

Μετασχηματισμός Fourier: για $f \in \underline{L^1(\mathbb{R})}$ $\bigcirc \xrightarrow{0 \rightarrow 2\pi} \left\| \int_{\mathbb{R}} |f| < \infty \right.$

Ορισμός (Μετασχηματισμός Fourier μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης)

Για $\underline{\xi} \in \mathbb{R}$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \underline{\xi} \cdot x} dx \leftarrow \text{υπάρχει}$$

$$\hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-i \xi x} dx$$

↑

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

→ Ίδιος ορισμός για $f \in \underline{L^1(\mathbb{R}^d)}$ με $\underline{\xi} \cdot x = \langle \underline{\xi}, x \rangle = \sum_{j=1}^d \xi_j x_j$

$$C(\mathbb{T}), L^p(\mathbb{T}) \subseteq \underline{L^1(\mathbb{T})}$$

Προσοχή: Κανείς χώρος $\underline{L^p(\mathbb{R})}$ δεν περιέχεται σε κανέναν άλλο τέτοιο χώρο.

$$1 \leq p \leq \infty$$

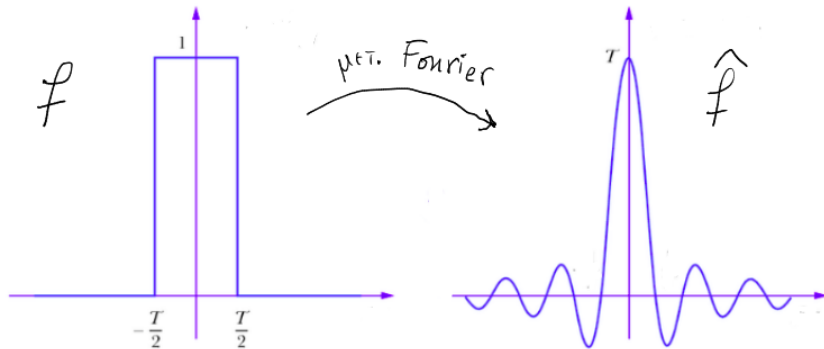
$$L^{p_1}(\mathbb{R}) \not\subseteq L^{p_2}(\mathbb{R})$$

Φανερό φράγμα:

$$\underline{|\hat{f}(\xi)|} \leq \underline{\|f\|_1}$$

$$p_1 \neq p_2$$

Μετασχηματισμός Fourier: για $f \in L^1(\mathbb{R})$



Μετασχηματισμός Fourier: για $f \in L^1(\mathbb{R})$ $\widehat{\chi_{[a,b]}}(\xi) = \int_a^b e^{-2\pi i \xi x} dx$

Παράδειγμα: Αν $[a, b]$ διάστημα τότε

$$\widehat{\chi_{[a,b]}}(\xi) = \frac{i}{2\pi\xi} \left(e^{-2\pi i b \xi} - e^{-2\pi i a \xi} \right) \quad \text{pp.} \leq 2$$

$$= \int_a^b \left(\frac{e^{-2\pi i \xi x}}{-2\pi i \xi} \right)' dx$$

(συνεχής στο 0 και ίση με $b-a$).

και για κλιμακωτές συναρτήσεις, είναι πυκνές στο $L^1(\mathbb{R})$

1) Λήμμα Riemann-Lebesgue και πάλι: $\widehat{f}(\xi) \rightarrow 0$ για $|\xi| \rightarrow \infty$.

2) Επίσης $\widehat{f}$ ^{ομομόρφη} συνεχής συνάρτηση.

$f \in L^1$ $\|g - f\|_1 \leq \varepsilon$, $|\xi| \geq R$: $|\widehat{g}(\xi)| \leq \varepsilon$

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq |\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| + |\widehat{g}(\xi)|$$

$$\leq \|f - g\|_1 + |\widehat{g}(\xi)| \leq \varepsilon + \varepsilon \leq 2\varepsilon \text{ για } |\xi| \geq R$$

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\xi_0)| \leq 3\varepsilon \text{ αρκεί } |\xi - \xi_0| < \delta$$

$$\stackrel{1)}{\leq 2\varepsilon} \quad \stackrel{2)}{\leq \varepsilon}$$

$$|\widehat{f-g}(\xi)| + |\widehat{f-g}(\xi_0)| + |\widehat{g}(\xi) - \widehat{g}(\xi_0)| \leq 3\varepsilon$$

