Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Μεταπτυχιακό Μάθημα «Πραγματική Ανάλυση»

Χειμερινό Εξάμηνο 2016-17 —- Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

Λύσεις Φυλλαδίου Ασκήσεων 3 – 6-10-2016. Παραδοτέο 13-10-2016 στο μάθημα

Πρόβλημα 1. Αν $0 \le f$ σε ένα χώρο μέτρου μ και $\lambda > 0$ δείξτε

$$\mu\{f \ge \lambda\} \le \frac{\int f}{\lambda}.$$

Δείξτε επίσης ότι $\mu\{f \ge \lambda\} \le \frac{\int e^f}{e^\lambda}$. Γενικεύστε το με άλλες συναρτήσεις στη θέση της e^x.

Λύση: Αυτή είναι η ανισότητα του Markov:

$$\int f \ge \int_{f \ge \lambda} f \ge \int_{f \ge \lambda} \lambda = \lambda \mu\{f \ge \lambda\},$$

και διαιρώντας βγαίνει το αποτέλεσμα. Για την επόμενη ανισότητα εφαρμόστε το αποτέλεσμα στη συνάρτηση e^f και με e^λ στη θέση του λ. Στη θέση της e^x μπορείτε φυσικά να βάλετε οποιαδήποτε συνάρτηση ϕ οπότε το αποτέλεσμα γίνεται

$$\mu\{f \ge \lambda\} \le \frac{\int \phi(f)}{\phi(\lambda)}.$$

Πρόβλημα 2. Αν $f \in L^1(\mu)$ μιγαδική συνάρτηση σε χώρο πιθανότητας (δηλ. με $\mu(X) = 1$) δείξτε

$$\mu\left\{\left|f - \int f\right| \ge \lambda\right\} \le \frac{1}{\lambda^2} \int \left|f - \int f\right|^2.$$

Κάνοντας πράξεις στο δεξί μέλος συμπεράνετε ότι σε χώρο πιθανότητας ισχύει

$$\left(\int |f|\right)^2 \le \int |f|^2$$

για $f \in L^1(\mu)$. Είναι απαραίτητο η f να είναι ολοκληρώσιμη;

Λύση: Αυτή είναι η ανισότητα του Chebyshev. Για να την αποδείξετε εφαρμόστε την ανισότητα του Markov στη συνάρτηση $\left|f - \int f\right|$ με $\phi(x) = x^2$ (δείτε το Πρόβλημα 1).

Αν γράψετε $\left|f - \int f\right|^2 = (f - \int f)\overline{(f - \int f)}$ και κάνετε τις πράξεις (χρησιμοποιώντας ότι το συνολικό μέτρο είναι 1) προκύπτει ότι το δεξί μέλος είναι $\int |f|^2 - \left|\int f\right|^2$, και αφού είναι προφανώς μη αρνητικό προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα.

Αν και για να βγάλετε αυτή την ανισότητα χρησιμοποιήσατε το ότι $\int |f| < \infty$ το τελικό αποτέλεσμα ισχύει και όταν $\int |f| = +\infty$ αφού τότε (σε χώρο με πεπερασμένο μέτρο) ισχύει και $\int |f|^2 = +\infty$.

Πρόβλημα 3. Αν $E_1, E_2, \ldots$ μετρήσιμα σύνολα σε ένα χώρο μέτρου (X, μ) και $\sum_n \mu(E_n) < \infty$ δείξτε ότι το σύνολο των $x \in X$ που ανήκουν σε άπειρα από τα E_n έχει μέτρο 0.

Λύση: Το πλήθος των συνόλων E_j στα οποία ανήκει το τυχόν $x \in X$ είναι η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_n}(x).$$

Το ολοκλήρωμα αυτής είναι $\sum_n \mu(E_n) < \infty$ άρα αυτή η συνάρτηση είναι πεπερασμένη σχεδόν παντού.

Πρόβλημα 4. Κατασκευάστε μια ακολουθία $f_n : (0,1) \to [0, \infty)$ τέτοια ώστε $\liminf f_n(x) = 0$ και $\limsup f_n(x) = +\infty$ για κάθε $x \in (0,1)$ και επίσης $\int_{(0,1)} f_n \to 1$ και οι f_n να είναι συνεχείς. (Μην πάτε να βρείτε τύπο! Σκεφθείτε με τα γραφήματα των f_n.)

