Ασκήσεις για τα Διακριτά Μαθηματικά Ι

2 Δεκεμβρίου 2003

Λύστε και παραδώστε τις παρακάτω ασκήσεις στο μάθημα της Τρίτης 16 Δεκ. 2003. Θα σας παραδωθούν διορθωμένες μετά τα Χριστούγεννα. Οι ασκήσεις αυτές δε θα έχουν επίπτωση στο βαθμό σας αλλά σκοπό έχουν να σας βοηθήσουν στο να γράψετε καλά στο τέλος. Γι' αυτό και η παράδοσή τους είναι τελείως προαιρετική και έντονα συνιστώμενη ταυτόχρονα. Είναι όλες μέσα από τις σημειώσεις και πολλές έχουν γίνει στο μάθημα. Η έμφαση θα είναι στο να λυθούν και *να γραφούν* σωστά. –Μιχάλης Κολουντζάκης

Άσκηση 1. Δείξτε ότι ο αριθμός 8 διαιρεί το $9^k - 1$ για $k \ge 1$.

Άσκηση 2. Δείξτε επαγωγικά ότι για $n \ge 1$ ισχύει

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2. \tag{1}$$

Άσκηση 3. Πόσες διαφορετικές τριάδες γραμμάτων μπορούν να εμφανιστούν σε ελληνικές πινακίδες αυτοκινήτων; (Σε αυτές χρησιμοποιούνται μόνο γράμματα που ανήκουν και στο ελληνικό και στο λατινικό αλφάβητο.) Αν κάθε τέτοια τριάδα ακολουθείται από ένα τετραψήφιο φυσικό αριθμό (με πρώτο ψηφίο διαφορετικό από το 0) πόσα το πολύ αυτοκίνητα μπορούν να ταξινομηθούν στην Ελλάδα;

Άσκηση 4. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο υποσύνολα A και B του $[n]$ ώστε $A \subseteq B$;

Άσκηση 5. Αν r, s, k είναι φυσικοί αριθμοί με $r \ge s$ δείξτε ότι ο αριθμός $s!$ είναι διαιρέτης του

$$(k+1)(k+2)\cdots(k+r).$$

Άσκηση 6. Πόσους διαιρέτες έχει ο αριθμός 2^m; Ο αριθμός $2^m 3^n$;

Άσκηση 7. Έχουμε 10 αριθμημένες μπάλες και τρία κουτιά με χωρητικότητες 5, 3 και 2 μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε τις μπάλες στα κουτιά; (Δεν υπάρχει εσωτερική σειρά στα κουτιά.)

Άσκηση 8. Μια ομάδα 20 ατόμων θέλει να φτιάξει τρεις, ξένες μεταξύ τους, επιτροπές με 6, 5 και 4 άτομα η κάθε μία. (Μέσα σε κάθε επιτροπή δεν υπάρχουν χωριστά αξιώματα–τα μέλη τους είναι ισοδύναμα.) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Άσκηση 9. Υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}.$$

Άσκηση 10. Πόσα διαφορετικά γραφήματα υπάρχουν με n κορυφές; Πόσα με n κορυφές και k ακμές; $(0 \le k \le n)$

Άσκηση 11. Γίνεται σε ένα γράφημα όλες οι κορυφές να έχουν διαφορετικό βαθμό;

Άσκηση 12. Δείξτε ότι σε οποιοδήποτε γράφημα το πλήθος κορυφών με περιττό βαθμό είναι άρτιο.

Άσκηση 13. Πόσα επαγόμενα υπογραφήματα έχει ένα γράφημα με n κορυφές;

Άσκηση 14. Βρείτε όλα τα μη-ισόμορφα γραφήματα με τέσσερεις κορυφές.

Άσκηση 15. Δείξτε ότι ένα συνεκτικό γράφημα με n κορυφές και λιγότερες από n ακμές έχει αναγκαστικά μια κορυφή βαθμού 1.

Άσκηση 16. Δείξτε ότι η διάμετρος ενός συνεκτικού γραφήματος με n κορυφές είναι το πολύ $n-1$. Περιγράψτε, με πλήρη απόδειξη, όλα τα γραφήματα με n κορυφές και διάμετρο $n-1$. Επίσης όλα τα γραφήματα με διάμετρο $n-2$ και όλα τα γραφήματα με διάμετρο 1.

Άσκηση 17. Αν σε ένα γράφημα υπάρχουν ακριβώς δύο κορυφές με περιττό βαθμό, αυτές πρέπει αναγκαστικά να συνδέονται με κάποιο μονοπάτι. (Δείτε την Άσκηση 12.)

Άσκηση 18. Αποδείξτε ότι ένα δάσος με n κορυφές και m συνεκτικές συνιστώσες (m δέντρα δηλαδή) έχει ακριβώς $n-m$ ακμές.

Άσκηση 19. Δείξτε ότι αν προσθέσουμε μια ακμή σε ένα δέντρο τότε δημιουργούμε ακριβώς ένα κύκλο.

Άσκηση 20. Ένα γράφημα λέγεται *διπλά συνεκτικό* αν παραμένει συνεκτικό ακόμη κι αν σβήσουμε μια οποιαδήποτε ακμή του. Πόσες, το λιγότερο, ακμές πρέπει να έχει ένα τέτοιο γράφημα με n κορυφές; Βρείτε ένα γράφημα που να 'πιάνει' τον ελάχιστο αυτό αριθμό ακμών.