Παραδώστε τις λύσεις μέχρι την 31/3/2020. Δείτε οδηγίες παράδοσης στην ιστοσελίδα του μαθήματος.

1. Στις διαλέξεις για το θεώρημα του Weyl για την ισοκατανομή (αλλά και στις σημειώσεις, και στο βιβλίο των Stein και Shakarchi) το θεώρημα του Weyl αναφέρεται σε συνεχείς συναρτήσεις που έχουν περίοδο 1. Αυτό είναι φυσιολογικό γιατί τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα της μορφής

$$\sum_{k=-N}^{N} p_k e^{2\pi i k x}$$

που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη (αλλά και στην εκφώνηση του θεωρήματος) προσεγγίζουν ομοιόμορφα σύμφωνα (με το θεώρημα του Fejér) μόνο συναρτήσεις που έχουν περίοδο 1.

Όμως αυτός ο περιορισμός δε χρειάζεται. Δείξτε ότι αν για την ακολουθία $a_n \in [0,1)$ ισχύει

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(a_k) \to \int_0^1 f \tag{1}$$

για κάθε συνεχή και 1-περιοδική συνάρτηση f τότε η (1) ισχύει για κάθε συνεχή συνάρτηση, όχι αναγκαστικά περιοδική.

Στην απόδειξη που δώσαμε δείξαμε την (1) για κάθε κλιμακωτή συνάρτηση, όχι αναγκαστικά περιοδική.

2. Αν $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ και $0 < \sigma < 1$ δείξτε ότι η ακολουθία $\{an^\sigma\}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0,1]$. ($\{x\}$ συμβολίζει το κλασματικό μέρος του $x \in \mathbb{R}$.)

Χρησιμοποιήστε το κριτήριο του Weyl. Προσεγγίστε το άθροισμα $\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k\{an^\sigma\}} = \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k a n^\sigma}$ από το ολοκλήρωμα $\int_1^N e^{2\pi i k a x^\sigma}\,dx$ και εκτιμήστε τη διαφορά τους χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής σε κάθε διάστημα της μορφής $[i, i+1]$.

3. Δουλεύοντας όπως στην Άσκηση 2 δείξτε ότι η ακολουθία $\{a \log n\}$ δεν είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη για κανένα $a \in \mathbb{R}$.