Λύση: Ορίζουμε κατ' αρχήν τη συνάρτηση $T(x)$ να είναι ίση με 1 στο $[-1/2, 1/2]$, ίση με 0 εκτός του $[-1, 1]$ και να είναι γραμμική στα διαστήματα $[-1, -1/2]$ και $[1/2, 1]$ (το γράφημά της είναι ένα τραπέζιο). Τη συνάρτηση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε ως βασικό συστατικό στοιχείο της κατασκευής μας.

Ορίζουμε επίσης τη συνάρτηση $T_\epsilon(x)$ να είναι η $T(x)$ αλλά με το διάστημα $[-1/2, 1/2]$ να έχει συσταλεί στο $[-\epsilon/2, \epsilon/2]$, και με τρόπο ώστε να διατηρείται το ολοκλήρωμά της. Δηλ. ορίζουμε

$$T_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} T(x/\epsilon).$$

Η ιδέα είναι η ακολουθία f_n να αποτελείται από μια «περιπλανώμενη» $T_\epsilon(x)$ με διαρκώς μειούμενο $\epsilon \to 0$ και συνεχώς μεταφερόμενη ώστε άπειρες φορές να περάσει πάνω από κάθε σημείο αλλά και άπειρες φορές να είναι μακριά από κάθε σημείο.

Ας ξεκινήσουμε με την τιμή $\epsilon = \frac{1}{10}$. Οι δέκα πρώτες από τις f_n θα είναι οι μεταφορές της $T_{1/10}(x)$ με τέτοιο τρόπο ώστε, αν χωρίσουμε το διάστημα $(0, 1)$ σε 10 ίσα διαστήματα τότε το κέντρο του τραπεζίου της $T_{1/10}(x)$ να έχει μεταφερθεί στα κέντρα αυτών των διαστημάτων. Παρατηρούμε τώρα ότι κάθε στοιχείο του $(0, 1)$ θα «δει» και μηδενικά αλλά και τη μέγιστη τιμή (δηλ. 10) της $T_{1/10}(x)$ από τις συναρτήσεις $f_1, \ldots, f_{10}$.

Οι επόμενες 100 συναρτήσεις ας είναι οι αντίστοιχες μεταφορές της $T_{1/100}(x)$ στα κέντρα των 100 ίσων διαστημάτων στα οποία χωρίζουμε το $(0, 1)$. Ομοίως βλέπουμε ότι από τις συναρτήσεις αυτές κάθε $x \in (0, 1)$ θα δει και το 0 ως τιμή αλλά και το 100.

Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο επ' άπειρον (η επόμενη δόση θα είναι με μεταφορές της $T_{1/1000}(x)$) βλέπουμε ότι κάθε $x \in (0, 1)$ θα δεί άπειρες φορές το 0 ως τιμή αλλά και μια ακολουθία ολοένα και μεγαλύτερων τιμών, οπότε $\liminf f_n(x) = 0$ και $\limsup f_n(x) = +\infty$. Επίσης $\int f_n = 1$ για κάθε n και όλες οι f_n είναι συνεχείς (ως τμηματικά γραμμικές).

Πρόβλημα 5. Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ δείξτε ότι η συνάρτηση $x \to \int_{(-\infty,x)} f\,dm$ είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση: Ορίζουμε $F(x) = \int_{(-\infty,x)} f\,dm$ (η F ονομάζεται *αόριστο ολοκλήρωμα* της f). Έστω $h > 0$. Τότε $F(x+h) - F(x) = \int_{(x,x+h)} f$, το οποίο τείνει στο 0 με το $h \to 0$ αφού η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη και το διάστημα ολοκλήρωσης έχει μέτρο (ίσο με h) που τείνει στο 0. Ομοίως και αν $h < 0$.

Παρατηρείστε ότι έχουμε αποδείξει όχι απλά τη συνέχεια της $F(x)$ για κάθε x αλλά την ομοιόμορφη συνέχεια αυτής (κοιτάξτε το Πρόβλημα 6(β) του δευτέρου φυλλαδίου).

Πρόβλημα 6. Έστω $f \in L^1(\mu)$ σε κάποιο χώρο μέτρου και ορίζουμε

$$f_t(x) = |f(x)| \cdot \mathbf{1}\left(|f(x)| > t\right)$$

για $t > 0$. Δείξτε ότι $\lim_{t\to\infty} \int f_t\,d\mu = 0$.

Λύση: Μπορούμε φυσικά να υποθέσουμε ότι $f \geq 0$. Αφού f ολοκληρώσιμη είναι πεπερασμένη σ.π. Άρα σ.π. έχουμε $\lim_{t\to+\infty} f_t(x) = 0$. Αφού $f_t \leq f$ το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης μας δίνει το ζητούμενο.

