή μας, ο Y θα είναι το $\mathbb{R}$, το $\mathbb{C}$ ή το $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ με την τοπολογία που παράγεται από όλα τα ανοιχτά διαστήματα και τα διαστήματα τής μορφής $(a, +\infty]$ και $[-\infty, b)$.

Παρατήρηση. Η οικογένεια $\{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}$ είναι σ-άλγεβρα.

Άμεση συνέπεια τής προηγούμενης παρατήρησης είναι:

- Αν η f είναι μετρήσιμη τότε η αντίστροφη εικόνα ενός συνόλου Borel είναι μετρήσιμο σύνολο.
- Αν για κάποια f έχουμε $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ για κάθε B σε μια οικογένεια που παράγει τα σύνολα Borel, τότε η f είναι μετρήσιμη. Ιδιαίτερα, αν η f παίρνει τιμές στο $\overline{\mathbb{R}}$ και το $\{f > a\}$ (ή το $\{f < a\}$ ή το $\{f \geq a\}$ ή $\{f \leq a\}$) είναι μετρήσιμο για κάθε a, τότε η f είναι μετρήσιμη.

Παραδείγματα.

- Αν ο X είναι τοπολογικός χώρος και η $\mathscr{A}$ περιέχει τα ανοιχτά σύνολα, τότε κάθε συνεχής f είναι μετρήσιμη.
- Αν $X = Y = \mathbb{R}$ και η $\mathscr{A}$ περιέχει τα ανοιχτά σύνολα, τότε κάθε μονότονη συνάρτηση είναι μετρήσιμη.
- Η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συνόλου είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν το σύνολο είναι μετρήσιμο.

Θεώρημα 5.2. *Αν η $f : X \to Y$ είναι μετρήσιμη, ο Z είναι τοπολογικός χώρος, και η $g : Y \to Z$ είναι συνεχής, τότε η $g \circ f$ είναι μετρήσιμη.*

Θεώρημα 5.3. *Αν ο Y έχει αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του, οι $f, g : X \to Y$ είναι μετρήσιμες και η $\Phi : Y \times Y \to Y$ συνεχής τότε η $h : X \to Y$ με $h(x) = \Phi(f(x), g(x))$ είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Θέτουμε $H(x) = (f(x), g(x))$. Τότε $h = \Phi \circ H$. Αν τώρα το $G \subset Y$ είναι ανοιχτό, τότε $\Phi^{-1}(G) = \bigcup_n U_n \times V_n$, για κάποια $U_n, V_n \subset Y$ ανοιχτά. Επομένως

$$h^{-1}(G) = H^{-1}\left(\bigcup_n U_n \times V_n\right) = \bigcup_n f^{-1}(U_n) \cap g^{-1}(V_n) \in \mathscr{A}.$$

□

Άμεσο πόρισμα τού προηγούμενου είναι ότι αλγεβρικοί συνδυασμοί μετρήσιμων πραγματικών συναρτήσεων είναι μετρήσιμες συναρτήσεις.

Θεώρημα 5.4. *Αν $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμες, τότε οι $\inf f_n$, $\sup f_n$, $\liminf f_n$, $\limsup f_n$ είναι μετρήσιμες.*

Απόδειξη.

$$\{\sup f_n > a\} = \bigcup_n \{f_n > a\}.$$

□

Μια μετρήσιμη συνάρτηση λέγεται απλή αν παίρνει πεπερασμένο πλήθος τιμών.

Θεώρημα 5.5. *Έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μη αρνητική μετρήσιμη. Τότε υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών απλών συναρτήσεων η οποία συγκλίνει κατά σημείο στην f.*

Απόδειξη. Η ζητούμενη ακολουθία είναι

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{\{k-1/2^n \leq f < k/2^n\}} + n\chi_{\{n \leq f\}}.$$

□

Θεώρημα 5.6 (Egorov). *Αν το μ είναι ένα πεπερασμένο μέτρο στο X και f_n μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο X τέτοια ώστε $f_n \to f$ σχεδόν παντού, τότε για κάθε ε υπάρχει E με $\mu(E) < \varepsilon$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο συμπλήρωμα τού E.*

Απόδειξη. Έστω A το σύνολο πάνω στο οποίο η f_n δεν συγκλίνει στην f. Τότε $\mu(A) = 0$ και προφανώς για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$X \setminus A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} \{|f_j - f| < 1/k\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{n,k}.$$

Η $E_{n,k}$, $n \in \mathbb{N}$, είναι αύξουσα, άρα η $X \setminus E_{n,k}$, $n \in \mathbb{N}$, είναι φθίνουσα. Επίσης

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus E_{n,k}) \subset A.$$

Αφού το X έχει πεπερασμένο μέτρο, έχουμε

$$\lim_n \mu(X \setminus E_{n,k}) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus E_{n,k})\right) \le \mu(A) = 0.$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Τότε από την προηγούμενη σχέση έχουμε ότι υπάρχει n_k τέτοιο ώστε

$$\mu(X \setminus E_{n_k,k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Θέτουμε

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus E_{n_k,k}).$$

Τότε

$$\mu(E) \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Ισχυριζόμαστε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus E$. Πράγματι, έστω $\delta > 0$. Επιλέγουμε k_0 τέτοιο ώστε $1/k_0 < \delta$. Τότε για κάθε $x \in X \setminus E$ έχουμε ότι $x \in E_{n_{k_0},k_0}$. Αυτό σημαίνει ότι

$$|f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{k_0} < \delta$$

για κάθε $j \ge n_{k_0}$. Δηλαδή η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Ολοκλήρωμα

Σ' όλο το κεφάλαιο $(X, \mathscr{A}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου. Αν s είναι μια μη αρνητική απλή συνάρτηση με

$$s = \sum_k a_k \chi_{A_k},$$

όπου τα A_k είναι ανά δύο ξένα, τότε θέτουμε

$$\int s\, d\mu = \sum_k a_k \mu(A_k).$$

Η ποσότητα αυτή ονομάζεται ολοκλήρωμα τής s ως προς το μέτρο μ και είναι καλά ορισμένη γιατί αν $s = \sum_j b_j \chi_{B_j}$ είναι μια άλλη αναπαράσταση με τα B_j ανά δυο ξένα τότε

$$\sum_k a_k \mu(A_k) = \sum_{j,k} a_k \mu(A_k \cap B_j) = \sum_{j,k} b_j \mu(A_k \cap B_j) = \sum_j b_j \mu(B_j).$$

Αν το E είναι μετρήσιμο, τότε θέτουμε

$$\int_E s\, d\mu = \int s \chi_E.$$

Θεώρημα 6.1. *Αν οι s, t είναι μη αρνητικές απλές και $a \geq 0$, τότε*

(1) $\int as\, d\mu = a \int s\, d\mu$.
(2) $\int (s+t)\, d\mu = \int s\, d\mu + \int t\, d\mu$.
(3) *Αν* $s \leq t$ *τότε* $\int s\, d\mu \leq \int t\, d\mu$.

Απόδειξη.

(1) Προφανές.
(2) Αν

$$s = \sum_k a_k \chi_{A_k}, \quad t = \sum_j b_j \chi_{B_j},$$

με τα σύνολα στο κάθε άθροισμα ξένα, τότε

$$\int (s+t)\, d\mu = \sum_{j,k} (a_k + b_j) \mu(A_k \cap B_j) = \sum_{j,k} a_k \mu(A_k \cap B_j) + \sum_{j,k} b_j \mu(A_k \cap B_j) = \sum_k a_k \mu(A_k) + \sum_j b_j \mu(B_j).$$

(3) $t = s + (t - s)$ και εφαρμόζουμε το (2).

□

Παρακινούμενοι από το ότι για κάθε μη αρνητική απλή φ έχουμε

$$\int \varphi\, d\mu = \sup \left\{ \int s\, d\mu : 0 \leq s \leq \varphi,\ s \text{ απλή} \right\},$$

θέτουμε για κάθε μη αρνητική μετρήσιμη f

$$\int f\, d\mu = \sup \left\{ \int s\, d\mu : 0 \leq s \leq f,\ s \text{ απλή} \right\}.$$

Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό ότι τα (1) και (2) τού θεωρήματος 6.1 ισχύουν για θετικές μετρήσιμες συναρτήσεις.

Θεώρημα 6.2 (Θεώρημα μονότονης σύγκλισης)**.** *Αν f_n είναι μια αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων και $f = \lim f_n$ τότε*

$$\lim \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

Απόδειξη. Προφανώς $\lim \int f_n\, d\mu \leq \int f\, d\mu$. Για την αντίστροφη ανισότητα, έστω $s = \sum_j b_j \chi_{B_j}$ μη αρνητική απλή με $s \leq f$ και $0 < a < 1$. Θέτουμε $A_n = \{as \leq f_n\}$. Τότε η A_n είναι αύξουσα και $X = \bigcup_n A_n$. Επίσης

$$a \int_{A_n} s\, d\mu \leq \int_{A_n} f_n\, d\mu \leq \int f_n\, d\mu.$$

Από το θεώρημα 1.6 έχουμε

$$\int_{A_n} s\, d\mu = \sum_j b_j \mu(A_n \cap B_j) \xrightarrow{n \to +\infty} \sum_j b_j \mu(B_j) = \int s\, d\mu.$$

Άρα

$$a \int s\, d\mu \leq \lim \int f_n\, d\mu.$$

Παίρνοντας sup ως προς s και το όριο καθώς $a \to 1$ έχουμε τη ζητούμενη ανισότητα. □

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης και τα θεωρήματα 5.5, 6.1 προκύπτει ότι για $a, b \geq 0$ και f, g μη αρνητικές μετρήσιμες έχουμε

$$\int (af + bg)\, d\mu = a \int f\, d\mu + b \int g\, d\mu.$$

Θεώρημα 6.3 (Λήμμα Fatou)**.** *Αν f_n είναι μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων, τότε*

$$\int \liminf f_n\, d\mu \leq \liminf \int f_n\, d\mu.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μονότονης σύγκλισης στην αύξουσα ακολουθία $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$. □

Θεώρημα 6.4. *Αν f_n είναι μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων, τότε*

$$\int \left(\sum_n f_n \right) d\mu = \sum_n \int f_n\, d\mu.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μονότονης σύγκλισης στην ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής σειράς. □

Αν μια συνάρτηση είναι ίση σχεδόν παντού με μηδέν έχει μηδενικό ολοκλήρωμα, επομένως τα προηγούμενα θεωρήματα σύγκλισης εξακολουθούν να ισχύουν αν έχουμε σχεδόν παντού σύγκλιση.

Ορισμός 6.5. *Μια μετρήσιμη f ονομάζεται ολοκληρώσιμη αν $\int |f|\, d\mu < +\infty$.*

Αν η f είναι πραγματική τότε θέτουμε

$$\int f\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu,$$

όπου $f^+ = \max\{f, 0\}$ και $f^- = -\min\{f, 0\}$. Αν η f είναι μιγαδική, τότε

$$\int f\, d\mu = \int \Re\mathfrak{e}\, f\, d\mu + i \int \Im\mathfrak{m}\, f\, d\mu,$$

όπου $\Re\mathfrak{e}\, f$ και $\Im\mathfrak{m}\, f$ το πραγματικό και το φανταστικό μέρος τής f.

Θεώρημα 6.6. *Το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό.*

Απόδειξη. Έστω f και g πραγματικές ολοκληρώσιμες. Τότε

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-.$$

Άρα

$$\int (f+g)^+ + \int f^- + \int g^- = \int (f+g)^- + \int f^+ + \int g^+.$$

Επομένως

$$\int (f+g)^+ - \int (f+g)^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^-.$$

Συνεπώς το ολοκλήρωμα τού αθροίσματος είναι ίσο με το άθροισμα των ολοκληρωμάτων. □

Θεώρημα 6.7. *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη τότε $|\int f\, d\mu| \leq \int |f|\, d\mu$.*

Απόδειξη. Για κατάλληλο $u \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\left|\int f\, d\mu\right| = \int e^{iu} f\, d\mu \leq \int |f|\, d\mu.$$

□

Θεώρημα 6.8 (Θεώρημα κυριαχημένης σύγκλισης)**.** *Έστω f_n μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι*

(1) *Υπάρχει g ολοκληρώσιμη τέτοια ώστε $|f_n| \leq g$ για κάθε n.*
(2) *Υπάρχει f τέτοια ώστε $\lim f_n = f$.*

Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int f = \lim \int f_n.$$

Απόδειξη. (Για πραγματικές συναρτήσεις). Η $g + f_n$ είναι μια ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων, άρα από το λήμμα Fatou έχουμε

$$\int \liminf (g + f_n) \leq \liminf \int (g + f_n).$$

Συνεπώς

$$\int f \leq \liminf \int f_n.$$

Εφαρμόζουμε τώρα το λήμμα Fatou στην ακολουθία $g - f_n$.

$$\int \liminf (g - f_n) \leq \liminf \int (g - f_n).$$

Άρα

$$\int f \geq \limsup \int f_n.$$

Επομένως

$$\int f \leq \liminf \int f_n \leq \limsup \int f_n \leq \int f,$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\int f = \lim \int f_n.$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Οι χώροι L^p

Ορισμός 7.1. *Αν $(X, \mathscr{A}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου και $p \geq 1$, θέτουμε*

$$L^p = \left\{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ ή } \mathbb{C} : f \text{ μετρήσιμη και } \int |f|^p \, d\mu < +\infty \right\},$$

και

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Η παραπάνω ποσότητα ορίζεται για οποιαδήποτε μετρήσιμη f. Είναι πεπερασμένη αν $f \in L^p$.

