Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων

Θεωρία Ομάδων

Μιχάλης Κολουντζάκης – Εαρινό εξάμηνο 1999-2000

ΠΡΟΟΔΟΣ

1. (α) Έστω $\sigma = (x_1 \cdots x_r) \in S_n$ κύκλος περιττού μήκους. Δείξτε ότι η μετάθεση σ^2 είναι επίσης κύκλος.
(β) Αν η σ είναι κύκλος αρτίου μήκους, μεγαλύτερου του 2, τότε η σ^2 είναι γινόμενο ακριβώς δύο κύκλων.

2. (α) Αν p, q διαφορετικοί πρώτοι αριθμοί πόσοι είναι οι γεννήτορες της ομάδας $\mathbb{Z}_{pq}$;
(β) Αν A, B υποομάδες της G και $G = A \cup B$, τότε αναγκαστικά έχουμε $G = A$ ή $G = B$.

3. (α) Δώστε τον ορισμό της κανονικής υποομάδας.
(β) Αν η H είναι υποομάδα της G με δείκτη 2 τότε η H είναι κανονική.

4. (α) Πόσες μη ισόμορφες αβελιανές ομάδες τάξης 36 υπάρχουν;
(β) Πόσες υποομάδες έχει η $\mathbb{Z}_{36}$;

5. (α) Έστω $\phi : \mathbb{Z}_{20} \to \mathbb{Z}_{12}$ ομομορφισμός. Ποιες οι δυνατές τιμές του μεγέθους της εικόνας $|\phi(\mathbb{Z}_{20})|$;
(β) Αν G είναι κυκλική και H υποομάδα της G, τότε η ομάδα πηλίκο G/H είναι επίσης κυκλική.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες. Όλες οι σημειώσεις πρέπει να είναι κλειστές.
Καλή επιτυχία.

Ηράκλειο, 14 Απρ. 2000