Πρόβλημα 7. Δείξτε

$$\lim_n n \int_0^1 \sqrt{x} e^{-n^2x^2}\,dx = 0.$$

Υπόδειξη: Ως κοινή ολοκληρώσιμη συνάρτηση που φράσσει τις $n\sqrt{x}e^{-n^2x^2}$ δοκιμάστε κάποια συνάρτηση της μορφής $C/\sqrt{x}$.

Λύση: Εύκολα βλέπουμε ότι οι συναρτήσεις $f_n(x) = n\sqrt{x}e^{-n^2x^2}$ συγκλίνουν στο 0 για κάθε $x \in (0, 1)$. Γράφουμε $g_n(x) = f_n(x)\sqrt{x}$. Η συνάρτηση μεγιστοποιείται στο $x = \frac{1}{\sqrt{2}n}$ και η μέγιστη τιμή της είναι η $g_n(1/(\sqrt{2}n)) = e^{-1/2}/\sqrt{2}$, άρα $f_n(x) \leq \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2x}}$, που είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $(0, 1)$, και το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης μας εγγυάται τη σύγκλιση των ολοκληρωμάτων στο 0.

Πρόβλημα 8. Δείξτε

$$\lim_n \int_{-\infty}^{\infty} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την ανισότητα $(1+x)^\alpha \ge 1+\alpha x$, που ισχύει για $\alpha \ge 1$ (λόγω κυρτότητας της συνάρτησης $(1+x)^\alpha$), για να βρείτε ένα κοινό ολοκληρώσιμο άνω φράγμα για όλες τις $f_n(x)$.

Λύση: Κατ' αρχήν δείχνουμε ότι ο ολοκληρωτέος $(1+x^2/n)^{-(n+1)/2}$ συγκλίνει στο $e^{-x^2/2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Το μόνο που χρειαζόμαστε εδώ είναι το όριο $\lim_{t\to+\infty}(1+1/t)^t = e$ (αν θέλετε να το δείξετε αυτό πάρτε λογαρίθμους και χρησιμοποιείστε το ότι $\log(1+t)/t \to 1$ για $t \to 0$).

Έπειτα έχουμε (για $n \ge 2$)

$$\begin{aligned} f_n(x) &\le \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n/2} \\ &\le \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}, \end{aligned}$$

μετά από εφαρμογή της ανισότητας $\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{n/2} \ge 1+\frac{x^2}{2}$. Παρατηρείστε ότι η συνάρτηση $\frac{1}{1+\frac{x^2}{2}}$ που είναι το κοινό άνω φράγμα για τις $f_n(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$. (Βεβαιωθείτε ότι καταλαβαίνετε το γιατί ισχύει αυτό το τελευταίο.)

Πρόβλημα 9. Αν $E \subseteq \mathbb{R}$ και $\alpha > 0$ ορίζουμε

$$f(E,\alpha) = \inf \sum_n |I_n|^\alpha, \tag{1}$$

όπου το infimum το παίρνουμε πάνω από όλες τις καλύψεις του συνόλου E από ακολουθίες ανοιχτών διαστημάτων I_n, και $|I_n|$ είναι τα μήκη των διαστημάτων αυτών.

Δείξτε ότι αν E είναι το τριαδικό σύνολο του Cantor τότε $f(E,\alpha) = 0$ αν $\alpha > \log 2/\log 3$.

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν καλύψεις του E από ανοιχτά διαστήματα έτσι ώστε το δεξί μέλος της (1) να είναι οσοδήποτε μικρό. Είναι πολύ εύκολο να δει κανείς ότι αν βρούμε κάτι τέτοιο με κλειστά διαστήματα τότε και αυτό αρκεί (αφού μπορούμε να πάρουμε ανοιχτά διαστήματα πάνω από τα κλειστά με μήκος οσοδήποτε κοντά θέλουμε στο μήκος των κλειστών). Οπότε για κάθε n παίρνουμε τα διαστήματα που ορίζουν το n-οστό στάδιο κατασκευής του συνόλου Cantor. Τα μήκη τους είναι 3^{-n} και το πλήθος τους είναι 2^n οπότε το άθροισμα (1) για αυτά είναι

$$2^n 3^{-\alpha n} = 2^{(1-\alpha\frac{\log 3}{\log 2})n}.$$

Αν $\alpha > \frac{\log 2}{\log 3}$ η παραπάνω ποσότητα τείνει στο 0 με το n.
