Λυσεισ Των Ασκησεων Στα Διακριτα Μαθηματικα I

Αραμπατζησ Γιωργοσ Α.Μ.303
Τμημα Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Ιανουάριος 2004

Άσκηση 1. Δείξτε ότι ο αριθμός $8|9^k - 1$ για $k \geq 1$
Απάντηση :Θα το δείξουμε επαγωγικά.
Για $k = 1$ έχουμε $8|9 - 1$ προφανώς ισχύει.
Εστω ότι ισχύει για k, θα δείξουμε ότι ισχύει για $k + 1$.Από την υπόθεση έχουμε ότι $9^k - 1 = 8\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$. Για $k + 1$ έχουμε $9^{k+1} - 1 = 9^k 9 - 1 = (8\ell + 1)9 - 1 = 8(9\ell + 1)$. Επομένως ο 9^{k+1} είναι πολλαπλάσιο του 8 και δείξαμε το ζητούμενο.

Άσκηση 2. Δείξτε επαγωγικά ότι για $n \geq 1$ ισχύει

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ...n)^2$$

Άπαντηση :Κατ΄ αρχας γνωρίζουμε ότι $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
Στην επαγωγή : για $n = 1$ προφανώς ισχύει. Έστω ότι ισχύει για n θα δείξουμε ότι ισχύει για $n + 1$. Οπότε

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n + 1)^3 = (1 + 2 + ... + n + (n + 1))^2$$

$$(1 + 2 + ... + n)^2 + (n + 1)^3 = \left(\frac{(n + 1)(n + 2)}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{n(n + 1)}{2}\right) + (n + 1)^3 = \left(\frac{(n + 1)(n + 2)}{2}\right)^2$$

Μετά από απλές πράξεις καταλήγουμε σε αληθή ισότητα. Δείξαμε λοιπόν ότι ισχύει γαι $n + 1$, άρα δείξαμε το ζητούμενο.

Άσκηση 3. Πόσες διαφορετικές τριάδες γραμμάτων μπορούν να εμφανιστούν σε ελληνικές πινακίδες αυτοκινήτων; (μόνο κοινά λατινικά και ελλήνικα γράμματα) Αν κάθε τέτοια ακολουθείται από έναν τετραψήφιο φυσικό αριθμό (με πρώτο ψηφίο διαφορετικό από το 0) πόσα το πολύ αυτοκίνητα μπορούν να ταξινομηθούν στην Ελλάδα·
Άπαντηση : Τα κοινά γράμματα είναι 14. Επομένως στις τρεις θέσεις μπορούν να μπουν απο 1 από τα 14 γράμματα. Άρα όλοι οι συνδιασμοί είναι $14 \cdot 14 \cdot 14 = 14^3$.
Στην άλλη περίπτωση έχουμε τους ίδιους συνδιασμούς για τα γράμματα και για τους αριθμούς έχουμε 9 επιλογές για την πρώτη θέση και από 10 επιλογές για τις άλλες τρεις θέσεις. Συνολικά έχουμε $14^3 \cdot 9 \cdot 10^3$ επιλογές.

Άσκηση 4. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δυο υποσύνολα A και B του $[n]$ ώστε $A \subseteq B$;
Απαντηση : Για κάθε αριθμο έχουμε τρεις επιλογές, να ανήκει στο A (άρα και στο B), να ανήκει μόνο στο B, να μην ανήκει σε κανένα από τα δύο. Συνολικά όλοι οι αριθμοί είναι n επομένως οι δυνατές επιλογές είναι $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot ... \cdot 3 = 3^n$

Άσκηση 5. Αν $r, s, k \in \mathbb{N}$ με $r \geq s$ δείξτε ότι $s!$ είναι διαιρέτης του $(k+1)(k+2)...(k+r)$.
Απαντηση : Αφού $r \geq s$, ισχύει ότι $r + k \geq s$ και

$$(r+k)! \geq s! \tag{1}$$

Επομένως,

$$(k+1)(k+2)...(k+r) = \frac{(k+r)!}{k!} \tag{2}$$

Θέλουμε δηλαδή να δείξουμε ότι $s!|\frac{(k+r)!}{k!}$. Από τις σχέσεις (1) και (2) βλέπουμε εύκολα ότι,

$$\frac{(k+r)!}{k!} = \frac{(k+r)(k+r-1)...(s+1)s!}{k!}$$

Από τη σχέση αυτή το ζητούμενο είναι προφανές.

