Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων

Θεωρία Ομάδων

Μιχάλης Κολουντζάκης – Εαρινό εξάμηνο 1999-2000

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ

1. Έστω G μια ομάδα. Η G δρα πάνω στον εαυτό της με συζυγία. Αυτό σημαίνει ότι κάθε στοιχείο $g \in G$ ορίζει μια μετάθεση ϕ_g των στοιχείων της G που δίνεται από τον τύπο

$$x \to \phi_g(x) = gxg^{-1}.$$

Αυτή η μετάθεση δηλαδή, στέλνει το στοιχείο x της ομάδας στο στοιχείο $g^{-1}xg$.
(α) Δείξτε ότι η δράση αυτή, όπως ορίστηκε, είναι όντως μια δράση ομάδας πάνω σε ένα σύνολο.
(β) Αν $|Gx| = 1$, για κάποιο στοιχείο $x \in G$, τι συμπέρασμα προκύπτει για το x;
(γ) Αν $H \le G$ και $GH \subseteq H$, όπου

$$GH = \{\phi_g(h) : \ h \in H, g \in G\},$$

τι συμπεραίνετε για την υποομάδα H;

2. Έστω $H \le G$. Η H λέγεται *χαρακτηριστική υποομάδα* της G αν για κάθε αυτομορφισμό α της G έχουμε $\alpha(H) \subseteq H$. Αν $K \le H \trianglelefteq G$ και η K είναι χαρακτηριστική υποομάδα της H τότε δείξτε ότι $K \trianglelefteq G$.

3. (α) Με $\mathrm{Aut}(G)$ συμβολίζεται το σύνολο όλων των αυτομορφισμών της ομάδας G. Δείξτε ότι το $\mathrm{Aut}(G)$ αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων.
(β) Με $\mathrm{Inn}(G)$ συμβολίζουμε το υποσύνολο του $\mathrm{Aut}(G)$ που αποτελείται από τους *εσωτερικούς* αυτομορφισμούς, δηλ. τους αυτομορφισμούς που προέρχονται από συζυγία με ένα στοιχείο g της G και στέλνουν

$$x \to gxg^{-1}.$$

Δείξτε ότι το $\mathrm{Inn}(G)$ είναι υποομάδα της $\mathrm{Aut}(G)$ και μάλιστα κανονική.

4. Για μια ομάδα G το πηλίκο $G/Z(G)$ είναι κυκλική ομάδα, όπου $Z(G)$ είναι το κέντρο της G. Δείξτε ότι η G είναι αβελιανή.

5. (α) Δείξτε ότι αν σχηματίσουμε, μέσα σε μια αβελιανή ομάδα G, το σύνολο που απαρτίζεται από το μοναδιαίο στοιχείο και όλα τα στοιχεία τάξης 2, τότε παίρνουμε μια υποομάδα της G.
(β) Δείξτε με ένα αντιπαράδειγμα ότι αυτό δεν ισχύει χωρίς την υπόθεση ότι η G είναι αβελιανή.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. Όλες οι σημειώσεις πρέπει να είναι κλειστές. Καλή επιτυχία.

Ηράκλειο, 30 Αυγούστου 2000