Μετασχηματισμός Fourier: εύκολες ιδιότητες

$$x = y + \tau, dx = dy$$

$$\vee \widehat{f(x - \tau)}(\xi) = \underbrace{e^{-2\pi i \tau \xi}}_{\text{modulation}} \underbrace{\widehat{f}}_{\text{dilation}}(\xi) \quad \widehat{f(x - \tau)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{y}{x - \tau}\right) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i \xi (y + \tau)} dy$$

$$\widehat{e^{2\pi i \tau x} f(x)}(\xi) = \widehat{f}(\xi - \tau)$$

modulation

$$\widehat{f(ax)}(\xi) = \frac{1}{a} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right) \quad (a > 0)$$

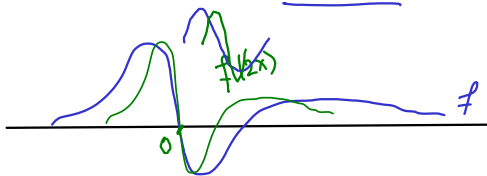
dilation

$$a=2$$

$$\widehat{f(2x)}$$

$$\widehat{f}(\xi)$$

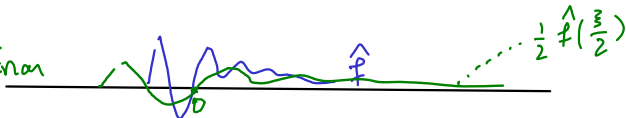
$$\widehat{f(-x)}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$$



$\widehat{f}(\xi) =$ κατά πόσο η συχνότητα ξ συμφωνεί

$$\widetilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$$

$$\widehat{\widehat{f}} = \widetilde{f} \quad \sim, \wedge \text{ μετατίθενται}$$



Μετασχηματισμός Fourier: εύκολες ιδιότητες

$$f' \in L^1(\mathbb{R})$$

$$\rightarrow \widehat{f}(\xi) = \underline{\underline{2\pi i \xi}} \widehat{f}(\xi)$$

$$\widehat{f''}(\xi) = -(2\pi)^2 \xi^2 \widehat{f}(\xi)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{-2\pi i x f(x)} = \widehat{f}(\xi) \text{ όταν } \boxed{xf(x) \in L^1(\mathbb{R})} \end{array} \right.$$

$$\widehat{f'}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-2\pi i \xi x} dx =$$

$$= \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\downarrow 0} e^{-2\pi i \xi x}}_{=0} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \underbrace{2\pi i \xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx}_{\underline{\underline{2\pi i \xi \widehat{f}(\xi)}}}$$

$$f'' + 3f' + f = 0$$

$$\left(-(2\pi)^2 \xi^2 + 3 \cdot 2\pi i \xi + 1 \right) \widehat{f}(\xi) = 0$$

$$\widehat{f} \equiv 0$$

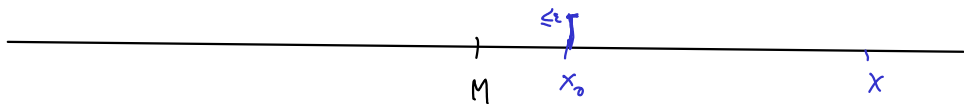
$$f \equiv 0$$

$$f, f' \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$$



$x \rightarrow +\infty$

$$\int_M^{+\infty} |f'| < \varepsilon$$



$$|f(x_0)| \leq \varepsilon$$

$$|f(x)| = \left| f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt \right| \leq \varepsilon + \int_M^{\infty} |f'| \leq 2\varepsilon$$

Μετασχηματισμός Fourier: ο χώρος του Schwartz $\mathcal{S} \subseteq L^1(\mathbb{R})$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ανήκει στο χώρο $\mathcal{S}$ αν

όλες οι παράγωγοί της φθίνουν γρηγορότερα από κάθε δύναμη του x .