Κάνουμε τη σύμβαση ότι όταν λέμε $f \in L^p$ εννοούμε οποιαδήποτε συνάρτηση είναι σχεδόν παντού ίση με την f. Έτσι, με τη σύμβαση αυτή, όταν έχουμε το μέτρο Lebesgue, η χαρακτηριστική συνάρτηση των ρητών είναι ίση με την ταυτοτικά μηδενική συνάρτηση.

Παρατηρήσεις.

- Μια απλή συνάρτηση ανήκει σε όλους τους χώρους L^p αν και μόνο αν το σύνολο όπου δεν μηδενίζεται έχει πεπερασμένο μέτρο.
- Μια συνάρτηση $f \in L^p$ είναι σχεδόν παντού πεπερασμένη γιατί
$$\mu(\{|f| = +\infty\}) \leq \mu(\{|f| \geq n\}) \leq \frac{\|f\|_p^p}{n^p},$$
για κάθε n.
- Η ανισότητα $(s+t)^p \leq 2^{p-1}(s^p + t^p)$ δείχνει ότι οι χώροι L^p είναι γραμμικοί χώροι (επί τού $\mathbb{R}$ ή τού $\mathbb{C}$).
- Οι χώροι L^p που αντιστοιχούν στον $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu)$, όπου μ είναι το αριθμητικό μέτρο, συμβολίζονται παραδοσιακά με ℓ^p και ονομάζονται "μικροί L^p". Αποτελούνται από όλες τις ακολουθίες (x_n) για τις οποίες $\sum_n |x_n|^p < +\infty$ (p-αθροίσιμες ακολουθίες). Στους χώρους αυτούς έχουμε $\|(x_n)\|_p = \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{1/p}$.
- Μερικές φορές αν θέλουμε να τονίσουμε το μέτρο ως προς το οποίο θεωρούμε κάποιο χώρο L^p, γράφουμε $L^p(\mu)$. Στην περίπτωση τού μέτρου Lebesgue σε κάποιο $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ μπορούμε να γράφουμε $L^p(\Omega)$.

Θεώρημα 7.2 (Ανισότητα Hölder)**.** *Αν $p > 1$ τότε $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$, όπου $1/p + 1/q = 1$.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. Τότε η ζητούμενη ανισότητα προκύπτει από την

$$st \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q},$$

αν θέσουμε $s = |f|$, $t = |g|$ και ολοκληρώσουμε. □

Θεώρημα 7.3 (Ανισότητα Minkowski)**.** $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την ανισότητα Hölder στη σχέση

$$|f+g|^p \leq |f|(|f+g|)^{p-1} + |g|(|f+g|)^{p-1}$$

και παίρνουμε

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p \|f+g\|_p^{p/q} + \|g\|_p \|f+g\|_p^{p/q},$$

η οποία είναι η ζητούμενη. □

Παρατηρήσεις.

- Από την ανισότητα Minkowski προκύπτει η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα (τριγωνική ανισότητα). Η ιδιότητα
$$\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$$
προκύπτει από τη σύμβαση ότι στα πλαίσια των χώρων L^p, ταυτίζουμε συναρτήσεις που είναι ίσες σχεδόν παντού. Η ομογένεια ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$ είναι προφανής.

- Αν έχουμε το αριθμητικό μέτρο στους φυσικούς, οι ανισότητες Hölder και Minkowski παίρνουν τη μορφή

$$\sum_n |x_n y_n| \leq \left(\sum_n |x_n|\right)^{1/p} \left(\sum_n |y_n|\right)^{1/q},$$

$$\left(\sum_n |x_n + y_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_n |y_n|^p\right)^{1/p},$$

για κάθε ακολουθίες (x_n) και (y_n).

Θεώρημα 7.4. *Αν $\|f_n - f\|_p \to 0$, τότε υπάρχει υπακολουθία f_{k_n} τέτοια ώστε $f_{k_n} \to f$ σχεδόν παντού.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε k_n έτσι ώστε

$$\mu\left(\left\{|f_{k_n} - f| > \frac{1}{n}\right\}\right) \leq n^p \|f_{k_n} - f\|_p^p < \frac{1}{2^n},$$

και θέτουμε

$$E_n = \left\{|f_{k_n} - f| > \frac{1}{n}\right\}, \quad E = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=j}^{\infty} E_n.$$

Τότε

$$\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_{n=j}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{2^n} \to 0$$

καθώς $j \to \infty$. Αν τώρα $x \notin E$ τότε υπάρχει j_0 τέτοιο ώστε $x \notin E_n$ για κάθε $n \geq j_0$. Δηλαδή

$$|f_{k_n}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$$

για κάθε $n \geq j_0$. Άρα $f_{k_n}(x) \to f(x)$. □

Θεώρημα 7.5. *Οι χώροι $(L^p, \|\cdot\|_p)$ είναι πλήρεις.*

Απόδειξη. Από γενική θεωρία χώρων Banach αρκεί να δείξουμε ότι ότι αν $\sum_n \|f_n\|_p < +\infty$, τότε η σειρά $\sum_n f_n$ συγκλίνει ως προς τη νόρμα. Θέτουμε

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

Τότε από θεώρημα μονότονης σύγκλισης και ανισότητα Minkowski παίρνουμε

$$\left(\int g^p\right)^{1/p} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty.$$

Άρα η g ανήκει στον L^p και επομένως είναι σχεδόν παντού πεπερασμένη. Αυτό σημαίνει ότι η σειρά $\sum_n f_n(x)$ συγκλίνει απόλυτα για σχεδόν όλα τα x. Θέτουμε λοιπόν $f(x) = \sum_n f_n(x)$. Τότε $f \in L^p$ και από θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και ανισότητα Minkowski

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{n} f_k\right\|_p \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_p \to 0$$

καθώς $n \to \infty$. □

Παρατηρήσεις.

- Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης και το θεώρημα 5.5 προκύπτει ότι το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών χαρακτηριστικών συναρτήσεων συνόλων πεπερασμένου μέτρου είναι πυκνό σε όλους τους L^p. Δηλαδή

$$\overline{\langle \chi_E : \mu(E) < +\infty \rangle} = L^p,$$

όπου $\langle\cdot\rangle$ είναι η γραμμική θήκη.

- Αν έχουμε το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^d$ και $m(E) < +\infty$ τότε, από την κανονικότητα τού μέτρου Lebesgue, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν ξένοι ανά δύο δυαδικοί κύβοι Q_j, $1 \le j \le n$, με
$$m\left(E \triangle \bigcup_j Q_j\right) < \varepsilon.$$
Αυτό σημαίνει ότι
$$\left\| \chi_E - \sum_j \chi_{Q_j} \right\|_p^p < \varepsilon.$$
Συνεπώς
$$\overline{\langle \chi_Q : Q \text{ δυαδικός κύβος} \rangle} = L^p.$$
Άρα οι χώροι L^p με το μέτρο Lebsegue είναι διαχωρίσιμοι. Και οι ℓ^p είναι διαχωρίσιμοι γιατί
$$\overline{\langle e_n : n \in \mathbb{N} \rangle} = \ell^p,$$
όπου e_n είναι η ακολουθία η οποία είναι παντού ίση με 0 εκτός από τη θέση n όπου είναι ίση με 1.
- Αν Q είναι ένας δυαδικός κύβος και επιλέξουμε ένα ανοιχτό ορθογώνιο $R \supset Q$ με $m(R \setminus Q) < \varepsilon$, τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $0 \le f \le 1$ η οποία είναι ίση με 0 στο συμπλήρωμα τού R και ίση με 1 στο $\overline{Q}$ ($f(x) = d(x, R^{\complement})/(d(x, R^{\complement}) + d(x, \overline{Q}))$, όπου $d(x, S)$ η απόσταση τού σημείου x από το σύνολο S). Τότε $\|f - \chi_Q\|_p^p < \varepsilon$. Άρα το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα (δηλαδή αυτών που μηδενίζονται έξω από κάποιο συμπαγές σύνολο) είναι πυκνό σε κάθε L^p. Είναι δυνατό η f παραπάνω να επιλεγεί απείρως διαφορίσιμη. Επομένως το σύνολο των απείρως διαφορίσμων συναρτήσεων με συμπαγή φορέα είναι πυκνό σε όλους τους L^p. Θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο διαφορετικές αποδείξεις αυτών των αποτελεσμάτων πυκνότητας.
- (Lusin.) Αν η f είναι μετρήσιμη και πεπερασμένη στο $\mathbb{R}^d$ τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει E κλειστό με $m(\mathbb{R}^d \setminus E) < \varepsilon$ ώστε η $f|_E$ είναι συνεχής. Αρκεί να το δείξουμε στην περίπτωση που η f είναι ορισμένη σ'ένα ανοιχτό φραγμένο κύβο Q και είναι φραγμένη. Τότε είναι ολοκληρώσιμη, άρα υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων g_n ώστε $\|g_n - f\|_1 \to 0$, άρα υπάρχει υπακολουθία g_{k_n} με $g_{k_n} \to f$ σχεδόν παντού, επομένως, από το θεώρημα Egorov, υπάρχει A με $m(Q \setminus A) < \varepsilon/2$ ώστε $g_{k_n} \to f$ ομοιόμορφα στο A. Το ζητούμενο E είναι ένα κλειστό υποσύνολο τού A με $m(A \setminus E) < \varepsilon/2$.
- Ο χώρος L^2 είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο
$$(f, g) = \int f\overline{g}\, d\mu.$$
Στην περίπτωση που το μ είναι το αριθμητικό μέτρο σε κάποιο σύνολο A, είναι παράδοση να γράφουμε $\ell^2(A)$ και να χρησιμοποιούμε συμβολισμό αθροίσματος αντί ολοκληρώματος. Έτσι
$$(f, g) = \sum_{a \in A} f(a)\overline{g(a)}.$$
Σε αναλογία με τους μικρούς ακολουθιακούς ℓ^p, το σύνολο $\{e_a : a \in A\}$, όπου e_a είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση τού μονοσυνόλου $\{a\}$, είναι ορθοκανονική βάση.

Ορισμός 7.6. *Μια μετρήσιμη f λέγεται ουσιωδώς φραγμένη αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $\mu(\{|f| > M\}) = 0$. Το σύνολο των ουσιωδώς φραγμένων συναρτήσεων συμβολίζεται με L^∞, και το infimum των παραπάνω M με $\|f\|_\infty$. Η ποσότητα αυτή λέγεται ουσιώδες supremum τής f.*

Παρατηρήσεις.

- Αν $f \in L^\infty$ τότε, από τον ορισμό τού ουσιώδους supremum, για κάθε n έχουμε $|f| \le \|f\|_\infty + 1/n$ σχεδόν παντού, άρα $|f| \le \|f\|_\infty$ σχεδόν παντού.
- Ο $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach. Πράγματι αν η f_n είναι Cauchy, τότε η $f_n(x)$ είναι Cauchy για σχεδόν όλα τα x επομένως συγκλίνει σχεδόν παντού σε κάποια f. Τώρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n, m \ge n_0$ έχουμε $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ για σχεδόν όλα τα x. Παίρνοντας όριο ως προς m έχουμε $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ για κάθε $n \ge n_0$ για σχεδόν όλα τα x. Άρα $\|f_n - f\|_\infty \le \varepsilon$ για κάθε $n \ge n_0$.
- Όπως προηγουμένως, ο L^∞ που αντιστοιχεί στο αριθμητικό μέτρο στους φυσικούς συμβολίζεται με ℓ^∞ και αποτελείται από όλες τις φραγμένες ακολουθίες.