Άσκηση 6. Πόσους διαιρέτες έχει ο αριθμός 2^m; Ο αριθμός $2^m 3^n$;
Απαντηση : Θα δείξουμε επαγωγικα ότι ο αριθμός 2^m έχει $m+1$ διαιρέτες. Ο αριθμός 2 έχει δυο διαιρέτες. Εστω ότι ο 2^m έχει $m+1$. Ο αριθμός $2^{m+1} = 2 \cdot 2^m$ έχει τόσους διαιρέτες όσους ο 2^m συν έναν (τον εαυτό του) δηλαδή $m+2$. Επομένως δείξαμε το ζητούμενο.
Ο αριθμος 2^m έχει $m+1$ και ο 3^n έχει $n+1$ διαιρέτες. Επομένως το γινομενο τους έχει $(m+1)(n+1)$ διαιρέτες.

Άσκηση 7. Έχουμε 10 αριθμημένες μπάλες και τρια κουτιά με χωρητικότητες 5, 3 και 2 αντίστοιχα. Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε τις μπάλες στα κουτιά; (χωρις εσωτερική σειρά μέσα στα κουτιά)
Απαντηση : Για το πρώτο κουτί επιλέγω 5 από τις 10 μπάλες χωρίς σειρά με $\binom{10}{5}$ τρόπους. Όμοια για το δεύτερο με $\binom{5}{3}$ τρόπους. Και για το τελευταίο με $\binom{2}{2}$ τρόπους. Τελικώς όλοι οι δυνατοι συνδιασμοί είναι

$$\binom{10}{5}\binom{5}{3}\binom{2}{2}$$

Άσκηση 8. Μια ομάδα 20 ατόμων θέλει να φτιάξει τρεις, ξένες μεταξύ τους, επιτροπές με 6, 5 και 4 άτομα η κάθε μια. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίναι αυτό; (εσωτερική σειρά δεν υπάρχει)
Απαντηση :Όμοια με την προηγούμενη.

$$\binom{20}{6}\binom{14}{5}\binom{11}{4}$$

Άσκηση 9. Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$
Απαντηση :Γνωρίζουμε ότι $(a+b)^n = \sum \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Για $a = x, b = 1$ έχουμε

$$(1+x)^n = \sum \binom{n}{k} x^k \tag{1}$$

Παραγωγίζουμε την παραπάνω σχέση μια φορα και το αποτέλεσμα που παίρνουμε για $x = 1$ είναι

$$\sum k\binom{n}{k} = n2^{n-1} \tag{2}$$

Παραγωγίζουμε δυο φορές την σχέση (1), αντικαθιστούμε $x = 1$ και όπου χρειαστεί αντικαθιστούμε την σχέση (2).

Άσκηση 10. Πόσα διαφορετικά γραφήματα υπάρχουν με n κορυφές; Πόσα με n κορυφές και k ακμές;
Απαντηση :Ένας τρόπος για να σκεφτούμε σ' αυτην την άσκηση είναι ο εξής : απο το σύνολο V, το σύνολο των κορυφων, κατασκευάζω το σύνολο των ακμών. Είναι έυκολο να δούμε ότι το μέγεθος αυτού του συνόλου είναι $\binom{n}{2}$.(κατασκευάζουμε όλες τις δυνατές δυάδες χωρις να μας ενδιαφέρει η σειρά) Όλα τα δυνατά υποσύνολα του συνόλου των ακμών είναι $2^{\binom{n}{k}}$ και αποτελούν το πλήθος όλων των δυνατών γραφημάτων.
Για το δεύτερο σκέλος, αρκεί από το σύνολο των ακμών να πάρω όλες τις δυνατες κ-άδες, χωρίς να με ενδιαφέρει η σειρά. Δηλαδή, $\binom{\binom{n}{2}}{k}$

Άσκηση 11. Γίνεται σε ένα γράφημα όλες οι κορυφές να έχουν διαφορετικό βαθμό;
Απαντηση : Όχι. Αν γινόταν αυτό, τότε σε ένα γράφημα με n κορυφες, κάθε κορυφη θα είχε διαφορετικό βαθμό. Έτσι θα έπρεπε μια κορυφή να είχε βαθμό 0. Άτοπο, διότι το γράφημα τότε δεν θα ήταν συνεκτικό.

Άσκηση 12. Δείξτε ότι σε οποιοδήποτε γράφημα, το πλήθος κορυφών με περιττό βαθμό είναι άρτιο.
Απαντηση : Γνωρίζουμε ότι $2|E| = \sum deg(v_i)$, $v_i \in V$. Χωρίζουμε τις κορυφές σε αυτές με άρτιο βαθμό, u_i, και σε αυτές με περιττό βαθμό, v_i. Ισχύει,

$$2|E| = \sum degu_i + \sum degvi$$

Επομένως,

$$\sum degv_i = 2|E| + \sum degu_i$$

Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι το δεύτερο μέλος είναι άρτιος αριθμός, άρα και το πρώτο θα είναι άρτιος.

