Μέγεθος συντελεστών Fourier: γενικά για $f \in L^1(\mathbb{T})$

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \le \|f\|_1 \qquad \left|\widehat{f}(n)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f| = \|f\|_1$$

$\widehat{f}(n) \to 0$ για $n \to \pm\infty$ (Λήμμα Riemann–Lebesgue)

$$f(x) = \chi_{[a,b]}(x) \qquad \widehat{f}(n) = \ldots\ldots \to 0 \implies f(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j\, \chi_{[a_j,b_j]}(x)$$

κλιμακωτές

κλιμακωτές πυκνές στο L^1

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, k(x)$ τ.ω. $\|k - f\|_1 \le \epsilon$

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \le \left|\widehat{f-k}(n)\right| + \left|\widehat{k}(n)\right| \le \|f-k\|_1 + \left|\widehat{k}(n)\right| \le \varepsilon + \left|\widehat{k}(n)\right| \le 2\epsilon$$

$\downarrow 0$ $\qquad$ $\downarrow 0$ αν n μεγ.

Αντί για κλιμ. τριγωνομετρικά πολυώνυμα

Μέγεθος συντελεστών Fourier: περίπτωση $L^2 \subsetneq L^1$

Αν $f \in L^2(\mathbb{T})$ τότε $\underbrace{\sum_n \left|\widehat{f}(n)\right|^2 < \infty}_{=}$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_n |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2$$

Πόρισμα: $\underbrace{\text{Ίδιο συμπέρασμα αν } f \in L^p(\mathbb{T}) \text{ με } p \geq 2.}_{p \geqslant 2}$

$$|\hat{f}(n)| \leq \dots$$

$$f \in \underbrace{L^p \subseteq L^2}$$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\Downarrow$$

$$f \in L^2$$

$p \cancel{\leq} 2$

Μέγεθος συντελεστών Fourier: με ύπαρξη παραγώγων

Αν $f \in C^1(\mathbb{T})$ τότε $\left|\widehat{f}(n)\right| \le \frac{\|f'\|_1}{|n|}$.

$$\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n) \Rightarrow |\widehat{f}(n)| = \frac{|\widehat{f'}(n)|}{|in|} \le \frac{\|f'\|_1}{n}$$

Αν $f \in C^k(\mathbb{T})$ τότε $\left|\widehat{f}(n)\right| \le \frac{\|f^{(k)}\|_1}{|n|^k}$.

$$\widehat{f''}(n) = in\widehat{f'}(n) = (in)^2\widehat{f}(n)$$

$$\widehat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n^k}\right) \qquad \widehat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Riemman – Lebesgue $\Longrightarrow$

$$\left|\widehat{f}(n)\right| = o(1/|n|) \text{ αν } f \in C^1(\mathbb{T}), \quad \left|\widehat{f}(n)\right| = o(1/|n|^k) \text{ αν } f \in C^k(\mathbb{T}).$$

$$\frac{|\widehat{f}(n)|}{\frac{1}{|n|}} = |\widehat{f'}(n)| \xrightarrow{R-L} 0$$

$$|\widehat{f}(n)| = \frac{|\widehat{f'}(n)|}{|n|} = o\left(\frac{1}{|n|}\right)$$

Μέγεθος συντελεστών Fourier: με ύπαρξη παραγώγων

Δε χρειάζεται C^1.

$\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$

Αρκεί $\boxed{f(x) = \int_0^x \phi(t)\,dt}$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ για κάποια $\phi \in L^1(\mathbb{T})$

$$f(0) = 0 = f(2\pi) = \int_0^{2\pi} \varphi$$

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^x \phi(t)\,dt\right) e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(t)\left[\int_t^{2\pi} e^{-inx}\,dx\right]dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(t)\,\frac{1-e^{-int}}{-in}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi i n}\int_0^{2\pi}\phi(t)e^{-int}\,dt \\
&= \frac{\widehat{\phi}(n)}{in} = o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Fubini