- $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ✓

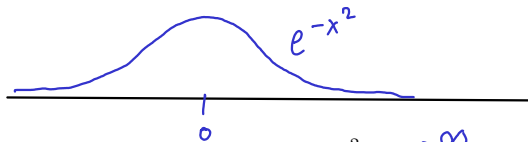
- Για κάθε $k, \ell \geq 0$ ισχύει

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(\ell)}(x)| < \infty.$$

$$|f^{(\ell)}(x)| = O\left(\frac{1}{|x|^k}\right) \quad |x| \rightarrow \infty$$

$\forall \ell \neq k$

Παράδειγμα:



$$f(x) = e^{-x^2} \in C^\infty$$

$$\ell = 1$$

$$f'(x) = -2x e^{-x^2}$$

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-2x^{k+1}) (e^{-x^2}) \rightarrow 0$$

Μετασχηματισμός Fourier: ο χώρος του Schwartz $\mathcal{S}$

$\mathcal{F}$

$$\begin{aligned} Df &= f' \\ Mf &= 2\pi i x f(x) \end{aligned}$$

Θεώρημα

Αν $f \in \mathcal{S}$ τότε $\hat{f} \in \mathcal{S}$.

$$\widehat{f'}(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$$

$$\widehat{-2\pi i x f(x)}(\xi) = (\hat{f})'(\xi)$$

$$\mathcal{F} D f = M \mathcal{F} f$$

$$- \mathcal{F} M f = D \mathcal{F} f$$

$$\mathcal{F} D = M \mathcal{F}$$

$$- \mathcal{F} M = D \mathcal{F}$$

$$\mathcal{F} f \in \mathcal{S}$$

$$\sup_{\xi} |M^k D^l \mathcal{F} f(\xi)| < \infty \quad \checkmark$$

$$\frac{d^k}{dx^k} \left[(2\pi i x)^l f(x) \right]$$

$$|M^k D^l \mathcal{F} f(\xi)| = |\mathcal{F} D^k M^l f(\xi)| \leq \|D^k M^l f\|_1$$

$$D(\alpha \cdot \beta) = D\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot D\beta$$

$$\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_j| \|x^j f^{(j)}\|_1 < \infty$$

$$\forall j, i \quad \|x^j f^{(i)}(x)\|_1 < \infty \checkmark$$

$$f \in \mathcal{S}$$

$$|f^{(i)}(x)| = O\left(\frac{1}{|x|^k}\right), \forall k$$

$$k = j + 10$$

$$|f^{(i)}(x)| \leq \frac{C}{|x|^{j+10}} \quad (|x| \geq c_1)$$

$$|x^j f^{(i)}(x)| \leq \frac{C|x|^j}{|x|^{j+10}} \leq \frac{C}{|x|^{10}} \quad (|x| > c_1)$$

$$\int_{\mathbb{R}} dx \leq C + 2C \int_{c_1}^{\infty} \frac{dx}{x^{10}} < \infty$$

Μετασχηματισμός Fourier: η γκαουσιανή e^{-x^2}

Θεώρημα

Αν $f(x) = e^{-\pi x^2}$ τότε $\hat{f}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$.

Πρώτα αποδεικνύουμε ότι $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1$. $f(x,y) = e^{-\pi(x^2+y^2)} = \underbrace{e^{-\pi x^2}}_{\text{I}} e^{-\pi y^2}$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx dy = \text{I} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} dy = \text{I}^2$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-\pi r^2} dr = -\int_0^{\infty} \frac{(e^{-\pi r^2})'}{2\pi} dr = -e^{-\pi r^2} \Big|_0^{\infty} = 1$$

$$\text{I}^2 = 1 \Rightarrow \text{I} = 1$$

Μετασχηματισμός Fourier: η γκαουσιανή e^{-x^2}

$$f(x) = e^{-\pi x^2}$$

$$f'(x) = -2\pi x f(x)$$

$$\rightarrow f'(x) = -i(-2\pi i x f(x))$$

$$\hat{f}'(\xi) = -i(\hat{f})'(\xi)$$

$$2\pi i \xi \hat{f}(\xi) = -i \frac{d\hat{f}}{d\xi}$$

$$\hat{f}$$

$$\hat{f}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$$

$$-2\pi \xi d\xi = \frac{d\hat{f}}{\hat{f}}$$

$$(-\pi \xi^2)' = (\ln \hat{f})'$$

$$\ln \hat{f} = -\pi \xi^2 + C$$

$$\hat{f}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$$

$$\hat{f}(0) = \int f = 1$$

Μετασχηματισμός Fourier: η γκαουσιανή e^{-x^2}

$$f(x) = e^{-\pi x^2}$$

Αν $K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi \frac{x^2}{\delta}}$ τότε K_δ είναι «καλός πυρήνας».

