Διάρκεια διαγωνίσματος 3 ώρες. Κλειστές όλες οι σημειώσεις.

Διαγώνισμα Σεπτεμβρίου, 13 Σεπτεμβρίου 2011

Πρόβλημα 1. Υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της συνάρτησης f που είναι η 2π-περιοδική επέκταση της συνάρτησης $f : [0.2\pi) \to \mathbb{C}$ που δίδεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in [a, b] \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases},$$

όπου $0 \le a < b < 2\pi$.

Πρόβλημα 2. Δίδεται το τριγωνομετρικό πολυώνυμο $p(x) = \sum_{k=-N}^{N} p_k e^{ikx}$ όπου $p_k \in \{-1, 1\}$ για κάθε $k = -N, -N+1, \ldots, N-1, N$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τ.ώ. $|p(x_0)| \ge \sqrt{2N+1}$.

Πρόβλημα 3. Διατυπώστε, χωρίς απόδειξη, το κριτήριο ισοκατανομής mod 1 του Weyl και χρησιμοποιείστε το για να αποδείξετε ότι η ακολουθία $n\sqrt{2}$, $n = 1, 2, \ldots$, είναι ισοκατανεμημένη mod 1.

Πρόβλημα 4. Υποθέστε γνωστό ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στο χώρο $L^1(\mathbb{T})$. Διατυπώστε με ακρίβεια το τι σημαίνει αυτό και χρησιμοποιείστε το για να δείξετε ότι αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ τότε $\lim_{|n|\to\infty} \widehat{f}(n) = 0$.

Πρόβλημα 5. Αν $f \in C^1(\mathbb{T})$ δείξτε ότι $\widehat{f}(n) = O(1/|n|)$.

Πρόβλημα 6. Αν $f \in C^1(\mathbb{T})$ δείξτε ότι $\widehat{f}(n) = o(1/|n|)$.

Πρόβλημα 7. Δείξτε ότι η συνέλιξη μιας ολοκληρώσιμης και μιας συνεχούς 2π-περιοδικής συνάρτησης είναι συνεχής.