- Το σύνολο όλων των απλών συναρτήσεων είναι πυκνό στον L^∞. Πράγματι αν $f \in L^\infty$ τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ θεωρούμε μια διαμέριση $t_0 < \cdots < t_n$ τού $[0, \|f\|_\infty]$ ώστε το μήκος όλων των διαστημάτων να είναι μικρότερο από ε. Θέτουμε
$$s = \sum_{k=1}^{n} t_{k-1}\chi_{\{t_{k-1} \leq |f| < t_k\}} + \|f\|_\infty \chi_{\{|f| = \|f\|_\infty\}}.$$
Τότε $\|f - s\|_\infty < \varepsilon$.
- Σε αντίθεση με τους χώρους L^p για $1 \leq p < +\infty$, ο L^∞ δεν είναι γενικά διαχωρίσιμος. Για παράδειγμα στον ℓ^∞, το σύνολο $\{(x_n) : x_n = 0 \text{ ή } x_n = 1\}$ είναι υπεραριθμήσιμο και τα στοιχεία του έχουν ανά δυο απόσταση 1, επομένως ο χώρος δεν μπορεί να είναι διαχωρίσιμος. Ένα ανάλογο παράδειγμα δείχνει ότι ούτε οι L^∞ που αντιστοιχούν στο μέτρο Lebesgue είναι διαχωρίσιμοι.
- (Η συνέχεια τής μετάθεσης.) Για μια συνάρτηση h στον $\mathbb{R}^d$ θέτουμε $\tau_y h(x) = h(x - y)$. Αν η g είναι συνεχής με συμπαγή φορέα τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής, επομένως $\|\tau_y g - g\|_\infty \to 0$ καθώς $y \to 0$. Αν τώρα $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < +\infty$, τότε από το αναλλοίωτο τού μέτρου Lebesgue στις μεταθέσεις $\|\tau_y f\|_p = \|f\|_p$. Επίσης υπάρχει g συνεχής με συμπαγή φορέα K ώστε $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Έτσι
$$\|\tau_y f - f\|_p \leq \|\tau_y f - \tau_y g\|_p + \|\tau_y g - g\|_p + \|g - f\|_p \leq 2\|f - g\|_p + 2m(K)\|\tau_y g - g\|_\infty.$$
Συμπεραίνουμε ότι $\|\tau_y f - f\|_p \to 0$ καθώς $y \to 0$. Το αποτέλεσμα δεν ισχύει για συναρτήσεις στον L^∞.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Μιγαδικά μέτρα

Ορισμός 8.1. *Αν $(X, \mathscr{A})$ είναι μετρήσιμος χώρος, τότε μια συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ με*

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n)$$

για κάθε ακολουθία ξένων ανά δυο μετρήσιμων A_n, ονομάζεται μιγαδικό μέτρο.

Παρατηρήσεις.

- Η σύγκλιση τής σειράς είναι απαίτηση τού ορισμού, και το ότι κάθε αναδιάταξη συγκλίνει στον ίδιο αριθμό (το μέτρο τής ένωσης) σημαίνει ότι η σύγκλιση είναι στην πραγματικότητα απόλυτη.
- Ένα μέτρο με την έννοια που ξέραμε μέχρι τώρα (πραγματικό, μη αρνητικό, με την τιμή $+\infty$ επιτρεπτή) θα ονομάζεται θετικό μέτρο για να διακρίνεται από τα μιγαδικά μέτρα που ορίσαμε παραπάνω.

Ορισμός 8.2. *Αν το μ είναι μιγαδικό μέτρο τότε για κάθε μετρήσιμο A θέτουμε*

$$|\mu|(A) = \sup\left\{\sum_n |\mu(A_n)| : A_n,\, n \in \mathbb{N},\ \text{μετρήσιμη διαμέριση τού } A\right\}.$$

(Μετρήσιμη διαμέριση σημαίνει ότι τα A_n είναι ξένα ανά δύο, μετρήσιμα και η ένωσή τους είναι ίση με A.) Η συνολοσυνάρτηση $|\mu|$ ονομάζεται ολική κύμανση.

Παρατηρήστε ότι $|\mu(A)| \le |\mu|(A)$ για κάθε μετρήσιμο A.

Θεώρημα 8.3. *Η ολική κύμανση είναι θετικό και πεπερασμένο μέτρο.*

Απόδειξη. Αν τα A_n είναι μετρήσιμα και ανά δύο ξένα θέτουμε $A = \bigcup_n A_n$. Για κάθε $t_n > 0$ με $t_n < |\mu|(A_n)$, επιλέγουμε διαμέριση E_j^n τού A_n με $t_n < \sum_j |\mu(E_j^n)|$. Τότε $\sum_n t_n < \sum_{j,n} |\mu(E_j^n)| \le |\mu|(A)$. Παίρνοντας supremum ως προς όλα τα t_n έχουμε ότι $\sum_n |\mu|(A_n)| \le |\mu|(A)$. Αν τώρα E_j είναι μια διαμέριση τού A έχουμε

$$\sum_j |\mu(E_j)| \le \sum_{j,n} |\mu(E_j \cap A_n)| \le \sum_n |\mu|(A_n).$$

Παίρνοντας supremum ως προς όλες τις διαμερίσεις E_j έχουμε ότι $|\mu|(A) \le \sum_n |\mu|(A_n)$. Έτσι η ολική κύμανση είναι θετικό μέτρο. Για να δείξουμε ότι είναι πεπερασμένο υποθέτουμε ότι $|\mu|(X) = +\infty$. Τότε υπάρχει διαμέριση E_j τού X και φυσικός n ώστε $\sum_{j=1}^n |\mu(E_j)| > \pi(|\mu(X)| + 1)$. Επιλέγουμε $J \subset \{1, \dots, n\}$ (πώς;)* ώστε

$$\sum_{j=1}^n |\mu(E_j)| \le \pi \left|\sum_{j\in J} \mu(E_j)\right|.$$

Επομένως $|\mu(\bigcup_{j\in J} E_j)| > 1$. Επίσης $|\mu(X \setminus \bigcup_{j\in J} E_j)| > 1$. Έτσι το X έχει χωριστεί σε δυο σύνολα τα οποία έχουν μέτρο, σε απόλυτη τιμή, μεγαλύτερο από 1. Το ένα από τα δύο (τουλάχιστο) έχει άπειρη κύμανση. Εφαρμόζουμε σ'αυτό την προηγούμενη διαδικασία και ονομάζουμε το άλλο A_1. Η διαδικασία θα δώσει ένα σύνολο A_2 ξένο με

*Θέτουμε $z_j = \mu(E_j) = |z_j|e^{i\varphi_j}$, για κάποια $\varphi_j \in [0, 2\pi]$. Έστω τώρα θ_0 εκείνο το θ που μεγιστοποιεί την ποσότητα $\sum_j |z_j| \cos^+(\varphi_j - \theta)$. Τότε από το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα

$$\sum_j |z_j| \cos^+(\varphi_j - \theta_0) \ge \sum_j |z_j| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^+(\varphi_j - \theta)\, d\theta = \frac{1}{\pi} \sum_j |z_j|.$$

Το ζητούμενο J είναι το $\{j : \cos(\varphi_j - \theta_0) > 0\}$ διότι

$$\left|\sum_{j\in J} z_j\right| = \left|\sum_{j\in J} z_j e^{i\theta_0}\right| \ge \Re\mathrm{e} \sum_{j\in J} z_j e^{i\theta_0} = \sum_{j=1}^n |z_j| \cos^+(\varphi_j - \theta_0).$$

το A_1 και μέτρου, σε απόλυτη τιμή, μεγαλύτερου από 1. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε μια ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων A_n με $|\mu(A_n)| > 1$. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με τη σύγκλιση τής σειράς $\sum_n \mu(A_n)$. □

Ορισμός 8.4. *Αν το μ είναι θετικό μέτρο και το λ αυθαίρετο μέτρο (στην ίδια σ-άλγεβρα) θα λέμε ότι το λ είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μ, αν κάθε σύνολο με μηδενικό μ-μέτρο έχει μηδενικό λ-μέτρο. Γράφουμε $\lambda \ll \mu$.*

Παρατήρηση. Αν $\lambda \ll \mu$ τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε E με $\mu(E) < \delta$ να έχουμε $|\lambda(E)| < \varepsilon$. Πράγματι, αν αυτό δεν ήταν αλήθεια, θα υπήρχε $c > 0$ και E_n έτσι ώστε $|\lambda(E_n)| \geq c$ και $\mu(E_n) < 1/2^n$. Αλλά τότε για $E = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} E_k$ θα είχαμε $\mu(E) = 0$ και $|\lambda|(E) \geq c$, άτοπο.

Ορισμός 8.5. *Λέμε ότι ένα μέτρο μ είναι συγκεντρωμένο στο σύνολο A αν $\mu(E \cap A) = \mu(E)$ για κάθε E. Ισοδύναμα $\mu(E) = 0$ για κάθε E ξένο με το A.*

Ορισμός 8.6. *Λέμε ότι τα μέτρα λ_1 και λ_2 είναι αμοιβαία ιδιάζοντα (mutually singular) αν είναι συγκεντρωμένα σε ξένα σύνολα. Γράφουμε $\lambda_1 \perp \lambda_2$.*

Παραδείγματα.

- Αν το μ είναι θετικό μέτρο, $h \in L^1(\mu)$, και $\nu(A) = \int_A h\,d\mu$, τότε $\nu \ll \mu$. Κατά παράδοση γράφουμε $d\nu = h\,d\mu$.
- Το μέτρο Dirac δ_x είναι συγκεντρωμένο στο $\{x\}$. Άρα $\delta_x \perp \delta_y$ για $x \neq y$.
- Αν το m είναι το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$ και μ είναι οποιοδήποτε μέτρο συγκεντρωμένο στο $\mathbb{Q}$, τότε $m \perp \mu$.

Θεώρημα 8.7 (Lebesgue-Radon-Nikodym)**.** *Έστω μ ένα θετικό σ-πεπερασμένο μέτρο (δηλαδή ο χώρος είναι αριθμήσιμη ένωση συνόλων πεπερασμένου μέτρου), και λ ένα μιγαδικό μέτρο (στην ίδια σ-άλγεβρα).*

(1) *Υπάρχουν μοναδικά μιγαδικά μέτρα λ_a και λ_s τέτοια ώστε $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_a \ll \mu$, $\lambda_s \perp \mu$.*
(2) *Υπάρχει μοναδική $h \in L^1(\mu)$ ώστε $d\lambda_a = h\,d\mu$.*

Απόδειξη. Προφανώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι το λ είναι πραγματικό. Χρησιμοποιώντας την ανάλυση

$$\lambda = \frac{1}{2}(|\lambda| + \lambda) - \frac{1}{2}(|\lambda| - \lambda)$$

βλέπουμε ότι μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι το λ είναι θετικό και πεπερασμένο. Θέτουμε $d\nu = d\lambda + w\,d\mu$, όπου $w \in L^1(\mu)$ με $0 < w < 1$[†]. Τότε για κάθε $f \in L^2(\nu)$ έχουμε

$$\int |f|\,d\lambda \leq \|f\|_{L^2(\nu)} \sqrt{\nu(X)}.$$

Άρα η απεικόνιση $f \mapsto \int f\,d\lambda$ είναι φραγμένο συναρτησοειδές στον $L^2(\nu)$. Επομένως από το θεώρημα αναπαράστασης τού Riesz για χώρους Hilbert, υπάρχει $g \in L^2(\nu)$ ώστε

$$\int f\,d\lambda = \int fg\,d\nu.$$

Παίρνοντας $f = \chi_E$ στην προηγούμενη σχέση, βλέπουμε ότι η μέση τιμή τής g ως προς ν σε κάθε σύνολο είναι στο $[0, 1]$. Συνεπώς $0 \leq g \leq 1$ ν-σχεδόν παντού. Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \leq g(x) \leq 1$ για κάθε x. Τώρα αν θέσουμε $A = \{0 \leq g < 1\}$, $B = \{g = 1\}$, $\lambda_a(E) = \lambda(A \cap E)$, $\lambda_s(E) = \lambda(B \cap E)$ για κάθε E, και πάρουμε $f = \chi_B$ στη σχέση

$$\int f(1 - g)\,d\lambda = \int fgw\,d\mu,$$

θα έχουμε $\int_B w\,d\mu = 0$. Συνεπώς $\mu(B) = 0$ αφού η w είναι αυστηρά θετική. Συνεπώς $\lambda_s \perp \mu$. Απ' την άλλη, αν πάρουμε

$$f = (1 + g + \cdots + g^n)\chi_E$$

για τυχόν E, θα έχουμε

$$\int_E (1 - g^{n+1})\,d\lambda = \int_E g(1 + g + \cdots + g^n)w\,d\mu.$$

Παίρνοντας όριο καθώς $n \to +\infty$ η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\lambda_a(E) = \int_E h\,d\mu,$$

όπου h είναι το κατά σημείο όριο τής αύξουσας ακολουθίας συναρτήσεων $g(1 + g + \cdots + g^n)w$. Συμπεραίνουμε ότι $\lambda_a \ll \mu$. Η μοναδικότητα των λ_a και λ_s προκύπτει από το ότι αν λ'_a και λ'_s είναι ένα άλλο ζευγάρι μέτρων με τις

[†] Η w μπορεί να κατασκευαστεί ως εξής: Αν $X = \bigcup_n E_n$ με $\mu(E_n) < +\infty$, θέτουμε $w = \sum_n \frac{1}{2^n(1+\mu(E_n))}\chi_{E_n}$.

ίδιες ιδιότητες τότε τα $\lambda_a - \lambda'_a$ και $\lambda_s - \lambda'_s$ είναι ταυτόχρονα απόλυτα συνεχή και αμοιβαία ιδιάζοντα ως προς το μ, επομένως πρέπει να είναι τα μηδενικά μέτρα. Η μοναδικότητα τής h προκύπτει από το ότι αν

$$\int_E (h_1 - h_2)\, d\mu = 0$$

για κάθε E, τότε $h_1 = h_2$ σχεδόν παντού. □

Παρατηρήσεις.

