Χώροι με νόρμα: τι είναι νόρμα $x \in V$ $\|x\|$

$\mathbb{C}$-γραμμικός χώρος V με συνάρτηση $\|\cdot\| : V \to \boxed{\mathbb{R}^{\geq 0}}$ τ.ώ.

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ για $x \in V, \lambda \in \mathbb{C}$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in V$.

   Τριγ. ανισότητα

Μια νόρμα ορίζει τη μετρική στον V:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Χώροι με νόρμα: παραδείγματα

$x=(x_1,\dots,x_n)$

- $\mathbb{C}^n$ με $\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$, για $\boxed{1 \le p < \infty}$
- $\mathbb{C}^n$ με $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$
- $\ell^p(\mathbb{Z}) = \left\{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} :\ \text{με } \|x\|_p^p = \sum_{i\in\mathbb{Z}} |x_i|^p < \infty\right\}$, για $1 \le p < \infty$
- $\ell^\infty(\mathbb{Z}) = \{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} :\ \text{με } \|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{Z}} |x_i| < \infty\}$

$x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$

Χώροι με νόρμα: παραδείγματα $\|f\|_p = \left(\int_I |f|^p\right)^{1/p}$

- $L^p(I) = \left\{f : I \to \mathbb{C} \text{ με } \|f\|_p^p = \int_I |f|^p < \infty\right\}$, για $1 \le p < \infty$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$
- $L^\infty(I) = \{f : I \to \mathbb{C} \text{ με } \|f\|_\infty = \operatorname{esssup}_{x\in I}|f(x)| < \infty\}$
- $C(I) = \{f : I \to \mathbb{C}$ με f συνεχή στο I και $\|f\|_\infty = \sup_{x\in I}|f(x)|\}$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγές.
- $C^1(I) = \{f : I \to \mathbb{C}$ με f συνεχώς παραγωγίσιμη στο I και $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\}$, για $I = [a, b]$.

Χώροι με νόρμα: συνεχείς γραμμικοί τελεστές

$Y = \mathbb{C}$ ή $\mathbb{R}$

συναρτησοειδές

X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμική συνάρτηση (τελεστής):

$$\textbf{(Νόρμα τελεστή)} \quad \|T\| \stackrel{\text{Ορ.}}{=} \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x \in X, \|x\|_X = 1} \|Tx\|. \leq M < \infty$$

$\|Tx\|_Y \leq M \|x\|_X$

Θεώρημα

Τα παρακάτω ισοδύναμα για γραμμική $T : X \to Y$:

1. *T συνεχής σε ένα σημείο $x_0 \in X$*
2. *T φραγμένος τελεστής (δηλ. $\|T\| < \infty$)*
3. *T συνεχής παντού*

Χώροι με νόρμα: γραμμικοί τελεστές: συνεχείς = φραγμένοι

- $1 \implies 2$

$Tx_n + Tx_0$

$x_n \to 0 \implies x_n + x_0 \to x_0$, άρα $T(x_n + x_0) \to Tx_0$, άρα $Tx_n \to 0$ (συνέχεια στο 0)

Αν $m_n = \frac{\|Tx_n\|_Y}{\|x_n\|_X} \to \infty$ τότε $\frac{x_n}{\sqrt{m_n}\|x_n\|_X} \to 0$ αλλά

$\exists x_n \in X$

$$\left\| T\frac{x_n}{\sqrt{m_n}\|x_n\|_X} \right\| = \sqrt{m_n} \to \infty, \text{ άτοπο.}$$

$\frac{1}{\sqrt{m_n}\|x_n\|} \|Tx_n\| = \frac{m_n}{\sqrt{m_n}} = \sqrt{m_n} \to \infty$

- $2 \implies 3$

Έστω $x_n \to x_0$. Τότε $x_n - x_0 \to 0$. Επίσης $\|Tx\|_Y \le M\|x\|_Y$ για κάποιο $M > 0$.
Άρα $\|T(x_n - x_0)\|_Y \le M\|x_n - x_0\|_X \to 0$, οπότε

$$T(x_n - x_0) \to 0 \text{ ή } Tx_n \to Tx_0.$$

$Tx_n - Tx_0 \to 0$

- $3 \implies 1$

Προφανές.

