1. Αποδείξτε ξανά τη μοναδικότητα των συντελεστών των τριγωνομετρικών πολυωνύμων χωρίς τον πίνακα Vandermonde. Αν $p(x), q(x)$ είναι δύο τριγωνομετρικά πολυώνυμα που ταυτίζονται *σε ολόκληρο το διάστημα* $[0, 2\pi]$ (όχι απλά σε $2N+1$ σημεία, όπου N ο βαθμός των πολυωνύμων) τότε έχουν τους ίδιους συντελεστές.

Αποδείξτε ότι οι συντελεστές ενός τριγωνομετρικού πολυωνύμου δίδονται από τον τύπο

$$p_k = \langle p(x), e^{ikx} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(x) e^{-ikx}\, dx, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2. Έστω $0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_N$ πραγματικοί αριθμοί. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$x \to e^{i\lambda_j x}, \quad j = 1, 2, \ldots, N,$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Πάρτε n-οστή παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j e^{i\lambda_j x}$ για πολύ μεγάλο n. Αν η f είναι ταυτοτικά μηδέν στο $\mathbb{R}$ τότε και η $f^{(n)}$ είναι ταυτοτικά μηδέν. Δείξτε ότι αυτό μπορεί να γίνει μόνο με όλα τα c_j ίσα με 0.

3. Έστω $G \subseteq \mathbb{R}$ προσθετική υποομάδα. Αν η G έχει κάποιο σημείο συσσώρευσης στο $\mathbb{R}$ δείξτε ότι είναι πυκνή στο $\mathbb{R}$, δηλ. ότι μπορείτε να βρείτε στοιχείο της G σε οποιοδήποτε διάστημα.