Το εσωτερικό γινόμενο

$L^2(\mathbb{T})$ $f:[0,2\pi)$ $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f|^2 < \infty$

Για $f, g \in L^2(\mathbb{T})$: $\langle f, g\rangle := \int f(x)\overline{g(x)}\,dx$

$\int \left| f(x)\overline{g(x)} \right| dx < \infty$

Ορθογωνιότητα: $f \perp g$ σημαίνει $\boxed{\langle f, g\rangle = 0}$

$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n \overline{b_n} \right| \le \left(\sum_1^N |a_n|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_1^N |b_n|^2 \right)^{1/2}$

Ανισότητα Cauchy-Schwarz: $\int |f||g| \le \left(\int |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int |g|^2 \right)^{1/2} < \infty$

$< \infty$ $< \infty$

$a_1, \ldots, a_n$

$\{1, \ldots, n\} \to \mathbb{C}$

Το εσωτερικό γινόμενο: αλγεβρικές ιδιότητες

Διγραμμική μορφή $\langle f, g \rangle = \int f \bar{g}$

✓ $$\langle \lambda f + \mu g, h \rangle = \lambda \langle f, h \rangle + \mu \langle g, h \rangle, \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{C}, f, g, h \in L^2(\mathbb{T}))$$

✓ $$\langle h, \lambda f + \mu g \rangle = \overline{\lambda} \langle h, f \rangle + \overline{\mu} \langle h, g \rangle, \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{C}, f, g, h \in L^2(\mathbb{T}))$$

$$\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle} \qquad (f, g \in L^2(\mathbb{T})).$$

Το εσωτερικό γινόμενο: η L^2 νόρμα

$(\int|f|^2)^{1/2}$

$$\boxed{\|f\|_2^2 = \langle f,f\rangle}$$

$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle}$ $\quad L^p(\mathbb{T})$

$d(f,g) = \|f-g\|$

Τριγωνική ανισότητα:

$\|f+g\|_2 \le \|f\|_2 + \|g\|_2 \Longleftarrow$ συνέπεια της Cauchy-Schwarz.

$\|f+g\|^2 \le \cancel{\|f\|^2} + \cancel{\|g\|^2} + 2\|f\|\cdot\|g\|$

$\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle}$

$\langle f+g, f+g\rangle \le$ —— || ——

$\langle f,f\rangle + \langle g,f\rangle + \langle f,g\rangle + \langle g,g\rangle \le$ —— || ——

Cauchy-Schwarz

$\cancel{\|f\|^2} + 2\,\mathrm{Re}\langle f,g\rangle + \cancel{\|g\|^2}$

$\langle f,g\rangle \le \|f\|\cdot\|g\|$

Το εσωτερικό γινόμενο: συνέχεια

$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$

Αν $\|f_n - f\|_2 \to 0$ και $\|g_n - g\|_2 \to 0$ τότε και

$f_n \xrightarrow{L^2} f$

$g_n \xrightarrow{L^2} g$

$$\langle f_n, g_n \rangle \to \langle f, g \rangle.$$

$\|f_n\| = \|f_n - f + f\|$

$\leq \underbrace{\|f_n - f\|}_{\to 0} + \|f\|$ σταθ. φρ.

$$|\langle f_n, g_n\rangle - \langle f_n, g\rangle + \langle f_n, g\rangle - \langle f, g\rangle|$$

$$\leq |\langle f_n, g_n\rangle - \langle f_n, g\rangle| + |\langle f_n, g\rangle - \langle f, g\rangle|$$

$$= |\langle f_n, g_n - g\rangle| + |\langle f_n - f, g\rangle| \underset{\text{C-S}}{\leq}$$

Πόρισμα: $f_n \xrightarrow{L^2} f \Longrightarrow \|f_n\|_2 \to \|f\|_2$

$$\leq \underbrace{\|f_n\|}_{\text{φρ.}} \cdot \underbrace{\|g_n - g\|}_{\to 0} + \underbrace{\underbrace{\|f_n - f\|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|g\|}_{\text{σταθ}}}_{\to 0}$$

$\|f_n\|^2 = \langle f_n, f_n \rangle$

$\to \langle f, f \rangle = \|f\|^2$

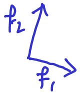
Το εσωτερικό γινόμενο: Ορθογώνια συστήματα

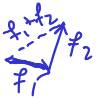
$f_i \in L^2(\mathbb{T})$

$\underbrace{f_1, f_2, \ldots}$ λέγεται **ορθογώνιο σύστημα** αν $f_i \perp f_j$ για $i \neq j$.