$$\frac{e^{-inx}}{-in}$$

$$\int \varphi(t)\,dt = 0$$

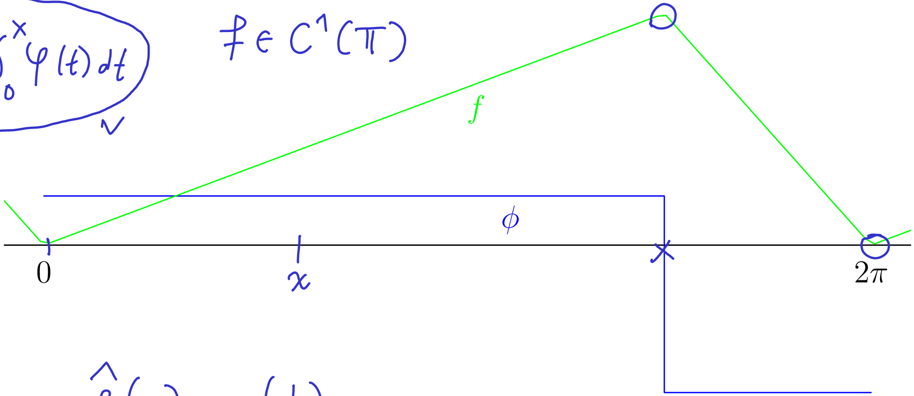
$\Uparrow$

f 2π-περιοδική

Μέγεθος συντελεστών Fourier: με ύπαρξη παραγώγων

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt$$

$$f \in C^1(\mathbb{T})$$



$$\hat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Μέγεθος συντελεστών Fourier: με ύπαρξη παραγώγων

Αν $f \in C^1(\mathbb{T})$ τότε $\sum_n \left|\hat{f}(n)\right| < \infty$. $\longrightarrow$ $\hat{f}(n) = \dfrac{\widehat{f'}(n)}{in}$ $(n \neq 0)$

Αν $f \in C^k(\mathbb{T})$ τότε $\sum_n |n|^{k-1}\left|\hat{f}(n)\right| < \infty$.

$$\sum_n |\hat{f}(n)| = |\hat{f}(0)| + \sum_{n \neq 0} \frac{|\widehat{f'}(n)|}{n}$$

Cauchy-Schwartz

$$\leq |\hat{f}(0)| + \underbrace{\left(\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}}_{<\infty} \cdot \underbrace{\left(\sum_{n \neq 0} |\widehat{f'}(n)|^2\right)^{1/2}}_{<\infty \quad f' \in L^2}$$

Μέγεθος συντελεστών Fourier: γρήγορη μείωση $\Longrightarrow$ ομαλότητα

Θεώρημα

Αν $\sum_n \left|\widehat{f}(n)\right| |n|^k < \infty$ τότε $f \in C^k(\mathbb{T})$.

f ομαλή $\Longleftrightarrow$ $\widehat{f}(n)$ μικροί

Απόδειξη για $k = 1$:

$\sum |\widehat{f}(n)| |n| < \infty$

$\widehat{\varphi}(0) = 0$

$\widehat{\varphi}(n)$

$\phi(x) := \sum_n \boxed{i n \widehat{f}(n)} e^{inx}$ είναι συνεχής (απόλυτη σύγκλιση)

✓ $|\widehat{f}(n)| \le \frac{5}{n^2}$

✓ $\sum_n |\widehat{f}(n)|^3 < \infty$

Αν $\Phi(x) = \int_0^x \phi(t)\, dt$ τότε $\boxed{\Phi \in C^1(\mathbb{T})}$ ✓ και εύκολα:

$\Phi' = \varphi$

$n \neq 0$

$$\widehat{\Phi}(n) = \frac{\widehat{\phi}(n)}{in} = \widehat{f}(n)$$

Θεώρημα Μοναδικότητας $\Longrightarrow$ $\cancel{\Phi = f}$ και άρα $f \in C^1(\mathbb{T})$.