Άσκηση 13.Πόσα επαγώμενα υπογραφήματα έχει ένα γράφημα με n κορυφές;
Απαντηση : Επαγώμενο είναι το γράφημα το οποίο προέρχεται από κάποιο άλλο γραφημα μόνο με διαγραφή κάποιων κορυφών του. Οι ακμές δεν εμπλέκονται καθόλου. Επομένως το πλήθος των επαγόμενων υπογραφημάτων ένος γραφήματος με n κορυφές, είναι το πλήθος των υποσυνόλων του συνόλου των κορυφών, δηλαδή 2^n

Άσκηση 14. Βρείτε όλα τα μη ισόμορφα γραφήματα με τέσσερεις κορυφές.
Απαντηση : Ο αριθμός τους είναι 11. Βρίσκονται εύκολα, με δοκιμές, μόνο που θέλει λίγο προσοχή ώστε να μην πάρουμε δυο φορές το ίδιο γράφημα.

Άσκηση 15. Δείξτε ότι ένα συνεκτικό γράφημα με n κορυφές και λιγότερες από n ακμές, έχει αναγκαστικά μια κορυφή βαθμού ένα.
Απαντηση : Θα το δείξουμε με άτοπο. Έστω ότι έχει σε όλες τις κορυφες βαθμό περισσότερο από ένα. Τότε

από γνωστό τύπο έχουμε, $2|E| = \sum deg(v_i) \Rightarrow |E| = n$. Άτοπο, άφου το πλήθος των ακμών θα έπρεπε να είναι μικρότερο από το πλήθος των κορυφών και όχι ίσο.

Άσκηση 16. Δείξτε ότι η διάμετρος ενός συνεκτικού γραφήματος με n κορυφές είναι το πολύ $n-1$. Περιγράψτε με πλήρη απόδειξη όλα τα γραφήματα με n κορυφές και διάμετρο $n-1$. Επίσης όλα τα γραφήματα με διάμετρο 1.

Άπαντηση :

Άσκηση 17. Αν σε ένα γράφημα υπάρχουν ακριβώς δυο κορυφές με περιττό βαθμό, τότε αυτές συνδέονται με ένα μονοπάτι.

Άπαντηση : Έστω ότι οι δυο αυτές κορυφές δεν συνδέονται με κανένα μονοπάτι. Τότε στο γράφημα θα υπάρχουν δυο συνιστώσες οι οποίες δεν ενώνονται μεταξύ τους. Τότε κάθε υπογράφημα θα έχει ακριβώς μια κορυφή περιττού βαθμού. *Άτοπο*, γιατι σύμφωνα με την παραπάνω άσκηση, δεν γίνεται το πλήθος των κορυφών με περιττό βαθμό σε ένα γράφημα να είναι περιττό.

Άσκηση 18. Αποδείξτε ότι ένα δάσος με n κορυφές και m συνεκτικες συνιστώσες, έχει ακριβώς $n-m$ ακμές.

Άπαντηση : Έστω T_i οι συνεκτικές συνιστώσες του δάσους $(i = 1, ..., m)$ και n_i το πλήθος των κορυφών του αντίστοιχα. Το πλήθος των ακμών του κάθε δέντρου είναι $n_i - 1$. Ισχύει επίσης ότι, $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$. Οπότε,

$$\sum_{i=1}^{m} n_i - 1 = \sum_{i=1}^{m} n_i - m = n - m$$

και δείξαμε το ζητούμενο.

Άσκηση 19. Δείξτε ότι αν προσθέσουμε μια ακμή σε ένα δέντρο τότε δημιουργούμε ακριβώς ένα κύκλο.

Άπαντηση :

Άσκηση 20. Ένα γράφημα λέγεται απλά συνεκτικό αν παραμένει συνεκτικό ακόμη και αν διαγράψουμε μια οποιαδήποτε ακμή του. Πόσες το λιγότερο ακμές πρέπει να έχει ένα τέτοιο γράφημα με n κορυφές; Βρείτε ένα γράφημα που να πιάνει τον ελάχιστο αριθμό ακμών.

Άπαντηση : Για να 'άντέξει" την τυχαία διαγραφή η κάθε κορυφή, θα πρέπει να έχει $deg(v_i) \geq 2$. Άρα,

$$2|E| = \sum_{i=1}^{n} deg(v_i) \Rightarrow |E| = n$$

Επομένως, ένα γράφημα θα πρέπει να έχει το λιγότερο τόσες ακμές όσες και οι κορυφές του.
Το ελάχιστο γράφημα που πιάνει τον ελάχιστο αριθμό ακμών είναι το πλήρες γράφημα με τρεις κορυφές.