$\langle f_i, f_j \rangle = 0, \quad i \neq j$

Ορθοκανονικό αν επιπλέον $\|f_i\|_2 = 1$ για κάθε i.





Πυθαγόρειο θεώρημα

Αν $f_1, \ldots, f_n$ ορθογώνιο σύστημα τότε $\|f_1 + \cdots + f_n\|_2^2 = \|f_1\|_2^2 + \cdots + \|f_n\|_2^2$.

$$\|f_1 + f_2 + \cdots + f_n\|^2 = \langle f_1 + f_2 + \cdots + f_n, \overline{f_1 + \cdots + f_n} \rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \langle f_i, f_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle f_i, f_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2$$

Το εσωτερικό γινόμενο: ανάπτυγμα ως προς ορθοκανονικό σύστημα

ορθογ $\Rightarrow$ γρ. ανεξ. $f_i \neq 0$

$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 \langle f_1, f_1 \rangle + 0 + \cdots + 0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 \|f_1\|^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$

Αν ϕ_n, $n = 1, 2, \ldots, N$, είναι ορθοκανονικό σύστημα και $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ τότε

$$\sum_{n=1}^{N} \langle a_n \varphi_n, b_n \varphi_n \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{N} a_n \phi_n, \sum_{n=1}^{N} b_n \phi_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{N} a_n \overline{b_n}.$$

$\sum a_n \overline{b_n} \|\varphi_n\|^2$

$N = \infty$

Ειδικότερα (ισχύει και για $N = \infty$ λόγω συνέχειας του εσωτ. γινομένου)

$\langle f_n, g_n \rangle \to \langle f, g \rangle$

$\left.\begin{matrix} f_n \to f \\ g_n \to g \end{matrix}\right\}$ στο L^2

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n \phi_n \right\|_2^2 = \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2.$$

$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$

$g = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n$

Επίσης αν $f \in \mathrm{span}\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$ τότε

$f = \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k$ εσ. γιν. φ_k

$$f = \sum_{k=1}^{N} \boxed{\langle f, \phi_k \rangle} \phi_k.$$

$$f = \sum_{1}^{\infty} a_n \varphi_n \xleftarrow{L^2} f_N = \sum_{1}^{N} a_n \varphi_n$$

$$g = \sum_{1}^{\infty} b_n \varphi_n \xleftarrow{L^2} g_N = \sum_{1}^{N} b_n \varphi_n$$

$$\begin{tikzcd}
\langle f_N , g_N \rangle \arrow[d] & = & \sum_{1}^{N} a_n \overline{b_n} \arrow[d] \\
\langle f, g \rangle & = & \sum_{1}^{\infty} a_n \overline{b_n}
\end{tikzcd}$$

$$\left\langle \sum_{1}^{\infty} a_n \varphi_n , \sum_{1}^{\infty} b_n \varphi_n \right\rangle = \sum_{1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$$

Το εσωτερικό γινόμενο: πληρότητα του $L^2(\mathbb{T})$

Cauchy

Αν $f_1, f_2, \ldots \in L^2(\mathbb{T})$ είναι Cauchy $\quad \forall \varepsilon>0\ \exists n_0 : m,n \ge n_0 \Rightarrow \|f_m - f_n\| < \varepsilon$

Θα βρούμε $f \in L^2(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\|f_n - f\|_2 \to 0$.