$\Phi = f + \text{Const.}$

Μέγεθος συντελεστών Fourier: γρήγορη μείωση $\Longrightarrow$ ομαλότητα

Θεώρημα

Αν $\sum_n \left|\widehat{f}(n)\right| |n|^k < \infty$ τότε $f \in C^k(\mathbb{T})$.

$f \in L^2 \iff \sum |\widehat{f}(n)|^2 < \infty$

Παράδειγμα:

$$\widehat{f}(n) = O\left(\frac{1}{|n|^{2+\epsilon}}\right) \Longrightarrow \underline{f \in C^1(\mathbb{T})} \Longrightarrow \boxed{\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{|n|}\right)}$$

$$\sum |\widehat{f}(n)| \cdot |n| \le \sum \frac{c}{|n|^{2+\varepsilon}} |n| = c \sum \frac{1}{|n|^{1+\varepsilon}} < \infty$$

$$\Rightarrow f \in C^1$$

Μέγεθος συντελεστών Fourier: με συνθήκη Lipschitz

$$|f(x)-f(y)| \le M|x-y| \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R} \implies \left|\widehat{f}(n)\right| = O(\tfrac{1}{|n|}).$$

Απόδειξη:

Έχουμε $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+\frac{\pi}{n})e^{-inx}\,dx = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = -\widehat{f}(n)$ άρα

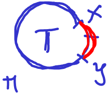
$$\begin{aligned}
\left|\widehat{f}(n)\right| &= \left|\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(f(x)-f(x+(\pi/n)))e^{-inx}\,dx\right| \\
&\le \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} M\frac{\pi}{|n|}\,dx \quad \text{(από την ιδιότητα Lipschitz)} \\
&\le \frac{\pi M}{2|n|}.
\end{aligned}$$

Μέγεθος συντελεστών Fourier: με συνθήκη Lipschitz-α

Συνθήκη Lipschitz-α (με $\alpha \in (0,1]$): $0 < \alpha \le 1$

Lip-α $$|f(x) - f(y)| \le M|x-y|^\alpha \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \quad \forall$$

Τότε $\left|\widehat{f}(n)\right| = O\left(\frac{1}{|n|^\alpha}\right)$.



$\alpha_1 \le \alpha_2 \Rightarrow \text{Lip-}\alpha_1 \supseteq \text{Lip-}\alpha_2 \supseteq \cdots \supseteq \text{Lip-}1$

$f \in \text{Lip-}1 \Rightarrow |\widehat{f}(n)| = O\left(\frac{1}{n}\right)$

$y = x + \frac{\pi}{n}$

Απόδειξη:

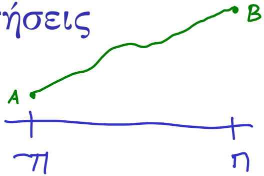
Έχουμε $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+\boxed{\frac{\pi}{n}})e^{-inx}\,dx = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = -\widehat{f}(n)$ άρα

$$\left|\widehat{f}(n)\right| = \left|\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(f(x) - f(x+(\pi/n)))e^{-inx}\,dx\right|$$

$$\le \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} M\left(\frac{\pi}{|n|}\right)^\alpha dx \quad \text{(από την ιδιότητα Lipschitz-}\alpha\text{)}$$

$$\le \boxed{\frac{\pi^\alpha M}{2|n|^\alpha}}.$$

Μέγεθος συντελεστών Fourier: μονότονες συναρτήσεις



Αν f μονότονη στο $(-\pi, \pi)$ και υπάρχουν τα πλευρικά όρια

$$A = \lim_{x \to -\pi+} f(x), \quad B = \lim_{x \to \pi-} f(x)$$

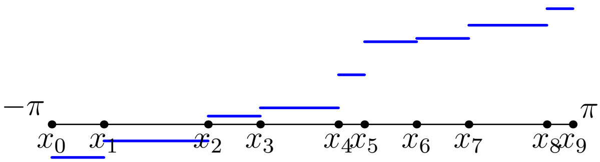
$C(\pi)$

τότε

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \le \frac{|B-A|}{\pi |n|}. \qquad O\left(\frac{1}{|n|}\right)$$

