Ομάδα ασκήσεων Νο 9

Για μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ ο n-οστός συντελεστής Fourier της f ορίζεται από τον τύπο

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx, (n \in \mathbb{Z}).$$

Πρόβλημα 1. Αν $f, f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ δείξτε ότι για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}(k) = \widehat{f}(k)$.

Πρόβλημα 2. Αν f, g είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα δείξτε ότι

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)}.$$

(Το άθροισμα που εμφανίζεται δεξιά έχει πεπερασμένους το πλήθος όρους αφού τα f, g είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα.)

Υπολογίστε την απόσταση $\|f - g\|_2$ ανάμεσα σε δύο τριγωνομετρικά πολυώνυμα μέσω των συντελεστών Fourier των f, g.

Πρόβλημα 3. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και 2π-περιοδική. Ικανοποιεί επίσης τη διαφορική εξίσωση

$$Af'' + Bf' + Cf + D = 0,$$

όπου $A, B, C, D \in \mathbb{C}$ είναι σταθερές. Δείξτε ότι η ακολουθία των συντελεστών Fourier της f, $\left\{\widehat{f}(n)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ικανοποιεί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ την αλγεβρική εξίσωση

$$(-An^2 + iBn + C)\widehat{f}(n) + D\delta_n = 0,$$

όπου $\delta_n = 1$ αν $n = 0$ και 0 αν $n \neq 0$.

Πρόβλημα 4. Ας είναι $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, τέτοια ώστε $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty$. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και είναι μια συνεχής, 2π-περιοδική συνάρτηση. Δείξτε επίσης ότι $\widehat{f}(n) = c_n$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.