Χώροι με νόρμα: γραμμικοί τελεστές: παραδείγματα

1. $X = L^1([0,2\pi])$, $Y = \mathbb{C}$,

$\|Tf\| = |Tf| = \left|\int_0^{2\pi} f\right| \le \int_0^{2\pi} |f| = \|f\|_1$

$$Tf = \int_0^{2\pi} f \quad \text{(φραγμένος τελεστής)}$$

$|Tf| \le C\|f\|_\infty$

$|Tf| \le \int_0^{2\pi} |f| \le \int_0^{2\pi} \|f\|_\infty = 2\pi \|f\|_\infty$

Ομοίως αν $X = C([0,2\pi])$.

2. $X = C([0,2\pi])$, $Y = \mathbb{C}$,

$|Tf| \le \|f\|_\infty$

"$|f(x_0)|$"

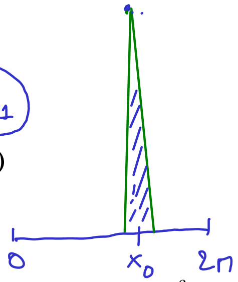
$$Tf = f(x_0), \text{ για κάποιο } x_0 \in [0,2\pi] \text{ (φραγμένος)}$$

3. $X = C([0,2\pi])$, $Y = \mathbb{C}$,

L^1

$|Tf| = |f(x_0)| \cancel{\le} C\|f\|_1$

$$Tf = f(x_0), \text{ (μη φραγμένος, αν } L^1 \text{ νόρμα στον } X\text{)}$$



Χώροι με νόρμα: γραμμικοί τελεστές: παραδείγματα

1. $X = L^p(\mathbb{R})$, $Y = L^p(\mathbb{R})$, με $1 \le p \le \infty$ (τελεστής μεταφοράς): $\|Tf\|_p = \|f\|_p$

$$Tf(x) = f(x+\tau) \quad \text{για κάποιο } \tau \in \mathbb{R}, \text{ (φραγμένος τελεστής)}$$

2. $X = L^p(\mathbb{T})$, $Y = L^p(\mathbb{T})$, με $1 \le p \le \infty$, και $w(x) \in L^1(\mathbb{T})$ (συνέλιξη):

$\|T\| \le \|w\|_1$

$$Tf(x) = w * f(x) = \int w(t) f(x-t)\,dt, \qquad \text{(φραγμένος τελεστής).}$$

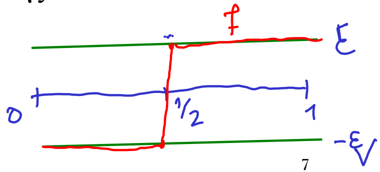
$\|w*f\|_p \le \|w\|_1 \|f\|_p$

3. $X = C^1([0,1])$, με την $\|\cdot\|_\infty$ νόρμα, $Y = \mathbb{C}$:

$$Tf = f'(\tfrac{1}{2}), \qquad \text{(μη φραγμένος τελεστής).}$$

ε

$|f'(\tfrac12)| \not\le C\|f\|_\infty$



Χώροι με νόρμα: γραμμικοί τελεστές: παραδείγματα

$X = L^p(\mathbb{R}), 1 \le p < \infty$, $Y = \mathbb{C}$, με $w(x) \in L^q(\mathbb{R})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$: συζυγείς εκθέτες

$$\Rightarrow p + q = pq$$

$$Tf = \int_{\mathbb{R}} w(t) f(t)\, dt.$$

Ανισότητα **Hölder:** $|Tf| \le \|w\|_q \|f\|_p$ άρα $\|T\| \le \|w\|_q$.