Βασική περίπτωση: f *αύξουσα και κλιμακωτή*: $f(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \chi_{[x_k, x_{k+1})}(t)$

$f:$



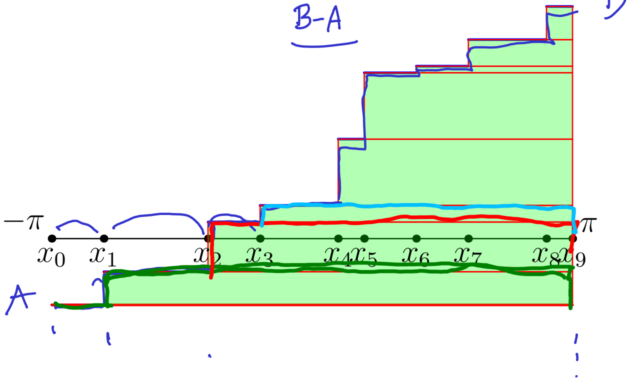
$c_k \in [A, B]$

Μέγεθος συντελεστών Fourier: μονότονες συναρτήσεις

Μπορούμε να γράφουμε

$(c_1 - c_0)\,\chi_{[x_1,\pi]}$

$$f(x) = \underline{c_0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N-1} \overbrace{\underline{(c_i - c_{i-1})}}^{\geq 0} \chi_{[x_i,\pi]}(x)}_{B-A}$$



Μέγεθος συντελεστών Fourier: μονότονες συναρτήσεις

Αφού

$$\widehat{\chi_{[a,b]}}(n) = \frac{i}{2\pi n}(e^{-ibn} - e^{-ian})$$

έχουμε

$$\left|\widehat{\chi_{[a,b]}}(n)\right| \le \frac{1}{\pi|n|}. = O\left(\frac{1}{|n|}\right)$$

και

$$\left|\widehat{f}(n)\right| \le \frac{c_{N-1} - c_0}{\pi|n|} = \frac{B-A}{\pi|n|}.$$

$$f(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{N-1} (c_i - c_{i-1}) \chi_{[x_i, \pi]}(x)$$

$$\widehat{f}(n) = \sum_{i=1}^{N-1} (c_i - c_{i-1}) \widehat{\chi}_{[x_i, \pi]}(n) \le \frac{1}{\pi|n|} \overbrace{\sum (c_i - c_{i-1})}^{B-A}$$

Μέγεθος συντελεστών Fourier: μονότονες συναρτήσεις

$n \to \infty$

Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ αύξουσα την προσεγγίζουμε από την κλιμακωτή συνάρτηση

$$g(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(A + k\frac{B-A}{N} \right) \chi_{[x_k, x_{k+1})}$$

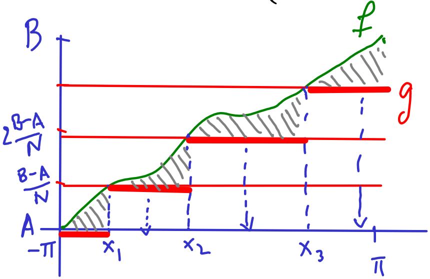
$$\hat{f}(n) = \underbrace{\widehat{f-g}(n)}_{\le \varepsilon} + \overbrace{\hat{g}(n)}^{\le \varepsilon}$$

$$\|f-g\|_1 \le 2\pi \frac{B-A}{N} \le \epsilon$$

$N \downarrow$ μεγάλο

με

$$x_k = \inf\left\{ x \in (-\pi, \pi) : \ f(x) \ge A + k\frac{(B-A)}{N} \right\}, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1.$$



$$|\hat{f}(n)| \le \cancel{\varepsilon} + \frac{B-A}{\pi|n|}, \quad \forall \varepsilon$$

$$|\hat{g}(n)| \le \frac{B-A}{\pi|n|}$$

$$|\widehat{f-g}(n)| \le \varepsilon \quad (N \text{ μεγ.})$$

Μέγεθος συντελεστών Fourier: κυρτές ακολουθίες συντελεστών

Υπάρχει

$$\widehat{a_n} \in \mathbb{C} \quad \text{με } |a_n| \to 0 \qquad n \to +\infty, \quad n \to -\infty$$

που δεν είναι ακολουθία συντελεστών Fourier.

