Διάρκεια διαγωνίσματος 1 ώρα.

Λύσεις ενός διαγωνίσματος πολλαπλών επιλογών

Πρόβλημα 1. Σε ένα απλό γράφημα με 100 κορυφές
A: Είναι δυνατόν όλες οι κορυφές να έχουν διαφορετικό βαθμό. B: Δε μπορούν όλοι οι βαθμοί κορυφών να είναι περιττοί. C: Ο μέγιστος βαθμός κορυφής είναι ≤ 99. D: Ο ελάχιστος βαθμός κορυφής είναι ≥ 1.
Απάντηση: Η μόνη σωστή απάντηση είναι η C. Π.χ. η A είναι λάθος: οι δυνατοί βαθμοί είναι οι αριθμοί 0-99 και αν κάθε κορυφή έχει διαφορετικό βαθμό τότε σίγουρα κάποια κορυφή u έχει βαθμό 0 και σίγουρα κάποια κορυφή v έχει βαθμό 99, άρα η v συνδέεται και με τη u που όμως δε μπορεί να συνδέεται με καμιά, αφού έχει βαθμό 0.

Πρόβλημα 2. Το άθροισμα $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+3^k)$ ισούται με
A: 4^n B: 3^n C: $1+3^n$ D: $(1+2^n)2^n$
Απάντηση: Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό θεώρημα έχουμε

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+3^k) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k = (1+1)^n + (1+3)^n = 2^n + 4^n$$

άρα η σωστή απάντηση είναι η D.

Πρόβλημα 3. Σ'ένα γράφημα G υπάρχει μια κορυφή u τέτοια ώστε για κάθε κορυφή v να ισχύει $d(u,v)\le 10$. Επίσης υπάρχουν δύο κορυφές x,y ώστε $d(u,x)=d(u,y)=10$. Τότε, η διάμετρος του G είναι
A: ίση με 20 B: το πολύ 20, αλλά μπορεί και λιγότερο C: ίση με 19 D: ίση με 10
Απάντηση: Η μόνη σωστή απάντηση είναι η B, αφού μπορούμε να πάμε από κάθε κορυφή σε κάθε άλλη πηγαίνοντας πρώτα στη u, πράγμα που μας κοστίζει ≤ 20 βήματα. Σε κάποιες περιπτώσεις η διάμετρος μπορεί να είναι <20, όπως για παράδειγμα σε ένα γράφημα κύκλο με 21 κορυφές. Σε αυτό το γράφημα το ρόλο της κορυφής u μπορεί να τον παίξει κάθε κορυφή και έχει διάμετρο 10.

Πρόβλημα 4. Πόσα διαφορετικά γραφήματα υπάρχουν με σύνολο κορυφών το $V=\{1,2,3,4\}$;
A: 16 B: $\binom{4}{2}$ C: 12 D: 64
Απάντηση: Αφού οι κορυφές έχουν καθοριστεί μένει να καθοριστούν και οι ακμές. Για κάθε ζεύγος κορυφών (υπάρχουν $\binom{4}{2}=6$ τέτοια) η ακμή ανάμεσά τους μπορεί να υπάρχει ή όχι (2 επιλογές). Άρα υπάρχουν $2^6=64$ διαφορετικά γραφήματα (απάντηση D).

Πρόβλημα 5. Ένα απλό γράφημα έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες, με 10 κορυφές η κάθε μία. Ο μέγιστος αριθμός ακμών του γραφήματος είναι
A: 20 B: 45 C: 2^{11} D: 90
Απάντηση: Πετυχαίνουμε τις περισσότερες κορυφές όταν όλες οι συνιστώσες είναι πλήρεις, έχουν δηλαδή $\binom{10}{2}=45$ ακμές η καθεμία. Άρα η απάντηση είναι η D.

Πρόβλημα 6. Αν G είναι ένα απλό γράφημα τότε
A: Έχει το πολύ δύο κορυφές με περιττό βαθμό. B: Το πλήθος των κορυφών του με άρτιο βαθμό είναι άρτιο. C: Έχει τουλάχιστον δύο κορυφές με περιττό βαθμό. D: Το πλήθος κορυφών του με περιττό βαθμό δεν είναι περιττό.
Απάντηση: Η μόνη σωστή απάντηση είναι η D, αφού το άθροισμα όλων των βαθμών είναι 2 φορές το πλήθος των ακμών, άρα άρτιος, οπότε το άθροισμα των περιττών βαθμών είναι κι αυτό άρτιος αριθμός, άρα και το πλήθος τους.

Πρόβλημα 7. Πόσα διαφορετικά γραφήματα υπάρχουν με σύνολο κορυφών το $V=\{1,2,\ldots,10\}$ τα οποία να έχουν μια συνεκτική συνιστώσα μεγέθους 5 ισόμορφη με το K_5, μια μεγέθους 3 ισόμορφη με το K_3, και

άλλες 2 συνεκτικές συνιστώσες;
A: $10\binom{10}{5}$ B: $10^5 5^3$ C: $\binom{10}{3}\binom{7}{5}15$ D: $\binom{10}{5}\binom{5}{3}2^8$
Απάντηση: Οι άλλες δύο συνιστώσες είναι αναγκαστικά σημεία (μια κορυφή η κάθε μία δηλ.) άρα αρκεί να επιλέξουμε το ποιες 5 κορυφές από τις 10 θα φτιάξουν το K_5 και ποιες 3 από τις υπόλοιπες 5 θα φτιάξουν το K_3. Η σωστή απάντηση είναι λοιπόν η A, αφού ισούται με $\binom{10}{5}\binom{5}{3}$.