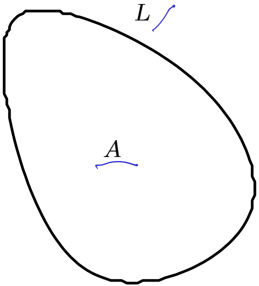
Η ισοπεριμετρική ανισότητα

Ερώτημα:
Για δεδομένο μήκος περιμέτρου ποιο χωρίο έχει το μέγιστο εμβαδό;



Κύκλος περικλείει μέγιστο εμβαδό.

ακτίνα R

$A = \pi R^2, \quad L = 2\pi R$

Ισοπεριμετρική ανισότητα: $A \le \frac{1}{4\pi} L^2$

Η ισοπεριμετρική ανισότητα: παραμέτριση καμπύλης και μήκος

Παραμέτριση καμπύλης:

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, με συνιστώσες $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, με $x(t), y(t)$ κατά τμήματα C^1

συνεχής

$\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t))$

ταχύτητα

Μήκος καμπύλης: $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2}\, dt$

$$\int_0^{2\pi} |\vec{v}(t)|\, dt$$

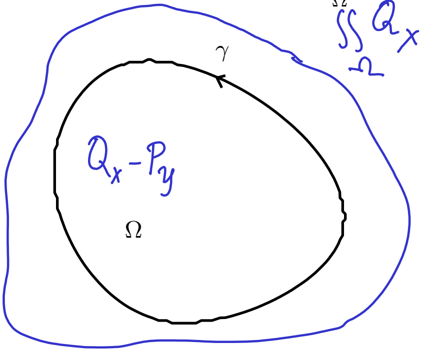
Η ισοπεριμετρική ανισότητα: ο τύπος του Green και το εμβαδό

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$

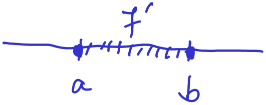
Ο τύπος του Green:
Αν η καμπύλη γ περικλείει το χωρίο Ω και $P(x,y)$, $Q(x,y)$ είναι C^1 συναρτήσεις τότε

$$\iint_\Omega \cancel{P(x,y) - Q(x,y)}\, dxdy = \oint_\gamma Pdx + Qdy. = \int_0^{2\pi} P(\gamma(t))x'(t)\,dt + \int_0^{2\pi} Q(\gamma(t))\,y'(t)\,dt$$

$$\iint_\Omega Q_x(x,y) - P_y(x,y)\,dxdy$$



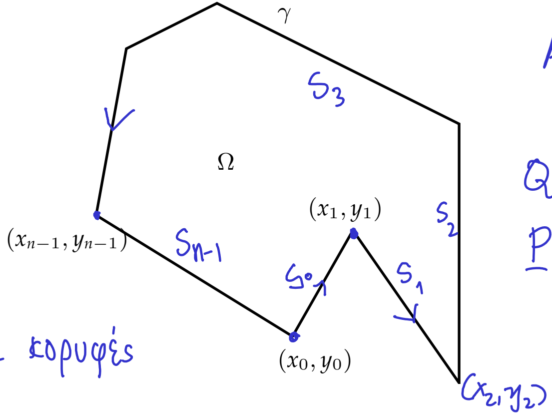
$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$



Εμβαδό πολυγώνου με τον τύπο του Green

Ο τύπος του Green: $\iint_\Omega Q_x(x,y) - P_y(x,y)\,dxdy = \oint_\gamma P dx + Q dy.$

Εμβαδό πολυγώνου με κορυφές τα σημεία $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$;



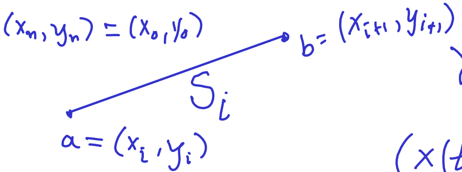
n κορυφές

$$A = \iint_\Omega 1\, dxdy \overset{\text{Green}}{=} -\oint_{\partial\Omega} y\, dx$$

$$Q = 0$$

$$P = -y$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(-\oint_{S_i} y\, dx \right)$$



$$\gamma(t) = \overset{(a_x,\, a_y)}{a} + t(\underbrace{\overset{(b_x,\, b_y)}{b} - a}) \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$(x(t), y(t)) = \Big(\underbrace{a_x + t(b_x - a_x)}_{x(t)},\ \underbrace{a_y + t(b_y - a_y)}_{y(t)}\Big)$$