Παίρνοντας $f = \frac{|w|^{1+\frac{q}{p}}}{w}$ και κάνοντας την αβλαβή υπόθεση $\|w\|_q = 1$ έχουμε

$$\|f\|_p = \left(\int |w|^{\frac{q}{p}p}\right)^{1/p} = \Big(\underbrace{\int |w|^q}_{1}\Big)^{1/p} = 1$$

$\|f\|_p = 1$

και

$$Tf = \int wf = \int |w|^{\frac{p+q}{p}} = \int |w|^q = 1 = \|w\|_q \|f\|_p.$$

Άρα $\|T\| = \|w\|_q$. Ισχύει και για $p = \infty, q = 1$.

Χώροι με νόρμα: γραμμικοί τελεστές: παραδείγματα

$T : C([0, 2\pi]) \to \mathbb{C}$ με

$\|\cdot\|_\infty$

$$Tf = \int_0^{2\pi} w(x) f(x)\, dx,$$

όπου $\boxed{w \in L^1([0, 2\pi])}$. Φραγμένος:

$$|Tf| \le \int_0^{2\pi} |w(x)||f(x)| \le \int_0^{2\pi} |w(x)|\|f\|_\infty = \|w\|_1 \|f\|_\infty$$

Άρα $\|T\| \le \|w\|_1$.

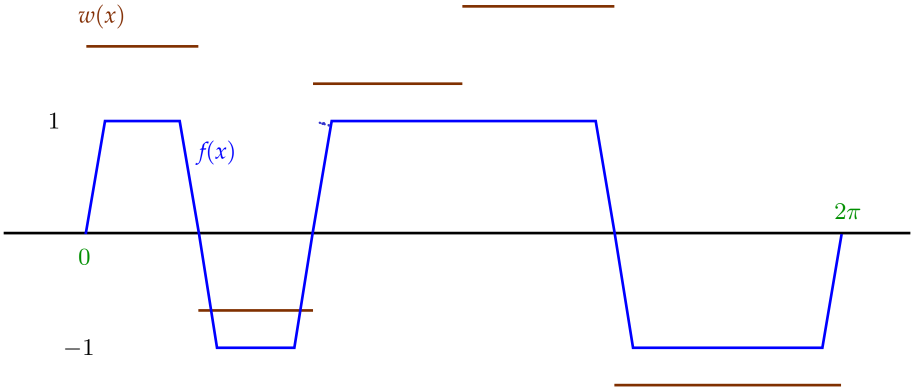
$L^\infty([0, 2\pi])$

Ισχύει $\|T\| = \|w\|_1$;

$f = \frac{\overline{w}}{|w|} \Rightarrow |f| = 1$ $\quad \|f\|_\infty = 1$

$Tf = \int w \frac{\overline{w}}{|w|} = \int \frac{|w|^2}{|w|} = \int |w| = \|w\|_1$

Χώροι με νόρμα: γραμμικοί τελεστές: νόρμα του $f \to \int_0^{2\pi} wf$



$\|T\| = \|w\|_1$

Αν $w(x)$ κλιμακωτή συνάρτηση στο $[0, 2\pi]$ επιλέγουμε $f(x)$ μια συνεχή συνάρτηση με τιμές στο $[-1, 1]$ που να προσεγγίζει το πρόσημο της $w(x)$.

$\int wf$

Τότε Tf προσεγγίζει το $\int |w|$ και αφού $\|f\|_\infty = 1$ έχουμε το ζητούμενο.

Χώροι με νόρμα: γραμμικοί τελεστές: νόρμα του $f \to \int_0^{2\pi} wf$

Αν $w \in L^1([0, 2\pi])$ παίρνουμε w_s κλιμακωτή με $\|w - w_s\|_1 \le \epsilon$.
Για $f \in C([0, 2\pi])$ με $\|f\|_\infty = 1$ έχουμε

$$\int_0^{2\pi} w_s f = \int_0^{2\pi} wf + \int_0^{2\pi} (w_s - w) f.$$

$|\cdot| \le \epsilon$

Ο τελευταίος όρος είναι $\le \|w - w_s\|_1 \|f\|_\infty \le \epsilon$.

