Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Μεταπτυχιακό Μάθημα «Πραγματική Ανάλυση»

Χειμερινό Εξάμηνο 2016-17 —- Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

Λύσεις Φυλλαδίου Ασκήσεων 2 – 29-9-2016. παραδοτέες 6-10-2016 στο μάθημα

Πρόβλημα 1. Κάθε μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

Λύση: Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα. Αρκεί να δείξουμε ότι $A = f^{-1}(a, +\infty) = \{x : f(x) > a\}$ είναι σύνολο Borel, για τυχόν $a \in \mathbb{R}$.

Έστω $b = \inf A$ και έστω $x > b$. Τότε υπάρχει στοιχείο του A μικρότερο του x και άρα, αφού η f είναι αύξουσα, και $x \in A$. Έστω $x < b$. Τότε αναγκαστικά $x \notin A$. Άρα το A είναι το διάστημα $(b, +\infty)$, πιθανόν με την προσθήκη του b. Σε οποιαδήποτε από τις δύο περιπτώσεις το A είναι Borel.

Πρόβλημα 2. Έστω $A_1, A_2, \ldots$ στοιχεία μιας σ-άλγεβρας σε ένα χώρο X και ας είναι B το σύνολο εκείνων των $x \in X$ που ανήκουν σε άπειρα από τα A_j και C το σύνολο εκείνων των $x \in X$ που ανήκουν *τελικά* σε όλα τα A_j. Δείξτε ότι τα B και C ανήκουν κι αυτά στη σ-άλγεβρα. *Υπόδειξη:* Εκφράστε τα B, C μέσω ενώσεων και τομών των A_j.

Λύση: Έχουμε

$$B = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k,$$

αφού για να ανήκει ένα στοιχείο x στην παραπάνω τομή πρέπει για κάθε $n \geq 1$ το x να ανήκει σε κάποιο A_k με $k \geq n$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να ανήκει σε άπειρα από τα A_k.

Επίσης

$$C = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k,$$

αφού για να ανήκει ένα στοιχείο x στην παραπάνω ένωση πρέπει να υπάρχει n ώστε το x να ανήκει σε όλα τα σύνολα A_k με $k \geq n$, πρέπει δηλ. το x να ανήκει *τελικά* στην ακολουθία A_n.

Λόγω των παραπάνω τύπων που χρησιμοποιούν αριθμήσιμες συνολοθεωρητικές πράξεις τα B και C ανήκουν στη σ-άλγεβρα. Συμβολίζουμε συνήθως $B = \limsup A_n$ και $C = \liminf A_n$.

Πρόβλημα 3. Σε ένα χώρο μέτρου έχουμε μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση της οποίας το ολοκλήρωμα είναι 0. Δείξτε ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο η συνάρτηση είναι σχεδόν παντού 0. *Υπόδειξη:* Εξετάστε τα σύνολα $E_n = \left\{f > \frac{1}{n}\right\}$, όπου f η συνάρτηση.

Δείξτε επίσης ότι αν η f έχει πεπερασμένο ολοκλήρωμα τότε είναι σχεδόν παντού πεπερασμένη (το αντίστροφο φυσικά δεν ισχύει).

Λύση: Αφού $f \geq 0$ έχουμε

$$0 = \int f \geq \int_{E_n} f \geq \int_{E_n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\mu(E_n),$$

άρα $\mu(E_n) = 0$ για κάθε $n > 0$. Αλλά $\{f \neq 0\} = \{f > 0\} = \bigcup_{n \geq 1} E_n$ οπότε $\mu\{f \neq 0\} = 0$.

Επίσης αν $\int f < \infty$ τότε

$$\infty > \int f \geq \int_{\{f=+\infty\}} f = +\infty \cdot \mu\{f = +\infty\},$$

άρα $\mu\{f = +\infty\}$ δε μπορεί να είναι θετικό γιατί σε αυτή την περίπτωση το δεξί μέλος θα έβγαινε $+\infty$.

Πρόβλημα 4. Στο $\mathbb{N}$ με το counting measure μ βρείτε μια ακολουθία συναρτήσεων $f_n : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ η οποία να συγκλίνει κατά σημείο στο 0 παντού και τέτοια ώστε $\int f_n \, d\mu \to 1$. Ομοίως τέτοια ώστε $\int f_n \, d\mu \to +\infty$.

Λύση: Για το πρώτο πάρτε $f_n(x) = \mathbf{1}\,(x = n)$. Για το δεύτερο $f_n(x) = \mathbf{1}\,(n \le x \le 2n)$.