- 1 $\int_{\mathbb{R}} K_\delta(x) dx = 1$ ✓
- 2 $\int_{\mathbb{R}} |K_\delta(x)| dx \leq M$ ←
- 3 Για κάθε $\eta > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} |K_\delta(x)| &= \frac{1}{\sqrt{\delta}} f\left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta}} \widehat{f}\left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}\right) = \\ &= \widehat{f}(\sqrt{\delta} x) = \\ &= e^{-\pi \delta x^2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \int_{|x| > \eta} |K_\delta(x)| dx \rightarrow 0 \text{ για } \delta \rightarrow 0$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{\delta}}$$

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi \frac{x^2}{\delta}} dx &\xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \\ &\in L^1 \\ &= \int_{\eta/\sqrt{\delta} \rightarrow +\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} dy \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Μετασχηματισμός Fourier: συνέλιξη με καλό πυρήνα

Θεώρημα

Αν $f \in \mathcal{S}$ τότε $f * K_\delta \rightarrow f$ ομοιόμορφα ως προς $x \in \mathbb{R}$.

$\delta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} |f * K_\delta(x) - f(x)| &= \left| \int f(t) K_\delta(x-t) dt - \int f(x) K_\delta(x-t) dt \right| = \\ &\leq \varepsilon \cdot M \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} (f(t) - f(x)) K_\delta(x-t) dt \right| \leq \left| \int_{|x-t| \leq \eta} \dots \right| + \left| \int_{|x-t| > \eta} \dots \right| \leq \varepsilon(M+1) \\ &\leq 2\|f\|_\infty \int_{|x-t| > \eta} |K_\delta(x-t)| dt \leq 2\|f\|_\infty \int_{|y| > \eta} |K_\delta(y)| dy \rightarrow 0 \text{ με } \delta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Μετασχηματισμός Fourier: ο τύπος αντιστροφής

$$\iint |f(x)| \cdot |g(\xi)| dx d\xi = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty$$

Θεώρημα

Αν $f \in \mathcal{S}$ τότε $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δηλ. $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$ για $f \in \mathcal{S}$.

$$\int \hat{f} g = \int \int \overbrace{f(x) e^{-2\pi i \xi x}}^{\hat{f}(\xi)} g(\xi) d\xi$$

Από θ. Fubini: $\int \hat{f} g = \int f \hat{g}$ για $f, g \in \mathcal{S}$.

$$= \int f(x) \int g(\xi) e^{-2\pi i x \xi} d\xi dx = \int f \hat{g}$$

Άρα ισχύει ο τύπος αντιστροφής για $x=0$:

$$\underbrace{f(0)}_{\neq K_{\mathcal{S}}(0)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(x) \underbrace{K_{\delta}(x)}_{\rightarrow 1} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) e^{-\pi \delta x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}.$$

Εφαρμόζουμε αυτό στην $\widehat{F(y)} = f(y+x)$ και παίρνουμε

$$f(x) = F(0) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x}}_{\varphi} d\xi.$$

$$\widehat{\varphi} = \varphi$$

Συμβολίζουμε συνήθως: $\check{\phi}(x) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{2\pi i x t} dt$ για τον αντίστροφο μετ. Fourier.

Μετασχηματισμός Fourier: ο τύπος του Parseval

$$L^2 \not\subset L^1$$
$$\int f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx$$

Θεώρημα

$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$
Για $f, g \in \mathcal{S}$ έχουμε $\int_{\mathbb{R}} f \bar{g} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f} \overline{\hat{g}}$. Επίσης $\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2 = \|\hat{f}\|_2^2$.

Έχουμε $\int \hat{f} \cdot \overline{\hat{g}} = \int \hat{f} \cdot \overline{\hat{g}}$ αφού $\int \phi \psi = \int \hat{\phi} \psi$. Επίσης

$$\widehat{\hat{f}}(x) = f(-x)$$

$$\overline{\hat{g}}(x) = \int \overline{\hat{g}}(y) e^{2\pi i y x} dy = \overline{\int \hat{g}(y) e^{-2\pi i y x} dy} = \overline{\hat{g}(-x)}.$$

Άρα $\int \hat{f} \cdot \overline{\hat{g}} = \int f(-x) \overline{\hat{g}(-x)} = \int f \bar{g}$ και, με $f = g$, παίρνουμε $\|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2$.