- Η ανάλυση $\lambda = \frac{1}{2}(|\lambda| + \lambda) - \frac{1}{2}(|\lambda| - \lambda)$ ονομάζεται ανάλυση Jordan τού λ. Τα $\frac{1}{2}(|\lambda| + \lambda)$ και $\frac{1}{2}(|\lambda| - \lambda)$ ονομάζονται θετική και αρνητική κύμανση τού λ αντίστοιχα. Συμβολίζονται με λ^+ και λ^- αντίστοιχα.
- Η ανάλυση $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$ ονομάζεται ανάλυση Lebesgue τού λ.
- Η συνάρτηση h ονομάζεται παράγωγος Radon-Nikodym τού λ ως προς μ και συμβολίζεται με $\frac{d\lambda}{d\mu}$. Έτσι το θεώρημα Radon-Nikodym είναι η "αλγεβρική ταυτολογία"

$$d\lambda = \frac{d\lambda}{d\mu} \cdot d\mu.$$

Τα ακόλουθα είναι εφαρμογές τού θεωρήματος Radon-Nikodym.

(1) Αν το μ είναι μιγαδικό μέτρο τότε υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση w με $|w| = 1$ τέτοια ώστε $d\mu = w\, d|\mu|$. Η αναπαράσταση αυτή ονομάζεται πολική αναπαράσταση τού μ (σε αναλογία με την πολική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού).

Απόδειξη. Το θεώρημα Radon-Nikodym εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας w τέτοιας ώστε $d\mu = w\, d|\mu|$, αφού $\mu \ll |\mu|$. Για να δείξουμε ότι $|w| = 1$, θέτουμε $A_r = \{|w| < r\}$ για κάθε $0 < r < 1$ και παρατηρούμε ότι για κάθε διαμέριση E_j τού A_r έχουμε

$$\sum_j |\mu(E_j)| = \sum_j \left| \int_{E_j} w\, d|\mu| \right| \leq r \sum_j |\mu|(E_j) = r|\mu|(A_r).$$

Άρα $|\mu|(A_r) \leq r|\mu|(A_r)$ συνεπώς $|\mu|(A_r) = 0$ για κάθε $0 < r < 1$, επομένως $|\mu|(\{|w| < 1\}) = 0$. Απ' την άλλη για κάθε E με θετική κύμανση έχουμε

$$\left| \frac{1}{|\mu|(E)} \int_E w\, d|\mu| \right| = \frac{|\mu(E)|}{|\mu|(E)} \leq 1.$$

Άρα $|\mu|(\{|w| > 1\}) = 0$. Συμπεραίνουμε ότι $|w| = 1$ $|\mu|$-σχεδόν παντού. Έτσι ορίζοντας την w εκ νέου σε ένα σύνολο μηδενικής κύμανσης παίρνουμε το ζητούμενο. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό των "διαφορικών", το συμπέρασμα γράφεται

$$\left| \frac{d\mu}{d|\mu|} \right| = 1.$$

□

(2) Αν το μ είναι θετικό μέτρο και $d\lambda = h\, d\mu$ για κάποια $h \in L^1(\mu)$, τότε $d|\lambda| = |h|\, d\mu$.

Απόδειξη. Από το (1) έχουμε ότι $d\lambda = w\, d|\lambda|$ για κάποια μετρήσιμη w με $|w| = 1$. Επομένως $w\, d|\lambda| = h\, d\mu$, άρα $d|\lambda| = \overline{w}h\, d\mu$. Αφού τα μέτρα είναι θετικά πρέπει $\overline{w}h \geq 0$ μ-σχεδόν παντού. Άρα $\overline{w}h = |h|$ μ-σχεδόν παντού. □

(3) Έστω μ θετικό μέτρο και $1 < p < \infty$. Τότε ο δυϊκός $(L^p(\mu))^*$ τού $L^p(\mu)$ είναι ισομετρικός με τον $L^q(\mu)$ μέσω της ισομετρίας

$$T : L^q(\mu) \to (L^p(\mu))^*$$
$$T(g) = \Lambda_g,$$

όπου $\Lambda_g(f) = \displaystyle\int fg$ και q ο συζυγής εκθέτης.

Απόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$. Η T είναι καλά ορισμένη από την ανισότητα Hölder, η οποία επίσης μας δίνει ότι $\|T(g)\| \leq \|g\|_q$. Απ'την άλλη, για κατάλληλη πραγματική συνάρτηση f έχουμε

$$\|g\|_q^q = \int |g|^q = \int g e^{if} |g|^{q-1} = |\Lambda_g(e^{if}|g|^{q-1})| \leq \|T(g)\| \cdot \|e^{if}|g|^{q-1}\|_p = \|T(g)\| \cdot \|g\|_q^{q/p}.$$

Επομένως $\|g\|_q \leq \|T(g)\|$, άρα η T είναι ισομετρία. Δείχνουμε τώρα ότι η T είναι επί, δηλαδή αν $\Lambda \in (L^p)^*$ τότε υπάρχει $g \in L^q$ τέτοιο ώστε $\Lambda = \Lambda_g$. Θέτουμε $\nu(A) = \Lambda(\chi_A)$ για κάθε A μετρήσιμο. Τότε το ν είναι μέτρο διότι αν A_n είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων, τότε

$$\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$$

(ως προς την $\|\cdot\|_p$), άρα

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

διότι η Λ είναι συνεχής. Επίσης το ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς μ διότι αν $\mu(A) = 0$ τότε $\chi_A = 0$ (με την έννοια των L^p χώρων), άρα $\nu(A) = \Lambda(0) = 0$. Επομένως, από το θεώρημα Radon-Nikodym, υπάρχει g ολοκληρώσιμη τέτοια ώστε

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu.$$

Από αυτό συνεπάγεται ότι

$$\Lambda(s) = \int gs$$

για κάθε s απλή. Δείχνουμε τώρα ότι $g \in L^q$. Σταθεροποιούμε $M > 0$, θέτουμε $A = \{|g| \leq M\}$ και γράφουμε όπως πριν $|g| = e^{if} g$ για κατάλληλη πραγματική f. Τότε η συνάρτηση $e^{if}|g|^{q-1}\chi_A$ ανήκει στον L^p επομένως για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει απλή συνάρτηση s με $\|s - e^{if}|g|^{q-1}\chi_A\|_p < \varepsilon$. Τώρα έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_A |g|^q &\leq \int_A |g| \cdot |e^{if}|g|^{q-1}\chi_A - s| + \left|\int gs\chi_A\right| \leq M(\mu(X))^{1/q}\|e^{if}|g|^{q-1}\chi_A - s\|_p + |\Lambda(s\chi_A)| \\
&\leq M(\mu(X))^{1/q}\varepsilon + \|\Lambda\| \cdot \|s\|_p \leq M(\mu(X))^{1/q}\varepsilon + \|\Lambda\|(\|e^{if}|g|^{q-1}\chi_A - s\|_p + \|e^{if}|g|^{q-1}\chi_A\|_p) \\
&\leq M(\mu(X))^{1/q}\varepsilon + \|\Lambda\|(\varepsilon + \|e^{if}|g|^{q-1}\chi_A\|_p).
\end{aligned}$$

Η προηγούμενη σχέση ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα

$$\int_A |g|^q \leq \|\Lambda\| \cdot \|e^{if}|g|^{q-1}\chi_A\|_p = \|\Lambda\| \left(\int_A |g|^q\right)^{1/p}.$$

Επομένως

$$\left(\int_{\{|g| \leq M\}} |g|^q\right)^{1/q} \leq \|\Lambda\|$$

για κάθε $M > 0$, άρα $g \in L^q$. Συμπεραίνουμε ότι $\Lambda(s) = \Lambda_g(s)$ για κάθε s απλή, άρα $\Lambda = \Lambda_g$, αφού Λ, Λ_g συνεχείς και το σύνολο των απλών συναρτήσεων είναι πυκνό στον L^p.

Έστω τώρα ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο, δηλαδή υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με $\mu(E_n) < +\infty$ και $\bigcup_n E_n = X$. Από τα προηγούμενα, για κάθε n υπάρχει $g_n \in L^q(E_n)$ ώστε $\Lambda(f) = \int f g_n \, d\mu$ για κάθε $f \in L^p(E_n)$. Ορίζουμε (σχεδόν παντού) την g να είναι ίση με g_n στο E_n.

Τέλος, αν το μ είναι αυθαίρετο, για κάθε σύνολο E με σ-πεπερασμένο μέτρο, έστω $g_E \in L^q(E)$ τέτοια ώστε $\Lambda(f) = \int f g_E \, d\mu$ για κάθε $f \in L^p(E)$. Θέτουμε $M = \sup\{\|g_E\|_q : E \text{ σ-πεπερασμένο}\}$. Το supremum είναι πεπερασμένο γιατί $\|g_E\|_q \leq \|\Lambda\|$ για κάθε E. Επιλέγουμε μια ακολουθία E_n ώστε $\|g_{E_n}\|_q \to M$ και θέτουμε $E_{\max} = \bigcup_n E_n$. Παρατηρούμε ότι αν το A είναι σ-πεπερασμένο υπερσύνολο τού $E_{\max}$ τότε $g_A = g_{E_{\max}}$ σχεδόν παντού (δηλαδή το $E_{\max}$ είναι κατά μια έννοια "maximal"). Τώρα για κάθε $f \in L^p$ έχουμε $\Lambda(f) = \int f g_{E_{\max}}$ διότι ο φορέας τής f είναι σ-πεπερασμένος.

□

(4) Ειδική περίπτωση αυτού του αποτελέσματος είναι το ότι ο $(\ell^p)^*$ είναι ισομετρικός με τον ℓ^q μέσω της ισομετρίας

$$T : \ell^q \to (\ell^p)^*$$

$$T(x)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n).$$

(5) Αν το μ είναι σ-πεπερασμένο αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο ότι ο $(L^1(\mu))^*$ είναι ισομετρικός με τον $L^\infty(\mu)$.

(6) Αν το μ είναι πραγματικό τότε υπάρχει διαμέριση $X = A \cup B$ ώστε

$$\mu^+(E) = \mu(A \cap E) \quad \mu^-(E) = -\mu(B \cap E)$$

για κάθε E. Το ζευγάρι A, B ονομάζεται ανάλυση Hahn τού X ως προς το μ.

Απόδειξη. Γράφουμε $d\mu = w\, d|\mu|$ όπου η w έχει απόλυτη τιμή 1. Αφού το μ είναι πραγματικό, έχουμε $w = \pm 1$. Θέτουμε $A = \{w = 1\}$ και $B = \{w = -1\}$. Αφού

$$d\mu^+ = \frac{1}{2}(d|\mu| + d\mu) = \frac{1}{2}(1 + w)\, d|\mu|,$$

έχουμε

$$\mu^+(E) = \frac{1}{2}\int_{A\cap E}(1 + w)d|\mu| = \int_{A\cap E} w\, d|\mu| = \mu(A \cap E).$$

Συνεπώς

$$\mu^-(E) = \mu^+(E) - \mu(E) = \mu(A \cap E) - \mu(E) = -\mu(B \cap E).$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Διαφόριση

Ορισμός 9.1. *Αν το μ είναι ένα μιγαδικό μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^d$ τότε θέτουμε*

$$M\mu(x) = \sup_{r>0} \frac{|\mu|(B(x,r))}{m(B(x,r))},$$

όπου $B(x,r) = \{y : |x-y| < r\}$. Η $M\mu$ ονομάζεται μεγιστική συνάρτηση των Hardy-Littlewood.

Παρατήρηση. Η μεγιστική συνάρτηση είναι Lebesgue μετρήσιμη γιατί για κάθε $a > 0$, το σύνολο $L_a = \{M\mu > a\}$ είναι ανοιχτό. Πράγματι αν $x \in L_a$, τότε υπάρχουν $b > 0$ και $r > 0$ ώστε

$$\frac{|\mu|(B(x,r))}{m(B(x,r))} > b > a.$$

Τότε για $\delta > 0$ ώστε $b(r/(r+\delta))^d > a$, έχουμε για $y \in B(x,\delta)$

$$M\mu(y) \geq \frac{|\mu|(B(y,r+\delta))}{m(B(y,r+\delta))} \geq \frac{|\mu|(B(x,r))}{m(B(x,r))} \cdot \frac{m(B(x,r))}{m(B(y,r+\delta))} > b\left(\frac{r}{r+\delta}\right)^d > a.$$

Συνεπώς $B(x,\delta) \subset L_a$, άρα το L_a είναι ανοιχτό.

Θεώρημα 9.2 (Η weak-type ανισότητα για την μεγιστική συνάρτηση)**.** *Υπάρχει μια απόλυτη θετική σταθερά C_d η οποία εξαρτάται μόνο από τη διάσταση d τέτοια ώστε*

$$m(\{M\mu > \lambda\}) \leq \frac{C_d}{\lambda}\|\mu\|,$$

για κάθε $\lambda > 0$ και κάθε μέτρο μ ($\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R}^d)$ είναι η ολική κύμανση τού $\mathbb{R}^d$).