Επιλέγουμε f τ.ώ. $\|f\|_\infty = 1$ και $\left| \int_0^{2\pi} w_s f - \|w_s\|_1 \right| \le \epsilon$. Παίρνουμε

$$\left| \int_0^{2\pi} wf \right| \ge \left| \int_0^{2\pi} w_s f \right| - \epsilon \ge \|w_s\|_1 - 2\epsilon \ge \|w\|_1 - 3\epsilon.$$

$\int wf \geq \|w\|_1 - 3\varepsilon$

$\|T\| = \|w\|_1$

Δείξαμε $\left\| f \to \int_0^{2\pi} wf \right\|_{C([0,2\pi]) \to \mathbb{C}} = \|w\|_1$.

✓

Χώροι με νόρμα: Cesàro μέσοι μιας σειράς Fourier

$S_N f = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{ikx}$

$\sigma_N f = \frac{S_0 f + \dots + S_N f}{N+1}$

Για $f \in C(\mathbb{T})$ έχουμε $\sigma_N(f) = k_N * f$, k_N ο πυρήνας του Fejér.

Σημαντικό: $\|\sigma_N\|_{C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})} = \|k_N\|_1 = 1$ (φραγμένο για $N \to \infty$).

Αν $g \in C^2(\mathbb{T})$ ξέρουμε $\|S_N(g) - g\|_\infty \to 0$, άρα και $\|\sigma_N(g) - g\|_\infty \to 0$.

$C^2(\mathbb{T})$ πυκνός στον $C(\mathbb{T})$. Παίρνουμε $g \in C^2(\mathbb{T})$ τ.ώ. $\|f - g\|_\infty < \epsilon$. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
\|\sigma_N(f) - f\|_\infty &= \|\sigma_N(f) - \sigma_N(g) + \sigma_N(g) - g + g - f\|_\infty \\
&\le \|\sigma_N(f-g)\|_\infty + \|\sigma_N(g) - g\|_\infty + \|g - f\|_\infty \\
&\le \epsilon + \|\sigma_N(g) - g\|_\infty + \epsilon
\end{aligned}
$$

Για N αρκετά μεγάλο έχουμε και $\|\sigma_N(g) - g\|_\infty < \epsilon$.

Δείξαμε το θεώρημα του Fejér για το χώρο $C(\mathbb{T})$.

Χώροι με νόρμα: Cesàro μέσοι μιας σειράς Fourier

Ίδια απόδειξη για το θεώρημα Fejér στους χώρους $L^p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$.

$f \in L^p \quad \|\sigma_N f - f\|_p \to 0$

Τα βασικά συστατικά:

1. $\|\sigma_N\|_{L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})} \le \|k_N\|_1 = 1$ (θα αρκούσε να είναι φραγμένο).
2. $C^2(\mathbb{T})$ πυκνός στον $L^p(\mathbb{T})$ (στην L^p νόρμα).
3. Για $g \in C^2(\mathbb{T})$ ισχύει $\|\sigma_N(g) - g\|_p \to 0$ (αφού ισχύει και στην ∞-νόρμα).

Το θ. Fejér δεν ισχύει στον $L^\infty(\mathbb{T})$ (ομοιόμορφο όριο των $\sigma_N(f)$ θα ήταν αναγκαστικά συνεχές).