Στο $\mathcal{S} \subseteq L^2(\mathbb{R})$ με τη μετρική L^2 ο μετασχηματισμός Fourier είναι ισομετρία.

$$\int f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx$$

Μετασχηματισμός Fourier: ορισμός στο $L^2(\mathbb{R})$

Ο χώρος $\mathcal{S}$ είναι πυκνός σε κάθε χώρο $L^p(\mathbb{R})$ (με $1 \leq p < \infty$)., $C_0(\mathbb{R})$

$\mathcal{S} \supseteq C_0^\infty(\mathbb{R})$ πυκνός $\rightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^\infty, f=0$ έξω από ένα φραγμένο διάστημα.

Ο τελεστής $\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ με $\mathcal{F}f = \hat{f}$ είναι L^2 -ισομετρία $|x^k f^{(l)}(x)|$
 άρα επεκτείνεται μοναδικά στο $L^2(\mathbb{R})$: αν $f \in L^2$ και $f_n \in \mathcal{S}$ με $f_n \xrightarrow{L^2} f$ ορίζουμε

$$\mathcal{F}f = \lim_n \mathcal{F}f_n$$

$f \leftarrow f_n$
 $\quad \quad \leftarrow \varphi_n$

Η ταυτότητα Parseval

$\varphi \in \mathcal{S}$ $\varphi = \mathcal{F}\tilde{\varphi}$ $\tilde{\varphi} \in L^2$

$$\langle f, g \rangle = \int f \bar{g} = \int \hat{f} \cdot \bar{\hat{g}} = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle \text{ και } \|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2$$

$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))$: άρα $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ είναι 1-1 και επί

Μετασχηματισμός Fourier: ορισμός στο $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq 2$

Έχουμε

$$|f| > 1 \implies |f| < |f|^p < |f|^2 \quad \text{ενώ} \quad |f| \leq 1 \implies |f|^2 \leq |f|^p \leq |f|$$

Άρα αν $f = \underbrace{f \cdot \mathbb{1}(|f| > 1)}_{f_1} + \underbrace{f \cdot \mathbb{1}(|f| \leq 1)}_{f_2}$ τότε $f_1 \in L^1, f_2 \in L^2$.

$$\int |f_1| \leq \int |f_1|^p < \infty$$

Ορίζουμε $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$.

Καλώς ορισμένο γιατί οι δύο ορισμοί του $\mathcal{F}$ συμφωνούν στο $L^1 \cap L^2$.

$$\begin{aligned} \hat{f}_1 - \hat{h} + \hat{f}_2 + \hat{h} &= \hat{f}_1 + \hat{f}_2 = \hat{f} \\ \hat{f}_1 - \hat{h} + \hat{f}_2 + \hat{h} &= \hat{f}_1 + \hat{f}_2 = \hat{f} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h &\in L^1 \cap L^2 \\ \hat{h}(\xi) &= \int h(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ \hat{h}(\xi) &= \lim_n \hat{h}_n \end{aligned}$$

$$\underline{f} \in L^1 \cap L^2 \quad \hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \hat{f}'(\xi) = \widehat{f_N}' \xrightarrow{L^2} \hat{f} \quad \text{or} \quad f_N \xrightarrow{L^2} f$$

$$f_N \in \mathcal{S}: \quad f_N \xrightarrow{L^2} f \Rightarrow \hat{f}_N \xrightarrow{L^2} \hat{f} \Rightarrow \|\hat{f}_N - \hat{f}\|_{L^2([a,b])} \rightarrow 0$$

$$\stackrel{u_1}{=} f_N \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad f_N \xrightarrow{L^1} f \Rightarrow \hat{f}_N \xrightarrow{L^\infty} \hat{f} \Rightarrow \|\hat{f}_N - \hat{f}\|_{L^2([a,b])} \rightarrow 0$$

