Παραδώστε τις λύσεις μέχρι την 4/5/2020. Δείτε οδηγίες παράδοσης στην ιστοσελίδα του μαθήματος.

1. Έστω X ο χώρος $C^1([a,b])$ συναρτήσεων με συνεχή παράγωγο στο $[a,b]$ (πλευρικές παράγωγοι στα άκρα). Ορίζουμε τη νόρμα

$$\|f\| = |f(a)| + \|f'\|_\infty .$$

Δείξτε ότι είναι νόρμα και ότι ο χώρος X με αυτή τη νόρμα είναι πλήρης χώρος.

Για $x \in [a,b]$ έχουμε $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$.

2. Θεωρήστε το χώρο ακολουθιών $\ell^1(\mathbb{N})$ που αποτελείται από όλες τις μιγαδικές ακολουθίες $x = (x_1, x_2, \ldots)$ που ικανοποιούν

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty.$$

Η νόρμα είναι η $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_j|$. Θεωρήστε τον τελεστή $T : \ell^1(\mathbb{N}) \to \ell^1(\mathbb{N})$ που ορίζεται ως

$$Tx = (x_2, x_3, \ldots).$$

Δείξτε ότι είναι φραγμένος τελεστής και βρείτε τη νόρμα του.

3. Θεωρήστε το χώρο Banach $\ell^2(\mathbb{N})$ που αποτελείται από όλες τις μιγαδικές ακολουθίες $x = (x_1, x_2, \ldots)$ τέτοιες ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$$

Η νόρμα είναι η $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}$.

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ συγκλίνει για κάθε $x \in \ell^2(\mathbb{N})$ (i) δείξτε ότι

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $\ell^2(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$. (ii) Δείξτε επίσης ότι $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ (με άλλα λόγια η ακολουθία $a = (a_1, a_2, \ldots)$ είναι στο $\ell^2(\mathbb{N})$).

Για το πρώτο ερώτημα εφαρμόστε το θεώρημα Banach-Steinhaus στην ακολουθία συναρτησοειδών

$$T_N x = \sum_{n=1}^{N} a_n x_n.$$