$\sigma_N f \xrightarrow[\text{ομ.}]{} f \in L^\infty$

Ερώτημα: Μπορούμε να κάνουμε το ίδιο με τον τελεστή

$$S_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e^{ikx} = D_N * f;$$

Χώροι με νόρμα: Η L^1 νόρμα του πυρήνα Dirichlet

$$D_N(x) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$$

Αλλάζει πρόσημο στα σημεία

$$x_k = k\frac{2\pi}{2N+1}.$$

Μπορούμε να δείξουμε

$$\boxed{\|D_N\|_1 \ge C\log N.}$$

Άρα, δε μπορούμε να εφαρμόσουμε την προηγούμενη μέθοδο.

$$\sin\frac{x}{2} \approx \frac{x}{2}$$

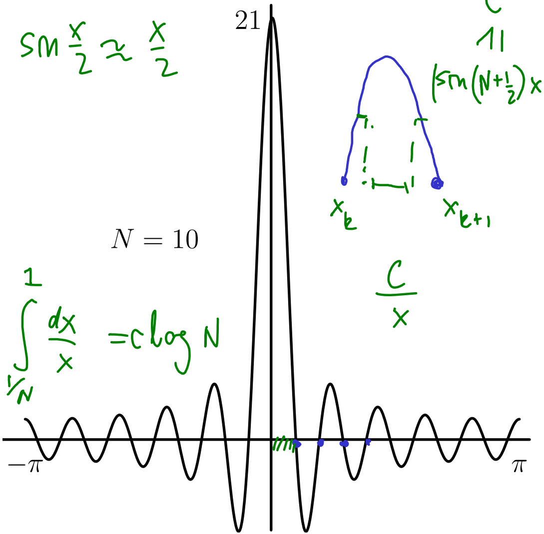
$$\int |D_N| \gtrsim \int_{1/N}^{1} \frac{dx}{x} = C\log N$$

C

$|\sin(N+\tfrac{1}{2})x|$

$x_k \quad x_{k+1}$

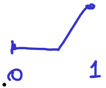
$\frac{C}{x}$



Χώροι με νόρμα: πληρότητα (χώροι Banach)

Χώρος Banach: χώρος με νόρμα που είναι πλήρης (με τη μετρική της νόρμας).
Παραδείγματα:

1. Έχουμε ήδη δείξει την πληρότητα των χώρων $L^p(\mathbb{R})$ ή $L^p([0,2\pi])$ για $1 \le p < \infty$.
2. Ομοίως πλήρεις οι $\ell^p(\mathbb{Z}) = \left\{x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}} : \ \|x\|_p^p = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|^p < \infty\right\}$, $1 \le p < \infty$.
3. Μη πλήρης χώρος: όλα τα πολυώνυμα στο $[0,1]$ με την $\|\cdot\|_\infty$ νόρμα.
4. $L^\infty(I)$ είναι πλήρης χώρος για κάθε $I \subseteq \mathbb{R}$.
5. Ομοίως ο $\ell^\infty(\mathbb{Z}) = \left\{x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}} : \ \|x\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{Z}} |x_j| < \infty\right\}$.



$$\left.\begin{array}{l} x_n \in X \quad \text{Cauchy} \\ \forall \varepsilon>0\ \exists n_0 : m,n \geq n_0 : \|x_m - x_n\| \leq \epsilon \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x \in X : \quad x_n \to x$$

Χώροι με νόρμα: πληρότητα του L^∞

$|f_m(x) - f_n(x)| \le \|f_m - f_n\|_\infty \le \epsilon$

Αν $f_n \in L^\infty(\mathbb{R})$ είναι Cauchy

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ η ακολουθία αριθμών } f_n(x) \text{ είναι Cauchy.}$$

Άρα ορίζεται το $f(x) = \lim_n f_n(x)$ (σχεδόν) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \le \limsup_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|_\infty. \le \epsilon$$

Αφού η f_n είναι Cauchy αυτό μπορεί να γίνει $< \epsilon$ αρκεί το n μεγάλο.