$\begin{array}{c} | \quad | \\ a \quad b \end{array}$

$$\hat{f} = \hat{f} \text{ g.n. } [a,b]$$

$$C_0^\infty(\mathbb{R}) \text{ nur vor } \in \text{ kann } L^p(\mathbb{R}) \quad (p < \infty)$$

$$\varphi_N(x) = f(x) \mathbb{1}(|x| \leq N, |f(x)| \leq N) \Rightarrow \varphi_N \xrightarrow{L^1, L^2} f$$

$$f \xleftarrow{L^1, L^2} \varphi_N$$

$$\| \varphi_N - f \|_i^i = \int |\varphi_N - f|^i dx \leq \int_{[-N,N]^c} |f|^i + \int_{\substack{[-N,N] \\ |f| > N}} |f|^i \xrightarrow{N} 0$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $0 \quad 0$

$$f \xleftarrow{L^1, L^2} \varphi_N$$

$$\psi_N \in \underline{\underline{C_0^\infty}} \quad \|\psi_N - \varphi_N\|_2 \leq \frac{1}{N^{10}} \quad \psi_N \xrightarrow{L^2} f$$

$$\text{supp } \psi_N \subseteq [-N, N]$$

$$\|\psi_N - \varphi_N\|_1 = \int_{[-N, N]} 1 \cdot |\psi_N - \varphi_N| \stackrel{C-S}{\leq} \sqrt{2N} \cdot \|\psi_N - \varphi_N\|_2 \leq \frac{\sqrt{2N}}{N^{10}} \rightarrow 0$$

$$\psi_N \xrightarrow{L^1} f$$

$$\hat{f} = \hat{f}' \quad \text{pa } f \in L^1 \cap L^2$$

Μετασχηματισμός Fourier: ορισμός στο $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq 2$

Θεώρημα (Ανισότητα Hausdorff - Young)

Αν $f \in L^p(\mathbb{R})$, με $1 \leq p \leq 2$, τότε

$$f_n \xrightarrow{L^p} f \Rightarrow \widehat{f_n} \xrightarrow{L^q} \widehat{f}$$

$$\|\widehat{f}\|_q \leq \|f\|_p,$$

με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$



Για $2 < p \leq \infty$ δε μπορούμε να ορίσουμε το μετασχηματισμό Fourier ως συνάρτηση.

Μετασχηματισμός Fourier: Το θεώρημα παρεμβολής Riesz-Thorin

Θεώρημα

Αν $T : L^{p_1}(\mathbb{R}) + L^{p_2}(\mathbb{R}) \rightarrow L^{q_1}(\mathbb{R}) + L^{q_2}(\mathbb{R})$ είναι γραμμικός τελεστής με

$f \mapsto$

$$\|Tf\|_{q_1} \leq A \|f\|_{p_1} \quad \text{και} \quad \|Tf\|_{q_2} \leq B \|f\|_{p_2}$$

$$T : L^{p_1} \rightarrow L^{q_1}$$

$$T : L^{p_2} \rightarrow L^{q_2}$$

και

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$$

και

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_1} + \frac{1-\theta}{q_2}$$

$$\mu\epsilon \ 0 \leq \theta \leq 1$$

τότε

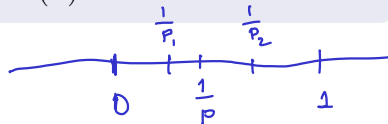
$$T : L^p \rightarrow L^q$$

$$\|Tf\|_q \leq A^\theta B^{1-\theta} \|f\|_p, \quad \text{για } f \in L^p(\mathbb{R}).$$

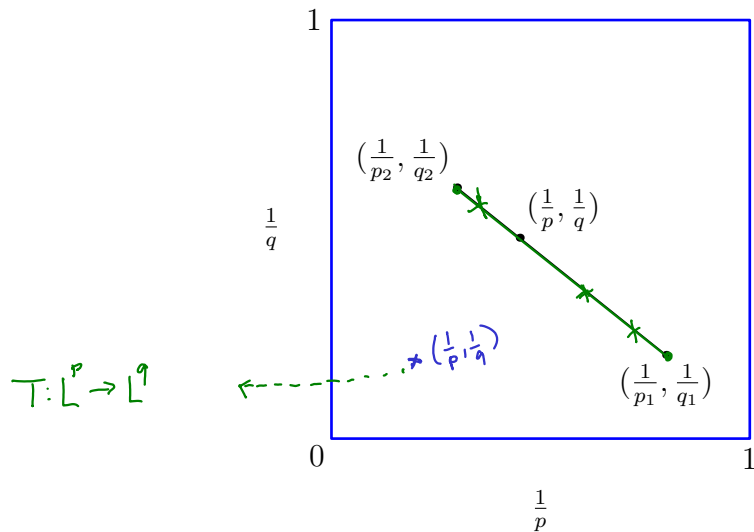
$$L^{p_1} + L^{p_2} = \{f+g : f \in L^{p_1}, g \in L^{p_2}\}$$