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται στην ακόλουθη γεωμετρική παρατήρηση η οποία είναι γνωστή ως λήμμα τού Wiener: Αν $\mathscr{B}$ είναι μια πεπερασμένη οικογένεια από δίσκους, τότε υπάρχει υπο-οικογένεια $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}$ ξένων ανά δύο δίσκων ώστε

$$\bigcup_{B\in\mathscr{B}} B \subset \bigcup_{B\in\mathscr{C}} 3B,$$

όπου $3B$ είναι ο δίσκος που έχει το ίδιο κέντρο με τον B και 3-πλάσια ακτίνα.

[Το πρώτο στοιχείο τής $\mathscr{C}$ είναι ο δίσκος με τη μεγαλύτερη ακτίνα. Πετάμε έξω όσους δίσκους τον τέμνουν. Το δεύτερο στοιχείο τής $\mathscr{C}$ είναι ο μεγαλύτερος (ως προς την ακτίνα) δίσκος από αυτούς που έμειναν. Πετάμε έξω όσους τον τέμνουν και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρι να εξαντλήσουμε τη $\mathscr{B}$.]

Έστω τώρα K τυχόν συμπαγές υποσύνολο τού $\{M\mu > \lambda\}$. Τότε υπάρχει πεπερασμένη οικογένεια δίσκων $\mathscr{B}$ με κέντρα στο K η οποία καλύπτει το K και τέτοια ώστε

$$\frac{|\mu|(B)}{m(B)} > \lambda,$$

για κάθε $B \in \mathscr{B}$. Εφαρμόζουμε το λήμμα τού Wiener στη $\mathscr{B}$ και παίρνουμε μια $\mathscr{C}$ για την οποία έχουμε

$$m(K) \leq m\left(\bigcup_{B\in\mathscr{B}} B\right) \leq m\left(\bigcup_{B\in\mathscr{C}} 3B\right) \leq 3^d \sum_{B\in\mathscr{C}} m(B) \leq \frac{3^d}{\lambda} \sum_{B\in\mathscr{C}} |\mu|(B) = \frac{3^d}{\lambda}|\mu|\left(\bigcup_{B\in\mathscr{C}} B\right) \leq \frac{3^d}{\lambda}\|\mu\|.$$

Παίρνοντας supremum ως προς K έχουμε το ζητούμενο με $C_d = 3^d$. □

Παρατήρηση. Αν $f \in L^1$ τότε η weak-type ανισότητα για το μέτρο $f\,dm$ παίρνει τη μορφή

$$m(\{Mf > \lambda\}) \leq \frac{C_d}{\lambda}\|f\|_1,$$

όπου

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f| = \sup_{r>0} \mathcal{A}_r|f|(x).$$

Εδώ για οποιαδήποτε τοπικά ολοκληρώσιμη (=ολοκληρώσιμη σε κάθε δίσκο) συνάρτηση g, με $\mathcal{A}_r g(x)$ συμβολίζουμε τη μέση τιμή της πάνω στο $B(x,r)$.

Αν η f είναι τοπικά ολοκληρώσιμη, τότε από τον ε-δ ορισμό τής συνέχειας έπεται άμεσα ότι $\lim_{r\to 0} \mathcal{A}_r f(x) = f(x)$ σε κάθε σημείο συνέχειας x τής f. Θα δείξουμε χρησιμοποιώντας την weak-type ανισότητα ότι ισχύει ένα εξαιρετικά ισχυρότερο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 9.3 (Το θεώρημα διαφόρισης τού Lebesgue)**.** *Αν η f είναι τοπικά ολοκληρώσιμη τότε $\lim_{r\to 0} \mathcal{A}_r f(x) = f(x)$ για σχεδόν όλα τα x.*

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f \in L^1$. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\delta > 0$ το σύνολο

$$\{\limsup_{r\to 0} |\mathcal{A}_r f - f| > \delta\}$$

έχει μέτρο μηδέν. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει g συνεχής τέτοια ώστε $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. Έχουμε

$$|\mathcal{A}_r f - f| \le \mathcal{A}_r(|f-g|) + |\mathcal{A}_r g - g| + |f-g| \le M(f-g) + |\mathcal{A}_r g - g| + |f-g|.$$

Εφόσον $\mathcal{A}_r g \to g$ καθώς $r \to 0$, παίρνουμε

$$\limsup_{r\to 0} |\mathcal{A}_r f - f| \le M(f-g) + |f-g|.$$

Άρα, από τη weak-type ανισότητα

$$m(\{\limsup_{r\to 0} |\mathcal{A}_r f - f| > \delta\}) \le m(\{M(f-g) > \delta/2\}) + m(\{|f-g| > \delta/2\}) \le \frac{C'_d}{\delta}\|f-g\|_1 < \frac{C'_d}{\delta}\varepsilon,$$

όπου C'_d θετική σταθερά. Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ και έτσι το συμπέρασμα έπεται. □

Ορισμός 9.4. *Το σύνολο των σημείων στα οποία έχουμε σύγκλιση στο προηγούμενο θεώρημα ονομάζεται σύνολο Lebesgue τής f.*

Θεώρημα 9.5 (Διαφόριση μέτρων)**.** *Έστω μ ένα μιγαδικό μέτρο Borel στο $\mathbb{R}^d$.*

(1) *Αν $\mu \ll m$ τότε*

$$\frac{d\mu}{dm}(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{m(B(x,r))},$$

για m-σχεδόν όλα τα x.

(2) *Αν $\mu \perp m$ τότε*

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{m(B(x,r))} = 0,$$

για m-σχεδόν όλα τα x.

Το όριο παραπάνω συμβολίζεται με $D\mu(x)$ ("παράγωγος" μέτρου).

Απόδειξη.

(1) Προκύπτει αν εφαρμόσουμε το θεώρημα διαφόρισης τού Lebesgue στην παράγωγο Radon-Nikodym.

(2) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το μ είναι θετικό. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\mu \perp m$, το μ είναι συγκεντρωμένο σε κάποιο E με $m(E) = 0$. Αφού το μ είναι κανονικό, υπάρχει $K \subset E$ συμπαγές με $\mu(E \setminus K) < \varepsilon$. Έστω τώρα ν ο περιορισμός τού μ στο $E \setminus K$. Θέτουμε

$$h(x) = \limsup_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{m(B(x,r))}.$$

Τότε $h \le M\nu$ στο συμπλήρωμα τού K. Επομένως για αυθαίρετο $\delta > 0$

$$\{h > \delta\} \subset K \cup \{M\nu > \delta\}.$$

Έτσι η weak-type ανισότητα δίνει

$$m(\{h > \delta\}) \le m(\{M\nu > \delta\}) \le \frac{C_d}{\delta}\|\nu\| < \frac{C_d}{\delta}\varepsilon.$$

Επομένως $m(\{h > \delta\}) = 0$ για κάθε δ και το συμπέρασμα έπεται.

□

Θεώρημα 9.6. *Αν η f είναι τοπικά ολοκληρώσιμη τότε $\lim_{r\to 0} \mathcal{A}_r(|f - f(x)|)(x) = 0$ για σχεδόν όλα τα x.*

Απόδειξη. Για κάθε q σε κάποιο αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο τού $\mathbb{C}$, έστω S_q το συμπλήρωμα τού συνόλου Lebesgue τής $|f - q|$. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$ και $x \notin \bigcup_q S_q$. Τότε υπάρχει q_0 τέτοιο ώστε $|f(x) - q_0| < \varepsilon$, επομένως

$$\mathcal{A}_r(|f - f(x)|) \le \mathcal{A}_r(|f - q_0|) + \varepsilon.$$

Άρα

$$\limsup_{r\to 0} \mathcal{A}_r(|f - f(x)|)(x) \le 2\varepsilon,$$

και το συμπέρασμα έπεται. □

Θεώρημα 9.7 (Το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα τού Απειροστικού Λογισμού á la Lebesgue)**.** *Αν η f είναι τοπικά ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$, σταθεροποιήσουμε $a \in \mathbb{R}$ και θέσουμε $F(x) = \int_a^x f$ για κάθε x, τότε η F είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη και $F' = f$ σχεδόν παντού.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \le 2\mathcal{A}_{|h|}(|f - f(x)|)(x),$$

και το συμπέρασμα έπεται από το προηγούμενο θεώρημα. □

Θεώρημα 9.8. *Αν το $A \subset \mathbb{R}^d$ έχει θετικό μέτρο Lebesgue, τότε για σχεδόν όλα τα $x \in A$ έχουμε*

$$\lim_{r\to 0} \frac{m(A \cap B(x,r))}{m(B(x,r))} = 1.$$

Απόδειξη. Τα ζητούμενα σημεία είναι τα σημεία Lebesgue τής χαρακτηριστικής συνάρτησης τού A τα οποία περιέχονται στο A. □

Ορισμός 9.9. *Τα σημεία στα οποία έχουμε σύγκλιση στο προηγούμενο θεώρημα λέγονται σημεία πυκνότητας τού A.*

Ορισμός 9.10. *Μια συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ ονομάζεται απόλυτα συνεχής (AC), αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε οικογένεια ξένων ανά δύο διαστημάτων $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\dots,(a_n,b_n) \subset [a,b]$, με $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$ έχουμε $\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.*

Παρατηρήσεις.

- Η απόλυτη συνέχεια συνεπάγεται ομοιόμορφη συνέχεια.
- Μια απόλυτα συνεχής συνάρτηση ικανοποιεί τη συνεπαγωγή τού ορισμού και με άπειρα αθροίσματα.

Θεώρημα 9.11. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και αύξουσα. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(1) *Η f είναι AC.*
(2) *Η f στέλνει σύνολα μέτρου μηδέν σε σύνολα μέτρου μηδέν.*
(3) *Η f είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη, $f' \in L^1$ και $f(x) - f(a) = \int_a^x f'$ για κάθε x.*

Απόδειξη.

(1)⇒(2) Έστω $N \subset [a,b]$ με $m(N) = 0$, $\varepsilon > 0$ τυχόν, και $\delta > 0$ το δέλτα που δίνει ο ορισμός τής απόλυτης συνέχειας. Επιλέγουμε $(a_k,b_k) \subset [a,b]$ ξένα ανά δύο με $N \subset \bigcup_k (a_k,b_k)$ και $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$. Τότε

$$f(N) \subset \bigcup_k f((a_k,b_k)) \subset \bigcup_k [f(a_k), f(b_k)],$$

με $\sum_k (f(b_k) - f(a_k)) < \varepsilon$. Άρα $m(f(N)) = 0$.

(2)⇒ (3) Θέτουμε $g(x) = x + f(x)$. Τότε η g στέλνει σύνολα μέτρου μηδέν σε σύνολα μέτρου μηδέν. Πράγματι, αν το N έχει μέτρο μηδέν τότε και το $f(N)$ έχει μέτρο μηδέν, άρα για κάθε ε υπάρχουν διαστήματα I_k ώστε $N \subset \bigcup_k I_k$, $\sum_k m(I_k) < \varepsilon$ και $\sum_k m(f(I_k)) < \varepsilon$. Άρα $g(N) \subset \bigcup_k (I_k + f(I_k))$ με $\sum_k m(I_k + f(I_k)) < 2\varepsilon$. Επομένως $m(g(N)) = 0$. Τώρα το τυχόν μετρήσιμο E γράφεται $\bigcup_j K_j \cup N$, όπου τα K_j είναι συμπαγή και το N έχει μέτρο μηδέν. Άρα

$$g(E) = \bigcup_j g(K_j) \cup g(N).$$

Τα $g(K_j)$ είναι συμπαγή και το $g(N)$ έχει μέτρο μηδέν, άρα το $g(E)$ είναι μετρήσιμο. Δηλαδή η g στέλνει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα. Επομένως έχει νόημα να θέσουμε $\mu(E) = m(g(E))$. Τότε το μ είναι μέτρο γιατί η g είναι 1-1 και έτσι η εικόνα μιας ξένης ένωσης είναι ξένη. Επίσης $\mu \ll m$. Άρα από το θεώρημα Radon-Nikodym, υπάρχει h m-ολοκληρώσιμη ώστε $d\mu = h\,dm$. Ιδιαίτερα $\mu([a,x]) = \int_a^x h$.

Ισοδύναμα $f(x) - f(a) = \int_a^x (h-1)$. Από το 1ο θεμελιώδες θεώρημα τού Απειροστικού Λογισμού, η f είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη και $f' = h - 1$ σχεδόν παντού, και το συμπέρασμα έπεται.

