Παραδώστε τις λύσεις μέχρι την 31/5/2020. Δείτε οδηγίες παράδοσης στην ιστοσελίδα του μαθήματος.

1. Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ αποδείξτε ότι ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

2. Αν $f \in L^2(\mathbb{R})$ ισχύει το Λήμμα Riemann-Lebesgue;

3. Δείξτε ότι υπάρχει όχι ταυτοτικά μηδενική C^∞ συνάρτηση που να μηδενίζεται έξω από ένα φραγμένο διάστημα.

Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & 0 < x \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

4. Αν $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ και $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$ δείξτε ότι για κάθε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\|f\|_p \le \|f\|_{p_1}^{\theta} \|f\|_{p_2}^{1-\theta}.$$

Χρησιμοποιήστε την ανισότητα Hölder ως εξής

$$\|f\|_p = \left\| |f|^\theta \cdot |f|^{1-\theta} \right\|_p \le \cdots$$