Πανεπιστημιο Κρητης, Τμ. Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Θεωρια Προσεγγισης και εφαρμογες, Ανοιξη 2013-14, Μιχ. Κολουντζακης

Δεύτερο Διαγώνισμα

Πρόβλημα 1. (2 μονάδες)
Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ να είναι η συνάρτηση $f(x)=|x|$. Υπολογίστε το μέτρο συνέχειας της f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2. (2 μονάδες)
Ορίζουμε

$$D_N(x)=\sum_{k=-N}^{N} e^{ikx},$$

για $x\in\mathbb{R}$, $N=1,2,3,\ldots$. Βρείτε ένα κλειστό τύπο για την $D_N(x)$ μέσω των x, N.

Πρόβλημα 3. (3 μονάδες)
Έστω $c_n\in\mathbb{C}$, $n=1,2,\ldots$, τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|<\infty$.

(1) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx}$$

ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (δείξτε δηλ. ότι η σειρά αυτή συγκλίνει για κάθε x).

(2) Αν $S_N(x)=\sum_{n=1}^{N} c_n e^{inx}$ δείξτε ότι $S_N\to f$ στην ∞ νόρμα (ομοιόμορφα δηλ. για $x\in[0,2\pi]$).

(3) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής για κάθε $x\in[0,2\pi]$.

Πρόβλημα 4. (2 μονάδες)
Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_{-1}^{1} T_m(x)T_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

για όλες τις τιμές των $m,n=0,1,2,\cdots$. Εδώ $T_n(x)$ είναι το πολυώνυμο Chebyshev βαθμού n.

Πρόβλημα 5. (3 μονάδες)
Έστω $x_0,x_1,\ldots,x_N$ διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί και

$$L_j(x)=\prod_{i\neq j}\frac{x-x_i}{x_j-x_i},\quad j=0,1,\ldots,N,$$

τα αντίστοιχα πολυώνυμα Lagrange. Δείξτε ότι

$$L_0(x)+L_1(x)+\cdots+L_N(x)=1,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Δείξτε επίσης ότι

$$x_0L_0(x)+x_1L_1(x)+\cdots+x_NL_N(x)=x,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Πώς μπορείτε να γράψετε το πολυώνυμο x^5 ως γραμμικό συνδυασμό των $L_j(x)$ (υποθέστε φυσικά ότι $N\geq 5$);

Όλες οι σημειώσεις πρέπει να είναι κλειστές. Οι αιτιολογήσεις σας να είναι πλήρεις και καθαρές. Διάρκεια 2 ώρες. Το άριστα είναι 10 μονάδες.