(3)⇒(1) Θέτουμε $d\nu = f'\,dm$. Τότε $\nu \ll m$, άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $m(E) < \delta$ να έχουμε $|\nu|(E) < \varepsilon$. Ιδιαίτερα αν τα (a_k, b_k) είναι ανά δύο ξένα με συνολικό μήκος μικρότερο από δ τότε

$$\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| \le \sum_k \int_{a_k}^{b_k} |f'| = \sum_k |\nu|((a_j, b_j)) = |\nu|\left(\bigcup_k (a_k, b_k)\right) < \varepsilon.$$

□

Ορισμός 9.12. *Αν η f είναι μια μιγαδική συνάρτηση στο $[a,b]$, για κάθε $x \in [a,b]$ θέτουμε*

$$F(x) = \sup \sum_k |f(t_k) - f(t_{k-1})|,$$

όπου το sup *είναι πάνω σε όλες τις διαμερίσεις $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = x$ τού $[a,x]$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται ολική κύμανση τής f. Αν $F(b) < +\infty$, τότε η f λέγεται φραγμένης κύμανσης (BV).*

Θεώρημα 9.13. *Αν η f είναι πραγματική και AC στο $[a,b]$, τότε οι F, $F - f$ και $F + f$ είναι αύξουσες και AC.*

Απόδειξη. Έστω $a < x < y < b$ και $a = t_0 < \cdots < t_n = x$ τυχούσα διαμέριση τού $[a,x]$. Τότε

$$\sum_k |f(t_k) - f(t_{k-1})| + |f(y) - f(x)| \le F(y).$$

Παίρνοντας supremum ως προς όλες τις διαμερίσεις έχουμε $F(x) + |f(y) - f(x)| \le F(y)$. Η ανισότητα αυτή δίνει

$$F(x) \le F(y), \quad F(x) - f(x) \le F(y) - f(y), \quad F(x) + f(x) \le F(y) + f(y),$$

επομένως οι τρεις συναρτήσεις είναι αύξουσες. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, αρκεί να δείξουμε ότι η F είναι AC. Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$ και έστω $\delta > 0$ το δέλτα τού ορισμού τής απόλυτης συνέχειας τής f. Αν $(a_k, b_k) \subset [a,b]$ είναι ξένα ανά δύο με συνολικό μήκος μικρότερο από δ και t_j^k τυχούσες διαμερίσεις τους, τότε

$$\sum_k \sum_j |f(t_j^k) - f(t_{j-1}^k)| < \varepsilon.$$

Παίρνοντας supremum ως προς όλες αυτές τις διαμερίσεις έχουμε $\sum_k (F(b_k) - F(a_k)) \le \varepsilon$. □

Θεώρημα 9.14 (Το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα τού απειροστικού λογισμού á la Lebesgue)**.** *Αν η f είναι AC στο $[a,b]$ τότε είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη, $f' \in L^1$ και $f(x) - f(a) = \int_a^x f'$ για κάθε x.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι πραγματική. Γράφουμε $f = \frac{F+f}{2} - \frac{F-f}{2}$ και εφαρμόζουμε τα δύο προηγούμενα θεωρήματα. □

Θεώρημα 9.15. *Αν η f είναι μονότονη στο $[a,b]$ τότε είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη.*

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη τής γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα. Θέτουμε

$$g(x) = \lim_{t \to x-} f(t).$$

Τότε η g είναι αύξουσα και αριστερά συνεχής. Θεωρούμε το μέτρο Borel μ για το οποίο

$$\mu([c,d)) = g(d) - g(c)$$

για κάθε $[c,d) \subset [a,b)$. Δηλαδή η g είναι η συνάρτηση κατανομής τού μ. Έστω $d\mu = h\,dm + d\mu_s$, $h \in L^1$, $\mu_s \perp m$, η ανάλυση Lebesgue τού μ. Τότε

$$g(x) = g(a) + \int_a^x h + \mu_s([a,x)),\ x > a.$$

Επομένως

$$f(x) = g(a) + \int_a^x h + \mu_s([a,x)) + \nu([a,x]) - \nu([a,x)) = g(a) + H(x) + S_1(x) - S_2(x),$$

όπου

$$\nu = \sum_x (f(x) - g(x))\delta_x.$$

Το άθροισμα έχει το πολύ αριθμήσιμο πλήθος όρων που αντιστοιχούν στα άλματα τής f και τής g. Έτσι $\nu \perp m$. Από τα θεωρήματα διαφόρισης, $H' = h$ και $S_1' = 0$, $S_2' = 0$ σχεδόν παντού. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού. □

Παρατηρήσεις.

- Αν η f είναι BV και F είναι η ολική της κύμανση, τότε $f = \frac{F+f}{2} - \frac{F-f}{2}$, με τις δυο συναρτήσεις στα κλάσματα αύξουσες. Από το προηγούμενο θεώρημα η f είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη.
- Παρακινούμενοι από την απόδειξη τού προηγούμενου θεωρήματος, αν το μ είναι ένα μιγαδικό μέτρο Borel στο $\mathbb{R}^d$ τότε το σύνολο των "ατόμων" τού μ δηλαδή το σύνολο των σημείων με μη-μηδενικό μέτρο είναι το πολύ αριθμήσιμο. Έτσι το μέτρο $\sum_x \mu(\{x\})\delta_x$ είναι ιδιάζον ως προς το μέτρο Lebesgue. Συνεπώς μπορούμε να συμπληρώσουμε την ανάλυση Lebesgue ως εξής.

$$\mu = \mu_a + \mu_{sc} + \mu_{sd},$$

όπου $\mu_a \ll m$, μ_{sc} ιδιάζον και "συνεχές", δηλαδή δεν έχει άτομα, και μ_{sd} ιδιάζον και "διακριτό", δηλαδή αποτελείται από άτομα. Παράδειγμα ιδιάζοντος διακριτού μέτρου είναι το $\sum_n \frac{1}{2^n}\delta_{q_n}$ όπου q_n είναι μια αρίθμηση των ρητών. Η συνάρτηση κατανομής του είναι ασυνεχής ακριβώς σε κάθε ρητό. Παράδειγμα ιδιάζοντος συνεχούς μέτρου είναι το μέτρο με συνάρτηση κατανομής τη συνάρτηση τού Cantor. Παρατηρήστε ότι, γενικά, οι ασυνέχειες τής συνάρτησης κατανομής αντιστοιχούν σε άτομα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Γινόμενο μέτρων

Ορισμός 10.1. *Μια οικογένεια $\mathscr{D}$ υποσυνόλων ενός συνόλου X λέγεται κλάση Dynkin αν*

(1) $X \in \mathscr{D}$.
(2) *Αν* $A, B \in \mathscr{D}$ *και* $A \subset B$ *τότε* $B \setminus A \in \mathscr{D}$.
(3) *Αν* A_n *είναι μια αύξουσα ακολουθία συνόλων στην* $\mathscr{D}$ *τότε και η ένωσή τους είναι στην* $\mathscr{D}$.

Αν $\mathscr{C}$ είναι οποιαδήποτε οικογένεια υποσυνόλων τού X με $\delta(\mathscr{C})$ συμβολίζουμε την μικρότερη κλάση Dynkin που περιέχει την $\mathscr{C}$.

Παραδείγματα.

- Κάθε σ-άλγεβρα είναι κλάση Dynkin.
- Αν μ και ν είναι δυο πεπερασμένα μέτρα σε κάποιο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathscr{A})$ με $\mu(X) = \nu(X)$, τότε η οικογένεια των συνόλων στα οποία τα δυο μέτρα συμφωνούν είναι κλάση Dynkin.

Θεώρημα 10.2. *Αν $\mathscr{C}$ είναι μια οικογένεια κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές τότε $\delta(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C})$.*

Απόδειξη. Προφανώς $\delta(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{C})$ γιατί κάθε σ-άλγεβρα είναι κλάση Dynkin. Για το αντίστροφο θέτουμε $\mathscr{D} = \delta(\mathscr{C})$ και θα δείξουμε ότι η $\mathscr{D}$ είναι σ-άλγεβρα. Θέτουμε

$$\mathscr{D}_1 = \{A \in \mathscr{D} : A \cap C \in \mathscr{D} \text{ για κάθε } C \in \mathscr{C}\}.$$

Τότε η $\mathscr{D}_1$ είναι κλάση Dynkin που περιέχει την $\mathscr{C}$, άρα $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}$. Στη συνέχεια θέτουμε

$$\mathscr{D}_2 = \{A \in \mathscr{D} : A \cap B \in \mathscr{D} \text{ για κάθε } B \in \mathscr{D}\}.$$

Η $\mathscr{D}_2$ είναι κλάση Dynkin και περιέχει την $\mathscr{C}$ γιατί $\mathscr{D} = \mathscr{D}_1$. Συνεπώς $\mathscr{D} = \mathscr{D}_2$, άρα η $\mathscr{D}$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές, άρα ως προς τις πεπερασμένες ενώσεις (αφού είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα), άρα ως προς τις αυθαίρετες αριθμήσιμες ενώσεις αφού

$$\bigcup_n A_n = \bigcup_n \bigcup_{k \le n} A_k.$$

□

Παρατήρηση. Αν τα μ και ν είναι δυο πεπερασμένα μέτρα σε κάποιο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathscr{A})$ με $\mu(X) = \nu(X)$, αν η $\mathscr{A}$ παράγεται από μια οικογένεια $\mathscr{C}$ η οποία είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές, και αν τα δυο μέτρα συμφωνούν στα σύνολα τής $\mathscr{C}$, τότε από το προηγούμενο θεώρημα $\mu = \nu$. Αν τα μέτρα δεν είναι πεπερασμένα, αλλά υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $C_n \in \mathscr{C}$ με $\mu(C_n) = \nu(C_n) < +\infty$, τότε $\mu|_{C_n} = \nu|_{C_n}$, άρα πάλι $\mu = \nu$.

Ορισμός 10.3. *Αν $(X, \mathscr{A})$ και $(Y, \mathscr{B})$ είναι μετρήσιμοι χώροι, τότε ένα σύνολο τής μορφής $A \times B$, $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{B}$ λέγεται μετρήσιμο ορθογώνιο. Θέτουμε $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ να είναι η σ-άλγεβρα στο $X \times Y$ που παράγεται από την οικογένεια όλων των μετρήσιμων ορθογωνίων.*

Παράδειγμα. $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{B}(\mathbb{R}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$. Πράγματι όλα τα ανοιχτά ορθογώνια είναι στην $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{B}(\mathbb{R})$ άρα όλα τα σύνολα Borel στο $\mathbb{R}^2$ ανήκουν στην $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Αντίστροφα για κάθε $G \subset \mathbb{R}$ ανοιχτό η οικογένεια $\{B \subset \mathbb{R} : B \times G \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)\}$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει τα ανοιχτά σύνολα, άρα το σύνολο $B \times G$ είναι Borel στο $\mathbb{R}^2$ για κάθε B Borel στο $\mathbb{R}$. Ανάλογα, για κάθε B Borel στο $\mathbb{R}$ η οικογένεια $\{C \subset \mathbb{R} : B \times C \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)\}$ περιέχει όλα τα ανοιχτά σύνολα και είναι σ-άλγεβρα, όλα τα Borel×Borel ορθογώνια είναι σύνολα Borel. Εναλλακτικά, οι προβολές

$$\pi_1(x, y) = x, \quad \pi_2(x, y) = y$$

είναι συνεχείς και $A \times B = \pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(B)$. Γενικότερα

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^s) \times \mathscr{B}(\mathbb{R}^t) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^{s+t}).$$

Ορισμός 10.4. *Αν $E \subset X \times Y$ και η f είναι μια συνάρτηση στο $X \times Y$ τότε για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$ ορίζουμε*

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}, \quad E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

$$f_x(t) = f(x,t), \quad f^y(s) = f(s,y).$$

Παρατήρηση. Οι οικογένειες

$$\{E \in \mathscr{A} \times \mathscr{B} : E_x \in \mathscr{B}\}, \quad \{E \in \mathscr{A} \times \mathscr{B} : E^y \in \mathscr{A}\}$$

είναι σ-άλγεβρες και περιέχουν όλα τα μετρήσιμα ορθογώνια, άρα τα σύνολα E_x και E^y είναι μετρήσιμα για κάθε x και y. Δηλαδή όλες οι "φέτες" ενός μετρήσιμου συνόλου είναι μετρήσιμες. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι αν η f είναι μετρήσιμη τότε και οι f_x και f^y είναι μετρήσιμες.

Παράδειγμα. Αν $(\mathscr{M}_d, m_d)$ είναι ο χώρος μέτρου Lebesgue στον $\mathbb{R}^d$, τότε $\mathscr{M}_s \times \mathscr{M}_t \subsetneq \mathscr{M}_{s+t}$. Πράγματι αν τα $A_1 \subset \mathbb{R}^s$ και $A_2 \subset \mathbb{R}^t$ είναι μετρήσιμα, τότε υπάρχουν $B_1, N_1 \subset \mathbb{R}^s$, $B_2, N_2 \subset \mathbb{R}^t$, όπου B_1, B_2 Borel, και N_1, N_2 μηδενικού μέτρου, ώστε $A_1 = B_1 \cup N_1$, $A_2 = B_2 \cup N_2$. Έτσι

$$A_1 \times A_2 = (B_1 \times B_2) \cup (B_1 \times N_2) \cup (N_1 \times B_2) \cup (N_1 \times N_2),$$

όπου το $B_1 \times B_2$ είναι Borel και τα άλλα τρία έχουν μηδενικό m_{s+t} μέτρο. Άρα $A_1 \times A_2 \in \mathscr{M}_{s+t}$. Για να δείξουμε ότι ο εγκλεισμός είναι γνήσιος στην περίπτωση, για παράδειγμα $s = t = 1$, παίρνουμε V ένα μη μετρήσιμο υποσύνολο τού $\mathbb{R}$ και παρατηρούμε ότι $A = \{0\} \times V \notin \mathscr{M}_1 \times \mathscr{M}_1$ άλλα $m_2^*(A) = 0$, άρα $A \in \mathscr{M}_2$.

