Πανεπιστημιο Κρητης, Τμ. Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Θεωρια Προσεγγισης και εφαρμογες, Ανοιξη 2013-14, Μιχ. Κολουντζακης

Ομάδα ασκήσεων Νο 2

Πρόβλημα 1. Ας είναι $\mathbb{C}^\infty$ ο χώρος όλων των μιγαδικών ακολουθιών $z = (z_1, z_2, \ldots)$ και ας είναι $\ell^p \subseteq \mathbb{C}^\infty$ το υποσύνολο των ακολουθιών

$$\ell^p = \left\{ z \in \mathbb{C}^\infty : \sum_{j=1}^\infty |z_j|^p < \infty \right\},$$

για $1 \le p < \infty$. Δείξτε ότι το σύνολο ℓ^p είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{C}^\infty$ και επίσης δείξτε ότι αν $1 \le p < q < \infty$ ισχύει $\ell^p \subseteq \ell^q$ με τον εγκλεισμό να είναι αυστηρός (δηλ. $\ell^p \ne \ell^q$).

Πρόβλημα 2. Ας είναι $f_n : (0,1) \to \mathbb{C}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $(0,1)$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $(0,1)$ δείξτε ότι και η συνάρτηση f είναι συνεχής παντού στο $(0,1)$.
Για κάθε $x, y \in (0,1)$ και $n \in \mathbb{N}$ ισχύει (τριγωνική ανισότητα)

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$

Επιλέξτε πρώτα το n και έπειτα τη μέγιστη απόσταση ανάμεσα στα x και y ώστε το αριστερό μέλος να είναι $\le \epsilon$.

Πρόβλημα 3. Αποδείξτε ότι για κάθε n υπάρχουν πολυώνυμα (δύο μεταβλητών) $p_n(x,y)$ και $q_n(x,y)$ τέτοια ώστε για κάθε θ

$$\cos(n\theta) = p_n(\cos\theta, \sin\theta) \quad \text{και} \quad \sin n\theta = q_n(\cos\theta, \sin\theta).$$

Επαγωγή ως προς n. $p_1(x,y) = x, q_1(x,y)) = y$. Επίσης $e^{i(n+1)\theta} = e^{i\theta}e^{in\theta}$.

Πρόβλημα 4. Στο μάθημα είδαμε την απόδειξη της ανισότητας Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y\rangle|^2 \le \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle, \quad \text{για } x, y \in \mathbb{C}^n,$$

αναγοντάς την πρώτα στην περίπτωση που θα διανύσματα x, y έχουν συντεταγμένες που είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Με αυτό τον τρόπο όμως δε μπορούμε να βγαλουμε συμπέρασμα για το πότε ισχύει η παραπάνω ανισότητα ως ισότητα. Δώστε λοιπόν μια παρόμοια απόδειξη αλλά χωρίς να εγκαταλείψετε τους μιγαδικούς αριθμούς και συμπεράνετε ότι η ανισότητα Cauchy-Schwarz ισχύει ως ισότητα ακριβως όταν τα δυο διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα (με μιγαδικούς συντελεστές).
Δουλέψτε όπως και στην περίπτωση των μη αρνητικών συντεταγμένων, παρατηρώντας δηλ. ότι για κάθε πραγματικό t ισχύει

$$0 \le \langle x + ty, x + ty\rangle$$

και παρατηρώντας κάνοντας πράξεις ότι η παράσταση στο δεξί μέλος είναι ένα πολυώνυμο ως προς t βαθμού το πολύ 2 με πραγματικούς συντελεστές. Κοιτώντας τη διακρίνουσα του πολυωνύμου αυτού συμπεράνετε ότι

$$(\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle)^2 \le \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Για να βγάλετε το τελικό σας συμπέρασμα εφαρμόστε την ανισότητα αυτή στο διάνυσμα $e^{i\theta}x$ για κατάλληλο $\theta \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 5. Αν $z \in \mathbb{C}^n$ δείξτε τις παρακάτω σχέσεις ανάμεσα σε διαφορετικές νόρμες:

$$\|z\|_1 \leq \sqrt{n}\|z\|_2, \tag{1}$$

$$\|z\|_2 \leq \|z\|_1, \tag{2}$$

$$\|z\|_1 \leq n\|z\|_\infty, \tag{3}$$

$$\|z\|_\infty \leq \|z\|_1, \tag{4}$$

$$\|z\|_\infty \leq \|z\|_2, \tag{5}$$

$$\|z\|_2 \leq \sqrt{n}\|z\|_\infty. \tag{6}$$

Πρόβλημα 6. Δύο συναρτήσεις $f, g \in C([a, b])$ ονομάζονται μεταξύ τους *ορθογώνιες* αν

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx = 0.$$

Δείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$1, \cos\left(2\pi n(b-a)^{-1}x\right), \sin\left(2\pi n(b-a)^{-1}x\right), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

είναι ανά δύο ορθογώνιες.

Το ίδιο και για τις συναρτήσεις

$$e^{\frac{2\pi i}{b-a}nx}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Αποδείξτε πρώτα το τελευταίο ερώτημα στο οποίο οι υπολογισμοί είναι πολύ ευκολότεροι. Έπειτα, χρησιμοποιώντας τη βασική σχέση

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

εκφράστε κάθε μια από τις συναρτήσεις στην (7) ως γραμμικό συνδυασμό κάποιων συναρτήσεων στην (8) και χρησιμοποιείστε την γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου για να αποδείξετε την ορθογωνιότητα των (7).