Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων

Φυλλάδιο ασκήσεων Νο 3

---

1. Αν $f_n, f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$, δείξτε ότι $\int_{[0,1]} |f_n - f| \to 0$. Δείξτε ότι δεν ισχύει το ίδιο αν το διάστημα $[0,1]$ παραπάνω αντικατασταθεί με το $\mathbb{R}$.

2. Υποθέστε ότι $0 \le f \in L^1(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι $\int_{\{f>n\}} f \to 0$ για $n \to \infty$. Δείξτε επίσης ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ με $m(E) < \delta$ να ισχύει

$$\int_E f \le \epsilon.$$

3. Υποθέστε ότι $f : [-1,1] \to [0,+\infty]$ και ότι για κάθε $t > 1$ ισχύει

$$m\{f > t\} \le \frac{1}{t^2}.$$

Δείξτε ότι $\int_{\mathbb{R}} f < \infty$.

Ισχύει (αιτιολογήστε το)

$$\int f = \int_{\{f<1\}} f + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{2^n \le f < 2^{n+1}\}} f.$$