Πληρότητα του $L^\infty([0,2\pi])$ συνεπάγεται την πληρότητα του $\boxed{C([0,2\pi])}$ αφού η συνέχεια διατηρείται στην ομοιόμορφη σύγκλιση.

f_n

$f_n \to f \in L^\infty$

$\cap$

$C([0,2\pi])$

Χώροι με νόρμα: το θεώρημα Banach-Steinhaus

Θεώρημα (Αρχή ομοιόμορφου φράγματος)

Φραγμένοι τελεστές $T_i : X \to Y$, $i \in I$, *όπου* X *χώρος Banach (πλήρης).*
Υπόθεση: *Για κάθε* $x \in X$ *το σύνολο* $\{\|T_i x\|_Y : i \in I\}$ *είναι φραγμένο.*
$\implies$ *Το σύνολο* $\{\|T_i\| : i \in I\}$ *είναι φραγμένο.*

$\exists M : \|T_i\| \le M \Rightarrow \|T_i x\| \le M\|x\| \quad \forall x \ \forall i$

Εφαρμογή: $C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ με $f \to S_n f(0)$ (σύγκλιση σειράς Fourier στο 0).

Η νόρμα αυτού του τελεστή $f \to \int D_n(x) f(x)\,dx$ είναι η

$$\|D_n\|_1 \ge C \log n \quad \text{(όχι φραγμένη).}$$

Άρα υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τ.ώ.

$S_n f(0)$ δεν είναι φραγμένη ακολουθία, άρα και δε συγκλίνει.

Χώροι με νόρμα: το θ. Banach-Steinhaus: απόδειξη

αντίφαση στην υπόθεση

Έστω $\sup_{i\in I} \|T_i\| = +\infty$.
Βρίσκουμε $x_n \in X$, ακολουθία T_n τ.ώ.

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ συγκλίνει και } \|T_n x\| \geq n.$$

$\Sigma \|x_k\| < \infty$

Αν έχουμε επιλέξει ήδη τα $x_1, \ldots, x_{n-1}, T_1, \ldots, T_{n-1}$ και επιλέγουμε x_n, T_n είναι:

$$T_n x = \underbrace{T_n(x_1 + \cdots + x_{n-1})}_{I} + \underbrace{T_n x_n}_{II} + \underbrace{T_n(x_{n+1} + \cdots)}_{III}.$$

Έστω

$$M_{n-1} = \sup_{i\in I} \|T_i(x_1 + \cdots + x_{n-1})\| < \infty \text{ από την υπόθεσή μας.}$$

Χώροι με νόρμα: το θ. Banach-Steinhaus: απόδειξη

$$T_n x = \underbrace{T_n(x_1 + \cdots + x_{n-1})}_{I} + \underbrace{T_n x_n}_{II} + \underbrace{T_n(x_{n+1} + \cdots)}_{III}.$$

κύριος

$\|T_n\| \geq 10\,10^n$

→ τμήματα

Επιλέγουμε x_n, T_n ώστε

$\sum \|x_n\| < \infty$

$\|II\|$

$$(a)\ \|x_n\| = 10^{-n} \text{ και } (b)\ \|T_n x_n\| \geq \frac{9}{10}\|T_n\|\|x_n\| \geq \max\{10 \cdot M_{n-1}, 2n\}.$$

Το (b) εξασφαλίζει ότι $\|I\| < \frac{1}{10}\|II\|$.

$10^n \cdot \|x\|$

$\|T_n x\| \geq \frac{9}{10}\|T_n\| \cdot \|x\|$

Το (a) δίνει $\|x_{n+1} + \cdots\| \leq \frac{1}{9}\|x_n\|$ άρα

$$\|III\| \leq \|T_n\|\frac{1}{9}\|x_n\| \leq \frac{10}{9}\frac{1}{9}\|II\| \leq \frac{1}{8}\|II\|.$$

$\left\|T_n \frac{x}{10^n\|x\|}\right\| \geq \frac{9}{10}\|T_n\| \cdot \left\|\frac{x}{10^n\|x\|}\right\|$

έχει νόρμα 10^{-n}

Άρα

$$\|T_n x\| \geq \|II\| - \|I\| - \|III\| \geq \left(1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{8}\right)\|II\| \geq \frac{1}{2}\|II\| \geq n.$$