Παραδώστε τις λύσεις μέχρι την 7/4/2020. Δείτε οδηγίες παράδοσης στην ιστοσελίδα του μαθήματος.

1. Στη διάλεξη δείξαμε ότι αν η $f \in C(\mathbb{T})$ έχει μη μηδενικούς συντελεστές Fourier μόνο στις δυνάμεις του 3 τότε η $S_N f$ συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $\mathbb{T}$.

Αποδείξτε το ίδιο αν οι συντελεστές Fourier της f είναι μη μηδενικοί μόνο στις θέσεις $\pm n_1, \pm n_2, \pm n_3, \ldots$, με $1 \le n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$, όπου $\frac{n_{k+1}}{n_k} \ge \rho > 1$, για $k \ge 1$.

2. Ορίστε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να είναι 0 στους αρρήτους και στο 0 και να είναι ίση με $1/n$ σε κάθε ρητό της μορφής m/n με $(m, n) = 1$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής ακριβώς στους αρρήτους και στο 0.

3. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα. Δείξτε ότι υπάρχει ένα αριθμήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$, ενδεχομένως κενό, τέτοιο ώστε η f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus E$.