$$\frac{1}{p_1}$$

$$\frac{1}{p_2}$$



Μετασχηματισμός Fourier: Το θεώρημα παρεμβολής Riesz-Thorin



Μετασχηματισμός Fourier: Απόδειξη της Hausdorff-Young

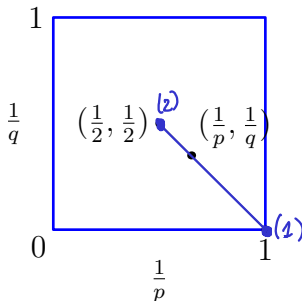
Για το μετασχηματισμό Fourier $\mathcal{F}$ έχουμε:

$$(1) \quad \|\mathcal{F}f\|_{\infty} \leq \|f\|_1 \quad \text{και} \quad \|\mathcal{F}f\|_2 \leq \|f\|_2 \quad \text{για } f \in L^1(\mathbb{R}) + L^2(\mathbb{R})$$

Αν $p \in [1, 2]$ τότε $\frac{1}{p} \in [\frac{1}{2}, 1]$ και $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{1} = 1 - \frac{\theta}{2}$ και από Riesz-Thorin

$$\|\mathcal{F}f\|_q \leq \|f\|_p \quad \text{όπου} \quad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{\infty} = \frac{\theta}{2}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$



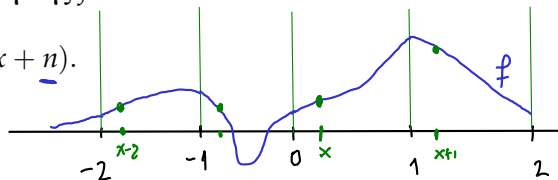
$$1 \leq p \leq 2$$

Μετασχηματισμός Fourier: περιοδικοποίηση μιας συνάρτησης

Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ ορίζουμε την 1-περιοδικοποίηση της f :

$$F(x+1) = \sum_n f(x+1+n) = \sum_k f(x+k) = F(x) \quad F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n).$$

$x \in [0,1]$



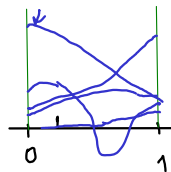
Η σειρά συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^1 |F(x)| dx \leq \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(x+n)| dx = \sum_n \int_0^1 |f(x+n)| dx = \int_{\mathbb{R}} |f| < \infty$$

$< \infty$ 6.7.

και $F \in L^1([0, 1])$ με $\|F\|_{L^1([0,1])} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

$$\sum_n \int_0^1 |f|$$



Η F έχει σειρά Fourier

$$F(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{F}(n) e^{2\pi i n x}$$



Μετασχηματισμός Fourier: περιοδικοποίηση μιας συνάρτησης

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi}$$

$$\begin{aligned}\widehat{F}(k) &= \int_0^1 \widehat{F(x)} e^{-2\pi i k x} dx = \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) e^{-2\pi i k x} dx \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} \underbrace{f(x) e^{-2\pi i k x}}_{x \leftarrow x+n} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i k x} dx = \widehat{f}(k)\end{aligned}$$

$$f \in \mathcal{S} \implies \widehat{F(n)} = \widehat{f(n)} = O(|n|^{-10}) \implies F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f(n)} e^{2\pi i n x}$$

Εφαρμόζουμε για $x=0$: $\widehat{F(0)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f(n)}$, άρα

$$F(0) = \sum f(0+n)$$

6.4.7. Fourier της F

τιμές του περ. F . της f
στους ακέραιους

Τύπος άθροισης του Poisson

$$\text{Για } f \in \mathcal{S}: \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f(n)}$$

