

ΔΕΥΤΕΡΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

Τρίτη, 5/12/2006

1. Αν $X_j, j = 1, \dots, n$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με $\mathbf{E}[X_1] = 0$, να υπολογίσετε τη $\mathbf{E}[S_n^4]$ μέσω των ροπών της X_1 .
2. Αν $X_j, j = 1, 2, \dots$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με $\mathbf{E}[X_1] = m, \sigma^2(X_1) < \infty$, τότε $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \rightarrow m$, κατά πιθανότητα.
3. Αν $p_n \in (0, 1)$ και $X_n, n = 1, 2, \dots$, ανεξάρτητες με $\mathbf{Pr}[X_n = 1] = p_n, \mathbf{Pr}[X_n = -1] = 1 - p_n$. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - (2p_k - 1)) \rightarrow 0$, κατά πιθανότητα.
4. Αν $\|X_n\|_\infty \leq K < \infty$ δείξτε ότι $X_n \rightarrow X$ κατά πιθανότητα αν και μόνο αν $\mathbf{E}[|X_n - X|] \rightarrow 0$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες. Όλες οι σημειώσεις και βιβλία πρέπει να είναι κλειστά. Όλες οι απαντήσεις σας θα πρέπει να είναι επαρκώς τεκμηριωμένες.

Καλή επιτυχία. – Μιχάλης Κολουτζάκης