Θεώρημα 10.5. *Αν $(X, \mathscr{A}, \mu)$ και $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ είναι σ-πεπερασμένοι χώροι μέτρου τότε για κάθε $E \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}$, οι συναρτήσεις*

$$f_E(x) = \nu(E_x), \quad g_E(y) = \mu(E^y)$$

είναι μετρήσιμες. Οι συναρτήσεις είναι καλά ορισμένες από την προηγούμενη παρατήρηση.

Απόδειξη. Αν τα μέτρα είναι πεπερασμένα θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathscr{F} = \{E \in \mathscr{A} \times \mathscr{B} : \text{Η } f_E \text{ είναι μετρήσιμη}\}.$$

Αν το $A \times B$ είναι μετρήσιμο ορθογώνιο τότε $f_{A \times B}(x) = \nu(B)\chi_A(x)$, άρα $A \times B \in \mathscr{F}$. Επίσης η $\mathscr{F}$ είναι κλάση Dynkin γιατί

$$\nu((B \setminus A)_x) = \nu(B_x) - \nu(A_x), \quad \nu((\cup_n E_n)_x) = \lim_n \nu((E_n)_x),$$

για $A \subset B$ και E_n αύξουσα. Τέλος η οικογένεια των μετρήσιμων ορθογωνίων είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές. Έτσι από το θεώρημα 10.2, $\mathscr{F} = \mathscr{A} \times \mathscr{B}$. Αν τώρα $Y = \bigcup_n A_n$ με τα A_n ανά δύο ξένα και $\nu(A_n) < +\infty$, τότε ορίζουμε τα πεπερασμένα μέτρα $\nu_n = \nu|_{A_n}$ και εφαρμόζουμε το προηγούμενο παρατηρώντας ότι $\nu(E_x) = \sum_n \nu_n(E_x)$. Ομοίως με την g_E. □

Το επόμενο θεώρημα εκφράζει την αρχή "εμβαδό=βάση×ύψος".

Θεώρημα 10.6. *Αν οι $(X, \mathscr{A}, \mu)$ και $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ είναι σ-πεπερασμένοι χώροι μέτρου τότε υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο $\mu \times \nu$ στον μετρήσιμο χώρο $(X \times Y, \mathscr{A} \times \mathscr{B})$ έτσι ώστε για κάθε $E \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}$ να έχουμε*

$$(\mu \times \nu)(E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y).$$

Οι συναρτήσεις στα ολοκληρώματα είναι μετρήσιμες από το προηγούμενο θεώρημα. Το μέτρο αυτό λέγεται μέτρο γινόμενο.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$(\mu \times \nu)_1(E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x), \quad (\mu \times \nu)_2(E) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y).$$

Οι δυο ποσότητες είναι μέτρα και συμφωνούν στα μετρήσιμα ορθογώνια διότι

$$(\mu \times \nu)_1(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = (\mu \times \nu)_2(A \times B).$$

Άρα $(\mu \times \nu)_1 = (\mu \times \nu)_2$ από την παρατήρηση μετά το θεώρημα 10.2 □

Παρατηρήσεις.

- Από το προηγούμενο θεώρημα, το μέτρο $m_s \times m_t$ ((s-διάστατο Lebesgue)×(t-διάστατο Lebesgue)) συμφωνεί με το m_{s+t} (($s+t$)-διάστατο Lebesgue) σε όλα τα μετρήσιμα ορθογώνια, άρα σε όλα τα $(\mathscr{M}_s \times \mathscr{M}_t)$-μετρήσιμα σύνολα.

- Όπως είδαμε παραπάνω, αν το $V \subset \mathbb{R}$ είναι μη-μετρήσιμο τότε το $\{0\} \times V$ δεν είναι $(m_1 \times m_1)$-μετρήσιμο παρά το ότι περιέχεται στο $\{0\} \times \mathbb{R}$ το οποίο έχει μηδενικό $m_1 \times m_1$ μέτρο. Δηλαδή τα μέτρα $m_s \times m_t$ δεν είναι πλήρη. Τώρα, αν ένας χώρος μέτρου $(X, \mathscr{A}, \mu)$ δεν είναι πλήρης μπορούμε να επεκτείνουμε την σ-άλγεβρα και να πάρουμε ένα πλήρη χώρο μέτρου ως εξής. Θέτουμε
$$\mathscr{A}_0 = \{A \cup B : A \in \mathscr{A},\ B \subset C,\ C \in \mathscr{A},\ \mu(C) = 0\},$$
και για A, B όπως παραπάνω θέτουμε $\mu_0(A \cup B) = \mu(A)$. Ο χώρος $(X, \mathscr{A}_0, \mu_0)$ λέγεται πλήρωση τού $(X, \mathscr{A}, \mu)$ και είναι η μικρότερη πλήρης επέκταση του. Για παράδειγμα η πλήρωση τού $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), m)$ είναι ο $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, m)$. Η πλήρωση τού $(\mathbb{R}^{s+t}, \mathscr{M}_s \times \mathscr{M}_t, m_s \times m_t)$ είναι ο $(\mathbb{R}^{s+t}, \mathscr{M}_{s+t}, m_{s+t})$.

Θεώρημα 10.7 (Fubini I)**.** *Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ και $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου και $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη. Τότε*

(1) *Οι συναρτήσεις*
$$x \mapsto \int_Y f_x \, d\nu, \quad y \mapsto \int_X f^y \, d\mu$$
είναι μετρήσιμες.

(2)
$$\int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y f_x \, d\nu \, d\mu(x) = \int_Y \int_X f^y \, d\mu \, d\nu(y).$$

Απόδειξη. Από τα δυο προηγούμενα θεωρήματα, τα συμπεράσματα ισχύουν για χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Άρα για απλές, άρα για όλες τις μη αρνητικές μετρήσιμες. □

Θεώρημα 10.8 (Fubini II)**.** *Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ και $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου και $f \in L^1(\mu \times \nu)$. Τότε*

(1) *$f_x \in L^1(\nu)$ για μ-σχεδόν όλα τα x και $f^y \in L^1(\mu)$ για ν-σχεδόν όλα τα y.*

(2) *$\int_Y f(\cdot, y) \, d\nu(y) \in L^1(\mu)$ και $\int_X f(x, \cdot) \, d\mu(x) \in L^1(\nu)$ (οι συναρτήσεις είναι σχεδόν παντού ορισμένες από το (1)).*

(3)
$$\int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y f_x \, d\nu \, d\mu(x) = \int_Y \int_X f^y \, d\mu \, d\nu(y).$$

Απόδειξη. Τα (1) και (2) προκύπτουν από το Fubini I για την $|f|$. Το (3) προκύπτει από το Fubini I για τα θετικά και αρνητικά μέρη τού πραγματικού και φανταστικού μέρους τής f. □

Παρατηρήσεις.

- Τα δυο προηγούμενα θεωρήματα συχνά αναφέρονται ως "θεώρημα Fubini".
- Αν μια μετρήσιμη συνάρτηση h στον $(\mathbb{R}^{s+t}, \mathscr{M}_{s+t}, m_{s+t})$ είναι σχεδόν παντού ίση με μηδέν, τότε το σύνολο $\{f \neq 0\}$ περιέχεται σε ένα σύνολο Borel μηδενικού μέτρου. Επομένως, από το θεώρημα Fubini σχεδόν όλες οι φέτες h_x και h^y είναι μετρήσιμες και είναι σχεδόν παντού ίσες με μηδέν. Έτσι τα θεωρήματα Fubini I και II εξακολουθούν να ισχύουν στην περίπτωση $\mu = m_s$, $\nu = m_t$ με το m_{s+t} στη θέση τού μέτρου γινομένου $m_s \times m_t$. Η μοναδική διαφορά είναι ότι στο (1) τού Fubini I, οι συναρτήσεις είναι ορισμένες για σχεδόν όλα τα x και y.
- Με τελείως ανάλογο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε το γινόμενο πεπερασμένου πλήθους χώρων μέτρου.

Τα παρακάτω είναι εφαρμογές του θεωρήματος Fubini.

(1) (Διπλές σειρές.) Θεωρώντας το γινόμενο τού αριθμητικού μέτρου στο $\mathbb{N}$ με τον εαυτό του, έχουμε ότι για κάθε μη-αρνητική διπλή ακολουθία $a_{n,m}$
$$\sum_{n,k} a_{n,k} = \sum_n \sum_k a_{n,k} = \sum_k \sum_n a_{n,k}.$$

(2) (Συναρτήσεις κατανομής.) Αν ο $(X, \mathscr{A}, \mu)$ είναι σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου και η f μη-αρνητική μετρήσιμη, τότε η συνάρτηση $F(x, t) = \chi_{\{f > t\}}(x)$ είναι $(\mathscr{A} \times \mathscr{B}([0, +\infty))$-μετρήσιμη, επομένως
$$\int F \, d(\mu \times m) = \int_X \int_0^{+\infty} \chi_{\{f>t\}}(x) \, dt \, d\mu(x) = \int_X \int_0^{f(x)} dt \, d\mu(x) = \int_X f \, d\mu.$$
Απ' την άλλη
$$\int F \, d(\mu \times m) = \int_0^{+\infty} \int_X \chi_{\{f>t\}}(x) \, d\mu(x) \, dt = \int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\}) \, dt.$$

Συνεπώς για κάθε f μετρήσιμη έχουμε

$$\|f\|_1 = \int_0^{+\infty} \mu(\{|f| > t\})\, dt.$$

Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι αν $p > 0$ τότε

$$\int |f|^p\, d\mu = p \int_0^{+\infty} t^{p-1}\mu(\{|f| > t\})\, dt.$$

(3) (Εκτιμήσεις για τη μεγιστική συνάρτηση.) Η μεγιστική συνάρτηση δεν είναι φραγμένη στον L^1 (αντί αυτού έχουμε τη weak-type ανισότητα). Παρά ταύτα είναι φραγμένη σε κάθε L^p, $p > 1$. Θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $A \lesssim B$. Αυτό σημαίνει $A \leq CB$, όπου C μια θετική σταθερά (απόλυτη, ή εξαρτώμενη από το p ή/και τη διάσταση d) η οποία μπορεί να μην είναι η ίδια κάθε φορά που εμφανίζεται. Για $f \in L^p$ θετική και $t > 0$ θέτουμε $f_t = f\chi_{f>t/2}$. Τότε $Mf \leq Mf_t + t/2$. Επομένως $\{Mf > t\} \subset \{Mf_t > t/2\}$. Επομένως από τη weak-type ανισότητα έχουμε

$$m(\{Mf > t\}) \leq m(\{Mf_t > t/2\}) \lesssim \frac{1}{t}\int_{\{f>t/2\}} f.$$

Έτσι

$$\|Mf\|_p^p = p\int_0^{+\infty} t^{p-1}m(\{Mf > t\})\, dt \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} f \int_0^{2f} t^{p-2}\, dt\, dm \cong \int_{\mathbb{R}^d} f f^{p-1}\, dm = \|f\|_p^p.$$

(4) (Η ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα.) Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ και $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ σ-πεπερασμένοι χώροι μέτρου και $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ μια $(\mathscr{A} \times \mathscr{B})$-μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε για κάθε $p \geq 1$

$$\left(\int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x)\right)^p d\nu(y)\right)^{1/p} \leq \int_X \left(\int_Y f^p(x,y)\, d\nu(y)\right)^{1/p} d\mu(x).$$

Η γνωστή Minkowski προκύπτει αν το μ είναι το αριθμητικό μέτρο στο $\mathbb{N}$, και έτσι το ένα από τα δύο διαδοχικά ολοκληρώματα γίνεται άθροισμα. Θέτουμε $h(y) = \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$. Αν η h δεν είναι σχεδόν παντού πεπερασμένη, υπάρχει $A \subset Y$ με θετικό και πεπερασμένο μέτρο στο οποίο η h απειρίζεται. Επομένως αν q είναι ο συζυγής εκθέτης τού p έχουμε

$$\begin{aligned}\left(\int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x)\right)^p d\nu(y)\right)^{1/p} &= +\infty = \int_A h(y)\, d\nu(y)\\ &= \int_X \int_A f(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) \leq (\nu(A))^{1/q} \int_X \left(\int_Y f^p(x,y)\, d\nu(y)\right)^{1/p} d\mu(x).\end{aligned}$$

Αν τώρα η h είναι σχεδόν παντού πεπερασμένη τότε $\{h > 0\} = \bigcup_n A_n$, όπου η A_n είναι μια αύξουσα ακολουθία συνόλων θετικού και πεπερασμένου μέτρου πάνω στα οποία η h είναι φραγμένη. Έτσι αν θέσουμε $g_n = h^{p-1}\chi_{A_n}/\|h\chi_{A_n}\|_p^{p-1}$ έχουμε $\|g_n\|_q = 1$ και

$$\begin{aligned}\left(\int_{A_n} h^p(y)\, d\nu(y)\right)^{1/p} &= \int_X \int_Y f(x,y)g_n(y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) \leq \|g_n\|_q \cdot \int_X \left(\int_Y f^p(x,y)\, d\nu(y)\right)^{1/p} d\mu(x)\\ &= \int_X \left(\int_Y f^p(x,y)\, d\nu(y)\right)^{1/p} d\mu(x).\end{aligned}$$

Στέλνοντας $n \to +\infty$ παίρνουμε το ζητούμενο.

