Τελικό διαγώνισμα, 2 Φεβρουαρίου 2011

Πρόβλημα 1. Σ' ένα διμερές γράφημα με σύνολα κορυφών A και B ισχύει

$$|N(J)| \geq |J| - 3,$$

για κάθε $J \subseteq A$, όπου $N(J)$ είναι το σύνολο όλων των κορυφών που συνδέονται με κάποια από τις κορυφές του J. Δείξτε ότι υπάρχει ταίριασμα που να περιέχει τουλάχιστον $|A| - 3$ κορυφές του A.

Λύση: Προσθέτουμε 3 νέες κορυφές στο B τις οποίες συνδέεουμε με ακμή με κάθε κορυφή του A. Για το νέο μας διμερές γράφημα εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει η συνθήκη του Hall $|N(J)| \geq |J|$ για κάθε $J \subseteq A$. Από το θεώρημα του Γάμου υπάρχει πλήρες ταίριασμα για την πλευρά A. Σε αυτό το ταίριασμα κάποιες κορυφές του A, το πολύ 3, έχουν ταιριαστεί με κάποιες από τις νέες κορυφές του B. Αν αφαιρέσουμε τις ακμές αυτές (που δεν υπάρχουν στο αρχικό μας γράφημα) από το ταίριασμα προκύπτει ένα ταίριασμα του αρχικού μας γραφήματος στο οποίο υπάρχουν το πολύ 3 αταίριαστες κορυφές του A.

Πρόβλημα 2. Δείξτε ότι αν σε ένα απλό γράφημα υπάρχουν ακριβώς δύο κορυφές με περιττό βαθμό τότε αυτές αναγκαστικά συνδέονται με κάποιο μονοπάτι.

Λύση: Αν οι δύο κορυφές ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του γραφήματός μας τότε στη συνιστώσα μιας από αυτές τις κορυφές υπάρχει μόνο μια κορυφή με περιττό βαθμό, το οποίο δε γίνεται μια και έχουμε αποδείξει ότι σε κάθε γράφημα το πλήθος των κορυφών με περιττό βαθμό είναι άρτιο (αυτό προκύπτει από την ισότητα $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$). Άρα οι δύο κορυφές μας ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα, συνδέονται δηλ. με κάποιο μονοπάτι.

Πρόβλημα 3. Δείξτε ότι αν προσθέσουμε μια ακμή σε ένα δέντρο τότε δημιουργούμε ακριβώς ένα κύκλο.

Λύση: Ας είναι n το πλήθος των κορυφών του δέντρου μας. Το δέντρο έχει $n - 1$ ακμές. Μετά την προθήκη μιας ακμής έχει n ακμές άρα παύει να είναι δέντρο, αποκτά δηλ. τουλάχιστον ένα κύκλο. Δεν είναι δυνατό να υπάρχουν δύο κύκλοι στο γράφημα που δημιουργείται. Αν υπάρχουν τότε επιλέγουμε μια ακμή που ανήκει στον ένα κύκλο και όχι στον άλλο (σίγουρα υπάρχει αλλιώς οι δύο κύκλοι θα ήταν ίδιοι) και την αφαιρούμε. Έτσι καταστρέφουμε τον ένα κύκλο αλλά όχι τον άλλο. Επίσης δε χαλάει η συνεκτικότητα του γραφήματος με το σπάσιμο ενός κύκλου. Προκύπτει έτσι ένα συνεκτικό γράφημα με n κορυφές και $n - 1$ ακμές, ένα δέντρο δηλ. Αυτό όμως είναι ασυμβίβαστο με το ότι έχει απομείνει ένας κύκλος στο γράφημά μας. Άρα δεν υπάρχει δεύτερος κύκλος στο γράφημά μας.

Διάρκεια διαγωνίσματος 50 λεπτά. Κλειστές όλες οι σημειώσεις. Οι αποδείξεις σας να είναι **πλήρεις** και να φαίνεται καθαρά τι υποθέτετε ως γνωστό. Έχει μεγάλη σημασία και το πώς γράφετε.