Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Μεταπτυχιακό Μάθημα «Πραγματική Ανάλυση»

Χειμερινό Εξάμηνο 2016-17 —- Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

Φυλλάδιο Ασκήσεων 2 – 29-9-2016. Παραδοτέο 6-10-2016 στο μάθημα

Πρόβλημα 1. Κάθε μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

Πρόβλημα 2. Έστω $A_1, A_2, \ldots$ στοιχεία μιας σ-άλγεβρας σε ένα χώρο X και ας είναι B το σύνολο εκείνων των $x \in X$ που ανήκουν σε άπειρα από τα A_j και C το σύνολο εκείνων των $x \in X$ που ανήκουν *τελικά* σε όλα τα A_j. Δείξτε ότι τα B και C ανήκουν κι αυτά στη σ-άλγεβρα. *Υπόδειξη:* Εκφράστε τα B, C μέσω ενώσεων και τομών των A_j.

Πρόβλημα 3. Σε ένα χώρο μέτρου έχουμε μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση της οποίας το ολοκλήρωμα είναι 0. Δείξτε ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο η συνάρτηση είναι σχεδόν παντού 0. *Υπόδειξη:* Εξετάστε τα σύνολα $E_n = \left\{f > \frac{1}{n}\right\}$, όπου f η συνάρτηση.

Δείξτε επίσης ότι αν η f έχει πεπερασμένο ολοκλήρωμα τότε είναι σχεδόν παντού πεπερασμένη (το αντίστροφο φυσικά δεν ισχύει).

Πρόβλημα 4. Στο $\mathbb{N}$ με το counting measure μ βρείτε μια ακολουθία συναρτήσεων $f_n : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ η οποία να συγκλίνει κατά σημείο στο 0 παντού και τέτοια ώστε $\int f_n \, d\mu \to 1$. Ομοίως τέτοια ώστε $\int f_n \, d\mu \to +\infty$.

Πρόβλημα 5. Έστω χώρος X εφοδιασμένος με ένα θετικό μέτρο μ. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο μετρήσιμο σύνολο E τότε $\int_E |f - f_n| \to 0$ αν $\mu(E)$ πεπερασμένο, ενώ αυτό δεν είναι αναγκαστικά σωστό αν $\mu(E) = \infty$ (δώστε παράδειγμα για το τελευταίο).

Πρόβλημα 6. Έστω χώρος X εφοδιασμένος με ένα θετικό μέτρο μ και f μια μη αρνητική, μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $\int f < \infty$.

(α) Δείξτε ότι $\int_{\{f>n\}} f \to 0$ όταν $n \to \infty$.

(β) Δείξτε επίσης ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\mu(E) < \delta \implies \int_E f < \epsilon$.

Πρόβλημα 7. Έστω χώρος X εφοδιασμένος με ένα θετικό μέτρο μ τέτοιο ώστε $\mu(X) < \infty$ και f μια μη αρνητική, μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν

$$\mu\{f \ge x\} \le \frac{1}{x^2}, \quad (\text{για } x \ge 1),$$

τότε $\int f < \infty$.

Υπόδειξη: $\int f = \int_{\{f<1\}} f + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{2^n \le f < 2^{n+1}\}} f$.

Πρόβλημα 8. Έστω χώρος X εφοδιασμένος με ένα θετικό μέτρο μ τέτοιο ώστε $\mu(X) < \infty$ και f μια μη αρνητική, μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $0 \le \beta \le \alpha$ δείξτε ότι

$$\int f^\alpha < \infty \implies \int f^\beta < \infty.$$