Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Μεταπτυχιακό Μάθημα «Πραγματική Ανάλυση»

Χειμερινό Εξάμηνο 2016-17 – Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

**Τελικό Διαγώνισμα** – 31-1-2017

**1.** Σε ένα χώρο μέτρου έχουμε μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση της οποίας το ολοκλήρωμα είναι 0. Δείξτε ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο η συνάρτηση είναι σχεδόν παντού 0.

**2.** Δείξτε ότι αν $0 < a_n < b_n \to 0$ τότε $\displaystyle\int_{(a_n,b_n)} \frac{dx}{x^{1/2}} \to 0$. Δείξτε επίσης ότι αυτό δε συμβαίνει αν στη θέση της συνάρτησης $\frac{1}{x^{1/2}}$ μπει η συνάρτηση $\frac{1}{x}$ και τα $a_n, b_n$ επιλεγούν κατάλληλα με τον περιορισμό $0 < a_n < b_n \to 0$.

**3.** Αποδείξτε ότι το άθροισμα των τετραγώνων όλων των πλευρών ενός παραλληλογράμμου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του.

**4.** Κατασκευάστε μια ακολουθία $a_n \ge 0$ τέτοια ώστε οι μέσοι όροι της

$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

να τείνουν στο 0 αλλά $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

**5.** Σωστό ή λάθος; Απαντήστε και εξηγήστε πλήρως την απάντησή σας.

(1) Αν $(X, \Sigma, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $A \in \Sigma$ ένα αριθμήσιμο σύνολο τότε $\mu(A) = 0$.
(2) Αν $f_n \in L^1(0,1)$, $\forall n$ η $f_n$ είναι φραγμένη, και $\forall x \in (0,1) : f_n(x) \to 0$ τότε $\int_{(0,1)} f_n \to 0$.
(3) Υπάρχουν συναρτήσεις $f, f_n \in L^1(0,1)$ τέτοιες ώστε $\|f_n - f\|_1 \to 0$ αλλά δεν ισχύει $f_n(x) \to f(x)$ για κανένα $x \in (0,1)$.

**6.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue μετρήσιμη με $\int e^{f^2} < \infty$. Δείξτε ότι για κάθε $M > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{Mn} m\{f > n\} < \infty.$$

**7.** Ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης $f \in L^1(\mathbb{R})$ ορίζεται ως η συνάρτηση $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x}\, dx, \quad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη παντού και μηδενίζεται εκτός ενός φραγμένου διαστήματος $(-R, R)$ δείξτε ότι $\widehat{f'}(\xi) = 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi)$.

**8.** Τα $\mu, \nu$ είναι θετικά μέτρα στη σ-άλγεβρα $\Sigma$ υποσυνόλων του $X$, και $\mu(X), \nu(X) < \infty$. Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη $f : X \to [0, +\infty)$ τ.ώ. για κάθε $E \in \Sigma$ να έχουμε

$$\int_E (1 - f)\, d\mu = \int_E f\, d\nu.$$

**9.** Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο και μετρήσιμο με $m(E) = 1$. Έστω επίσης $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ ένα αριθμήσιμο σύνολο τέτοιο ώστε οι συναρτήσεις $e_\lambda(x) = e^{2\pi i \lambda x}$, $\lambda \in \Lambda$, να είναι ανά δύο ορθογώνιες στο χώρο $L^2(E)$. Δείξτε τότε ότι

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \left| \widehat{\mathbf{1}_E}(x - \lambda) \right|^2 \le 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$