(5) (Αλλαγή μεταβλητής στον $\mathbb{R}^d$.) Αν η $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ είναι γραμμική και αντιστρέψιμη (δηλαδή αντιστρέψιμος πίνακας) τότε

$$\int f = |\det T| \int f \circ T,$$

για κάθε Borel μετρήσιμη $f \geq 0$. Αρκεί να το δείξουμε για χαρακτηριστικές συναρτήσεις, δηλαδή

$$m_d(T(E)) = |\det T| m_d(E),$$

για κάθε σύνολο Borel E. Τέλος, μετά τη συνηθισμένη αναγωγή, αρκεί να το δείξουμε για το τυχόν ανοιχτό ορθογώνιο $R = (a_1, b_1)\times\cdots\times(a_d, b_d)$. Τώρα, κάθε αντιστρέψιμη γραμμική απεικόνιση είναι σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων των ακόλουθων τύπων.

(α′) $(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots, x_d) \mapsto (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_j, \ldots, x_d)$. Εναλλαγή συντεταγμένων, ορίζουσα -1.

(β′) $(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_d) \mapsto (x_1, \ldots, \lambda x_j, \ldots, x_d)$. Πολλαπλασιασμός συντεταγμένης με σταθερά, ορίζουσα λ.

(γ′) $(x_1,\dots,x_j,\dots,x_k,\dots,x_d)\mapsto(x_1,\dots,x_j,\dots,x_j+x_k,\dots,x_d)$. Πρόσθεση συντεταγμένης σε άλλη, ορίζουσα 1.

Αν T_1,T_2,T_3 είναι των παραπάνω τύπων, τότε

$$m_d(T_1(R))=\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_k}^{b_k}\cdots\int_{a_j}^{b_j}\cdots\int_{a_d}^{b_d}dm(x_1)\cdots dm(x_k)\cdots dm(x_j)\cdots dm(x_d)=m_d(R).$$

$$m_d(T_2(R))=\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{\lambda(a_j,b_j)}\cdots\int_{a_d}^{b_d}dm(x_1)\cdots dm(x_k)\cdots dm(x_j)\cdots dm(x_d)=|\lambda|m_d(R).$$

$$m_d(T_3(R))=\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_k}^{b_k}\cdots\int_{a_j+x_k}^{b_j+x_k}\cdots\int_{a_d}^{b_d}dm(x_1)\cdots dm(x_k)\cdots dm(x_j)\cdots dm(x_d)=m_d(R).$$

Επομένως για $j=1,2,3$ έχουμε $m_d(T_j(R))=|\det T_j|m_d(R)$ και το συμπέρασμα έπεται.

(6) Το προηγούμενο γενικεύεται ως εξής. Αν το $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ είναι ανοιχτό και $T:\Omega\to T(\Omega)$ μια C^1 αμφιδιαφόριση, τότε για κάθε μη αρνητική Borel μετρήσιμη έχουμε

$$\int_{T(\Omega)}f=\int_\Omega f\circ T(x)\,|\det D_xT|\,dx,$$

όπου D_xT το διαφορικό τής T στο x, δηλαδή ο πίνακας $(\partial_jT_i(x))_{ij}$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο συμβολισμό για $d\times d$ πίνακες A (νόρμα πίνακα).

$$\|A\|=\max_i\left(\sum_j|A_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

Αρχικά θα δείξουμε ότι για κάθε κύβο $Q\subset\Omega$

$$m(T(Q))\le\int_Q|\det D_xT|\,dx.$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε ότι $|T(x)-T(y)|\le\sup_{z\in Q}\|D_zT\|\cdot|x-y|$ για κάθε $x,y\in Q$. Επομένως

$$m(T(Q))\le\left(\sup_{z\in Q}\|D_zT\|\right)^d m(Q).$$

Έτσι ο τύπος γραμμικής αλλαγής μεταβλητής μας δίνει

$$m(T(Q))=m(D_wT\circ(D_wT)^{-1}\circ T(Q))=|\det D_wT|\left(\sup_{z\in Q}\|(D_wT)^{-1}D_zT\|\right)^d m(Q),$$

για κάθε w. Τώρα για κάθε n υπάρχει $\delta_n>0$ ώστε για κάθε $x,y\in Q$ με $\|x-y\|<\delta_n$ να έχουμε

$$\|(D_xT)^{-1}D_yT\|^d<1+1/n.$$

Χωρίζουμε στη συνέχεια τον Q σε ξένους ανά δυο κύβους Q_j^n με κέντρα x_j^n και πλευρές μήκους μικρότερου από $\min\{1/n,\delta_n\}$. Τότε

$$m(T(Q))=\sum_j m(T(Q_j^n))\le\frac{1+n}{n}\sum_j|\det D_{x_j^n}T|\,m(Q_j^n)=\frac{1+n}{n}\int_Q\sum_j|\det D_{x_j^n}T|\chi_{Q_j^n}\to\int_Q|\det D_xT|\,dx,$$

καθώς $n\to+\infty$ διότι το άθροισμα στο ολοκλήρωμα συγκλίνει κατά σημείο στην $|\det D_xT|$, λόγω συνέχειας. Τώρα κάθε ανοιχτό σύνολο $G\subset\Omega$ είναι ένωση ξένων ανά δύο κύβων, άρα

$$m(T(G))\le\int_G|\det D_xT|\,dx.$$

Όμως κάθε σύνολο Borel μπορεί να προσεγγιστεί από ανοιχτά υπερσύνολά του, επομένως η προηγούμενη σχέση ισχύει για κάθε σύνολο Borel $E\subset\Omega$ στη θέση τού G, συνεπώς

$$\int_{T(\Omega)}s\le\int_\Omega s\circ T(x)\,|\det D_xT|\,dx,$$

για κάθε θετική απλή συνάρτηση s στο $T(\Omega)$, άρα και για κάθε f μη αρνητική μετρήσιμη. Χρησιμοποιούμε τώρα την ανισότητα που μόλις δείξαμε με την $f\circ T(x)|\det T_x|$ στη θέση τής f και την T^{-1} στη θέση τής T και παίρνουμε το ζητούμενο.

(7) (Πολικές συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^d$.) Έστω $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$ η $(d-1)$-διάστατη σφαίρα στον $\mathbb{R}^d$. Οι πολικές συντεταγμένες ενός σημείου στον $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ δίνονται από την αμφισυνεχή αντιστοίχιση

$$\Phi : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to (0, +\infty) \times \mathbb{S}^{d-1}, \quad \Phi(x) = (|x|, x/|x|).$$

Ορίζουμε ένα μέτρο Borel ρ στο $(0, +\infty)$ με $\rho(E) = \int_E r^{d-1}\, dr$ και ένα μέτρο Borel σ στην $\mathbb{S}^{d-1}$ με

$$\sigma(E) = d \cdot m_d(\Phi^{-1}((0, 1] \times E)).$$

Τότε

$$(\rho \times \sigma)((a, b] \times E) = \frac{b^d - a^d}{d}\sigma(E) = m_d(a\Phi^{-1}((0, 1] \times E)) - m_d(b\Phi^{-1}((0, 1] \times E)) = m_d(\Phi^{-1}((a, b] \times E))$$

Δηλαδή το μέτρο γινόμενο $\rho\times\sigma$ συμφωνεί με το μέτρο $m_d(\Phi^{-1}(\cdot))$ πάνω σε όλα τα ορθογώνια $(a, b]\times E$. Αλλά η οικογένεια αυτή είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές και παράγει τα σύνολα Borel στο $(0, +\infty)\times\mathbb{S}^{d-1}$. Άρα $m_d(\Phi^{-1}(A)) = (\rho\times\sigma)(A)$ για κάθε σύνολο Borel A στο $(0, +\infty)\times\mathbb{S}^{d-1}$. Ισοδύναμα, για κάθε Borel $B \subset \mathbb{R}^d$ έχουμε

$$m_d(B) = (\rho \times \sigma)(\Phi(B)) = \int_0^{+\infty} r^{d-1} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \chi_{(\Phi(B))_r}(\xi)\, d\sigma(\xi)\, dr = \int_0^{+\infty} r^{d-1} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \chi_B(r\xi)\, d\sigma(\xi)\, dr.$$

Περνώντας σε θετικές απλές συναρτήσεις και στη συνέχεια παίρνοντας όρια συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^d} f = \int_0^{+\infty} r^{d-1} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(r\xi)\, d\sigma(\xi)\, dr,$$

για κάθε μη-αρνητική Borel μετρήσιμη f στον $\mathbb{R}^d$. Το σ ονομάζεται επιφανειακό μέτρο και ο προηγούμενος τύπος "ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες".

(8) (Συνελίξεις.) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ και $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Από την ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα έχουμε

$$\int \left(\int |f(y)g(x - y)|\, dy \right)^p dx \leq \|f\|_1^p \|g\|_p^p.$$

Επομένως $\int |f(y)g(x - y)|\, dy < +\infty$ για σχεδόν όλα τα x. Έτσι η συνάρτηση $x \mapsto \int f(y)g(x - y)\, dy$ είναι καλά ορισμένη για σχεδόν όλα τα x, ονομάζεται συνέλιξη των f και g, και συμβολίζεται με $f * g$. Με αλλαγή μεταβλητής βλέπουμε ότι $f * g = g * f$. Η ανισότητα $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p$ δείχνει ότι για σταθεροποιημένη f, η απεικόνιση $g \mapsto f * g$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής στον L^p. Αν τώρα $\tau_t h(x) = h(x - t)$ είναι η μετάθεση, τότε για $f \in L^p$ και $g \in L^q$ (p, q συζυγείς), έχουμε

$$|f * g(x - t) - f * g(x)| \leq \int |(f(x - y - t) - f(x - y))g(y)\, dy \leq \|\tau_t f - f\|_p \|g\|_q \to 0,$$

καθώς $t \to 0$. Δηλαδή η συνέλιξη είναι ομοιόμορφα συνεχής (η σύγκλιση δεν επηρεάζεται από το x). Έστω τώρα $\psi \in L^1$ μια C^∞ συνάρτηση με συμπαγή φορέα. Τότε για $f \in L^p$ και κάθε $k \leq d$, αν e_k είναι το μοναδιαίο διάνυσμα $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 1)$ με το 1 στην k-θέση, έχουμε

$$\frac{f * \psi(x + te_k) - f * \psi(x)}{t} - f * \partial_k\psi(x) = \int f(y) \left(\frac{\psi(x - y + te_k) - \psi(x - y)}{t} - \partial_k\psi(x - y) \right) dy.$$

Η ποσότητα στην παρένθεση μηδενίζεται για y έξω από κάποιο συμπαγές σύνολο (x σταθεροποιημένο, t μικρό), τείνει στο 0 καθώς $t \to 0$, και από το θεώρημα μέσης τιμής είναι φραγμένη. Επομένως από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, το ολοκλήρωμα τείνει στο 0 καθώς $t \to 0$ (αν $p > 1$ τότε πρώτα εφαρμόζουμε την ανισότητα Hölder και μετά το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης). Συμπεραίνουμε ότι η $f * \psi$ είναι C^∞ και

$$\partial_k(f * \psi) = f * \partial_k\psi.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $\psi > 0$, $\int \psi = 1$ και θέτουμε

$$\psi_t(x) = \frac{1}{t^d}\psi(x/t),\ t > 0.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|\tau_y f - f\|_p < \varepsilon$ για $|y| < \delta$. Έτσι από την ανισότητα Minkowski

$$\begin{aligned}\|f * \psi_t - f\|_p &\leq \int \left(\int \psi_t(y)^p |f(x - y) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} dy \\ &= \int_{|y|<\delta} \psi_t(y)\|\tau_y f - f\|_p\, dy + \int_{|y|\geq\delta} \psi_t(y)\|\tau_y f - f\|_p\, dy\end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon + 2\|f\|_p \int_{|y|\geq \delta/t} \psi(y)\, dy \to \varepsilon$$

καθώς $t \to 0$. Έτσι έχουμε ότι κάθε L^p συνάρτηση μπορεί να προσεγγιστεί από C^∞ συναρτήσεις με συμπαγή φορέα. Η οικογένεια $\{\psi_t\}_{t>0}$ ονομάζεται προσέγγιση τής μονάδας.

Θα δείξουμε τώρα ότι αν η f είναι φραγμένη τότε $f * \psi_t \to f$ σχεδόν παντού. Έστω x ένα σημείο Lebesgue τής f. Χωρίς βλάβη τής γενικότητας $f(x) = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $R > 0$ έτσι ώστε $\int_{|y|\geq R} \psi(y)\, dy < \varepsilon$. Τότε αν M είναι το φράγμα των f και ψ, έχουμε

$$|f * \psi_t(x)| \leq M \frac{R^d}{(tR)^d} \int_{|y|<tR} |f(x-y)|\, dy + M \int_{|y|\geq R} \psi(y)\, dy \to M\varepsilon,$$

καθώς $t \to 0$.