Πρόβλημα 5. Έστω χώρος X εφοδιασμένος με ένα θετικό μέτρο μ. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο μετρήσιμο σύνολο E τότε $\int_E |f - f_n| \to 0$ αν $\mu(E)$ πεπερασμένο, ενώ αυτό δεν είναι αναγκαστικά σωστό αν $\mu(E) = \infty$ (δώστε παράδειγμα για το τελευταίο).

Λύση: Η ομοιόμορφη σύγκλιση των f_n στην f πάνω στο σύνολο E σημαίνει ακριβώς ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Έχουμε

$$\int_E |f - f_n| \le \int_E \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \mu(E) \to 0,$$

αφού $\mu(E) < \infty$.

Για το ότι η συνθήκη $\mu(E) < \infty$ δε μπορεί να παραλειφθεί πάρτε $X = E = \mathbb{N}$ με το counting measure, $f(x) \equiv 0$ και $f_n(x) = \frac{1}{n}\mathbf{1}\left(n \le x < n + n^2\right)$. Τότε $\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} \to 0$ ενώ $\int_E |f - f_n| = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n \to \infty$.

Πρόβλημα 6. Έστω χώρος X εφοδιασμένος με ένα θετικό μέτρο μ και f μια μη αρνητική, μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $\int f < \infty$.

(α) Δείξτε ότι $\int_{\{f>n\}} f \to 0$ όταν $n \to \infty$.

(β) Δείξτε επίσης ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\mu(E) < \delta \Longrightarrow \int_E f < \epsilon$.

Λύση: (α) Έχουμε

$$\int_{\{f\le n\}} f = \int f \cdot \mathbf{1}_{\{f\le n\}} \to \int f,$$

όπου η σύγκλιση δικαιολογείται από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης της ακολουθίας συναρτήσεων $f \cdot \mathbf{1}_{\{f\le n\}}$ στη συνάρτηση f. Αφού

$$\int f = \int_{\{f\le n\}} f + \int_{\{f>n\}} f$$

έπεται το ζητούμενο.

(β) Έστω $\epsilon > 0$. Από το (α) υπάρχει n τέτοιο ώστε $\int_{\{f>n\}} f \le \epsilon/2$. Θέτουμε $\delta = \epsilon/(2n)$. Τότε, αν $\mu(E) \le \delta$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_E f &= \int_{E\cap\{f\le n\}} f + \int_{E\cap\{f>n\}} f \\
&\le \int_{E\cap\{f\le n\}} n + \int_{\{f>n\}} f \\
&\le \int_E n + \int_{\{f>n\}} f \\
&\le n\delta + \epsilon/2 \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 7. Έστω χώρος X εφοδιασμένος με ένα θετικό μέτρο μ τέτοιο ώστε $\mu(X) < \infty$ και f μια μη αρνητική, μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν

$$\mu\{f \ge x\} \le \frac{1}{x^2}, \quad (\text{για } x \ge 1),$$

τότε $\int f < \infty$.

Υπόδειξη: $\int f = \int_{\{f<1\}} f + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{2^n \le f < 2^{n+1}\}} f$.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int f &= \int\limits_{\{f<1\}} f + \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\{2^n \le f < 2^{n+1}\}} f \\
&\le \int\limits_{\{f<1\}} 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\{2^n \le f < 2^{n+1}\}} 2^{n+1} \\
&\le \mu(X) + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} \mu\big\{2^n \le f < 2^{n+1}\big\} \\
&\le \mu(X) + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} \mu\{2^n \le f\} \\
&\le \mu(X) + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} 2^{-2n} \\
&= \mu(X) + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{1-n} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 8. Έστω χώρος X εφοδιασμένος με ένα θετικό μέτρο μ τέτοιο ώστε $\mu(X) < \infty$ και f μια μη αρνητική, μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $0 \le \beta \le \alpha$ δείξτε ότι

$$\int f^{\alpha} < \infty \Longrightarrow \int f^{\beta} < \infty.$$

Λύση: Υποθέτουμε $\int f^{\alpha} < \infty$. Έχουμε τότε

$$\begin{aligned}
\int f^{\beta} &= \int\limits_{\{f \le 1\}} f^{\beta} + \int\limits_{\{f>1\}} f^{\beta} \\
&\le \mu\{f \le 1\} + \int\limits_{\{f>1\}} f^{\alpha}, \quad (\text{αφού } f > 1 \Longrightarrow f^{\beta} \le f^{\alpha}) \\
&\le \mu(X) + \int f^{\alpha} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$