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} - \oint_{S_i} y\,dx = -\sum_{i=0}^{n-1} \int_0^1 \Big(y_i + t(y_{i+1} - y_i)\Big)(x_{i+1} - x_i)\,dt$$

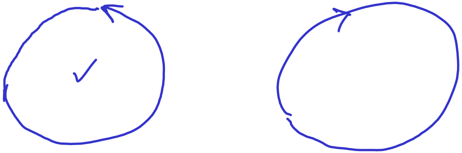
$$= -\sum_{i=0}^{n-1} \int_0^1 y_i(x_{i+1} - x_i) + t(y_{i+1} - y_i)(x_{i+1} - x_i)\,dt$$

$$= -\sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_i)(x_{i+1} - x_i) = -\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\frac{y_i + y_{i+1}}{2}$$

$$= \sum_{0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})(y_i + y_{i+1})/2 \longrightarrow \text{εμβαδό}$$

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{i+1} (x_i - x_{i+1})(y_i + y_{i+1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \cancel{x_i y_i} - x_{i+1} y_i + x_i y_{i+1} - \cancel{x_{i+1} y_{i+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i$$



$$A = \left| \frac{1}{2}\sum_{0}^{n-1} x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i \right|$$

Η ισοπεριμετρική ανισότητα: το εμβαδό

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$$A = \iint 1\, dxdy = -\oint y\, dx = -\underbrace{\int_0^{2\pi} x(t)y'(t)\, dt}$$

$f(t) = x(t) \quad g(t) = y'(t)$

Από την ισομετρία Parseval $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int f(t)\overline{g(t)}\, dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)}$

$\widehat{y'}(n) = in\,\widehat{y}(n)$

$$A = -2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{x}(n) \cdot \overline{\widehat{y'}(n)} = -2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{x}(n) \cdot \overline{i \cdot n \cdot \widehat{y}(n)} = 2\pi i \sum_{n\in\mathbb{Z}} n \cdot \widehat{x}(n) \cdot \overline{\widehat{y}(n)}$$

$$\le 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n| \cdot |\widehat{x}(n)| \cdot |\widehat{y}(n)|.$$

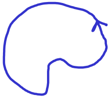
$A \le 2\pi \sum_n |n|\, |\widehat{x}(n)|\, |\widehat{y}(n)|$

Η ισοπεριμετρική ανισότητα: σταθερή ταχύτητα

Κινούμαστε με σταθερή ταχύτητα: $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$.
Μήκος καμπύλης $\boxed{L = 2\pi.}$

$A \le \frac{L^2}{4\pi}$

$\int (x')^2 + (y')^2 = 1$



Ισχύει $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = 2\pi.$

Parseval: $1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{x'}(n)\right|^2 + \left|\widehat{y'}(n)\right|^2$

$\widehat{x'}(n) = in\, \hat{x}(n)$

$\widehat{y'}(n) = in\, \hat{y}(n)$

άρα

$$1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 (|\widehat{x}(n)|^2 + |\widehat{y}(n)|^2)$$

Η ισοπεριμετρική ανισότητα: τέλος απόδειξης

Μεγιστοποιούμε το

$$A \le 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n||\widehat{x}(n)||\widehat{y}(n)|$$

υπό τη συνθήκη

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2(|\widehat{x}(n)|^2 + |\widehat{y}(n)|^2) = 1.$$

Από την ανισότητα $2ab \le a^2 + b^2$ για $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$A \le 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 \boxed{|\widehat{x}(n)||\widehat{y}(n)|} \le \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 \left(|\widehat{x}(n)|^2 + |\widehat{y}(n)|^2\right) = \pi.$$

$$A \le \pi$$

$L = 2\pi \quad L^2 = 4\pi^2 \quad \frac{L^2}{4\pi} = \frac{4\pi^2}{4\pi} = \pi$