$0 \leftarrow \varepsilon_n \le |\hat{f}(n)|$

Ερώτημα: Υπάρχουν $f \in L^1(\mathbb{T})$ με συντελεστές Fourier που πηγαίνουν οσοδήποτε γρήγορα στο 0;

αργά

$\varepsilon_n \downarrow 0$ Βρείτε $f \in L^1$ τ.ώ. $|\hat{f}(n)| \le \varepsilon_n$.

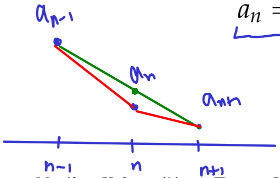
$0 \le c_n \le \varepsilon_n$, $: \sum_n c_n < \infty$

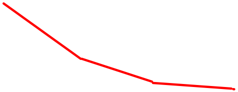
$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \in C(\mathbb{T})$

$\hat{f}(n) = c_n$

Κυρτή ακολουθία:

$$a_n = a_{-n} \ge 0 \quad \text{και } a_n \le \boxed{\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}} \text{ για κάθε } n \ge 1$$





Μέγεθος συντελεστών Fourier: κυρτές ακολουθίες συντελεστών

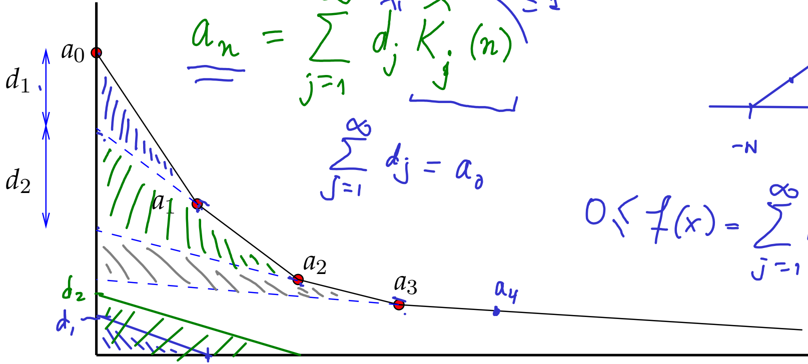
Θεώρημα

Αν $\underset{\geq 0}{a_n}$ *κυρτή ακολουθία τότε υπάρχει* $0 \leq f \in L^1(\mathbb{T})$ *τ.ώ.* $f \geq 0$

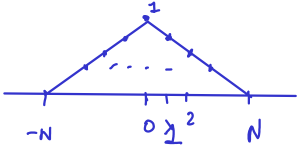
$$\widehat{f}(n) = a_n, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{Z}.$$

$K_N(x) \geq 0$ $\widehat{K_N}(n)$ κυρτή

$$a_n = \sum_{j=1}^{\infty} \overset{\geq 0}{d_j} \underbrace{\widehat{K_j}(n)}_{\leq 1}$$



$$\sum_{j=1}^{\infty} d_j = a_0$$



$$0 \leq f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} d_j K_j(x) \in L^1(\mathbb{T})$$

$$\int |f| = \int f = \hat{f}(0) = a_0 < \infty$$

Πρ Αν $\varepsilon_n \geq 0$, $\varepsilon_n \to 0$ τότε υπάρχει κυρτή ακολουθία $\underbrace{a_n \geq \varepsilon_n}_{a_n \to 0}$

$$|\hat{f}(n)| \geq \varepsilon_n$$

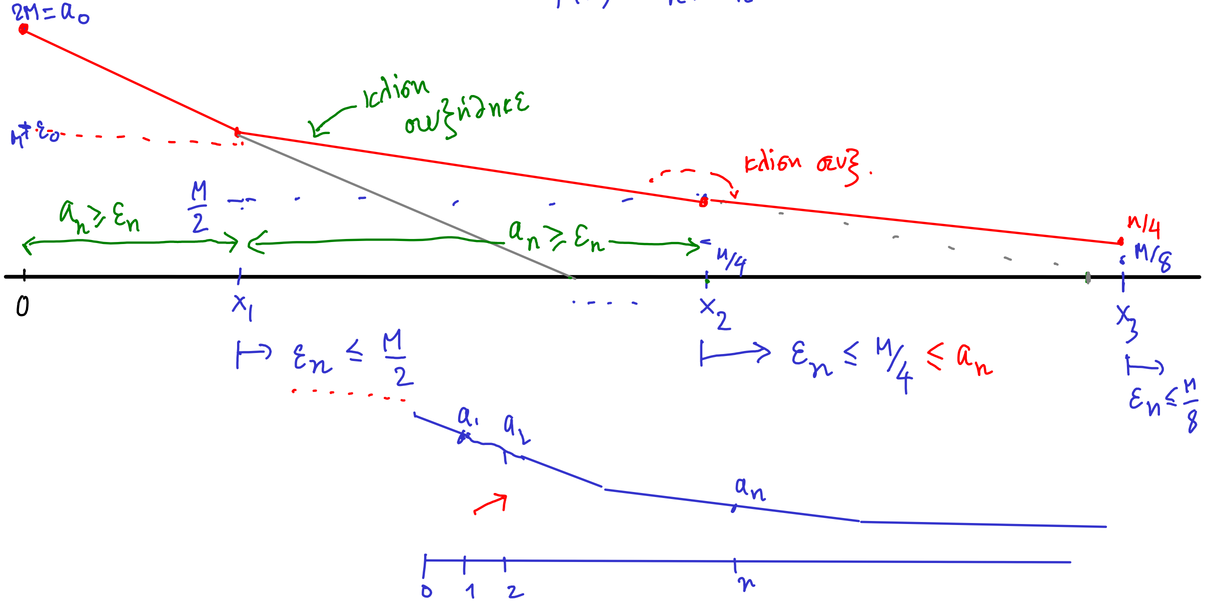
1. ε_n φθίνουσα $\quad \varepsilon_n' \geq \varepsilon_n$, $\varepsilon_n' \to 0$

$$\varepsilon_n' = \sup\{\varepsilon_k : k \geq n\} \qquad \varepsilon_n' \geq \varepsilon_{n+1}', \ \varepsilon_n' \to 0$$

2. $\varepsilon_n'' = \varepsilon_n' + \frac{1}{n}$ γνησίως φθίνουσα

$M = \sup \varepsilon_n$

$\hat{f}(n) = a_n \geq \varepsilon_n$



Μέγεθος συντελεστών Fourier: περιττές ακολουθίες συντελεστών

Θεώρημα

Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ *και* $-\widehat{f}(-n) = \widehat{f}(n) \ge 0$ *για* $n \ge 0$, *τότε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(n)}{n} < \infty.$$

Πόρισμα

Αν $a_n \ge 0$ *και* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = +\infty$ *τότε η τριγωνομετρική σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$$

δεν είναι σειρά Fourier μιας L^1 *συνάρτησης.*

Μέγεθος συντελεστών Fourier: περιττές ακολουθίες συντελεστών

$F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$ είναι περιοδική και συνεχής συνάρτηση (αφού $\int_0^{2\pi} f = 0$).

$i\widehat{F}(n) = \dfrac{\widehat{f}(n)}{n}$ και από θ. Fejér: $\sigma_N(iF)(0) \to iF(0) = 0$

$$\begin{aligned}\sigma_N(iF)(0) &= i\widehat{F}(0) + 2\sum_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{n}{N+1}\right)\frac{\widehat{f}(n)}{n}\\ &\to i\widehat{F}(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\widehat{f}(n)}{n},\end{aligned}$$

Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(n)}{n} = -i\widehat{F}(0)$.