$k = 1, 2, \ldots$

Αρκεί να βρούμε συγκλίνουσα υπακολουθία της f_n.

$$f_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{L^2} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} f$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_1 : \quad n \ge n_1 \Rightarrow \|f_n - f\| \le \varepsilon$$

Cauchy

$$\exists n_0 : \quad m,n \ge n_0 \Rightarrow \|f_m - f_n\| \le \frac{\varepsilon}{10} \quad ✓ \quad \|f_n - f\| \le \frac{2}{10}\varepsilon \le \varepsilon$$

$$\le \|f_n - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f\|$$

$$\exists k_0 : \quad k \ge k_0 \Rightarrow \|f_{n_k} - f\| \le \frac{\varepsilon}{10} \quad ✓$$

$$\le \frac{\varepsilon}{10} \qquad \le \varepsilon/10$$

$n_0 \quad n_{k_0-1} \quad n_2 \quad n_{k_0} \quad n \quad n_{k_0+1}$

Το εσωτερικό γινόμενο: πληρότητα του $L^2(\mathbb{T})$ (συνέχεια)

Επιλέγουμε $i_1, i_2, \ldots$ τ.ώ.

$$\|f_{i_1} - f_n\|_2 \le \frac{1}{2},\ \text{για } n \ge i_1,$$

$$\|f_{i_2} - f_n\|_2 \le \frac{1}{4},\ \text{για } n \ge i_2,$$

$$\ldots$$

$$\|F_l\| \le \|f_{i_1}\| + \overbrace{\|f_{i_2} - f_{i_1}\|}^{\le 1/2} + \overbrace{\cdots}^{\le 1/4 \cdots} + \|f_{i_l} - f_{i_{l-1}}\| \le$$

Ορίζουμε την αύξουσα ακολουθία

$$0 \le F_l(x) = |f_{i_1}(x)| + |f_{i_2}(x) - f_{i_1}(x)| + \cdots + |f_{i_{l-1}}(x) - f_{i_l}(x)|. + \cdots$$

$$\le \|f_{i_1}\| + 1 < \infty$$

Ισχύει $\|F_l\|_2 \le C$, άρα $F_l(x) \nearrow F(x) \in L^2(\mathbb{T})$. Άρα

$$f_{i_k}(x) = f_{i_1}(x) + (f_{i_2}(x) - f_{i_1}(x)) + (f_{i_3}(x) - f_{i_2}(x)) + \cdots + (f_{i_k}(x) - f_{i_{k-1}}(x))$$

συγκλίνει αφού συγκλίνει απόλυτα.

$f_{i_k}(x) \to f(x)$ σύγκλιση κατά σημείο σ.π.

Το εσωτερικό γινόμενο: πληρότητα του $L^2(\mathbb{T})$ (συνέχεια)

Ορίζουμε $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{i_k}(x)$ (κατά σημείο όριο). σ.π.

Αλλά

$$|f_{i_k}(x)| \le |f_{i_1}(x)| + |f_{i_2}(x) - f_{i_1}(x)| + \cdots + \left|f_{i_k}(x) - f_{i_{k-1}}(x)\right| \le F(x).$$

$$|f_{i_k}(x)|^2 \le F^2(x)$$

Από Θεώρ. Κυριαρχημένης Σύγκλισης:

$$\int |f|^2 = \lim_{k\to\infty} \int |f_{i_k}|^2 \le \int F^2 \text{ άρα } f \in L^2(\mathbb{T}).$$

L^p

$1 \le p < \infty$

Επίσης $|f_{i_k}(x) - f(x)| \le |f_{i_k}(x)| + |f(x)| \le 2F(x)$ άρα από ΘΚΣ και πάλι

$$\int |f_{i_k}(x) - f(x)|^2 \to 0.$$

0

$f_{i_k} \xrightarrow{L^2} f$

Το εσωτερικό γινόμενο: ορθοκανονικά συστήματα (ΟΚΣ)

Οι συναρτήσεις

$$e_n(x) = e^{inx}, \text{ για } n \in \mathbb{Z},$$

αποτελούν ΟΚΣ στον $L^2(\mathbb{T})$.

$m \neq n$

$\langle e_m, e_n \rangle = \int e_m(x) \overline{e_n(x)}\, dx$

$= \int e^{i(m-n)x} dx$

$= \int \left(\frac{e^{i(m-n)x}}{i(m-n)} \right)' dx = 0$

$\| e_n \| = 1$

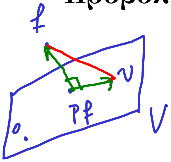
$\int |e_n|^2 = 1$

$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 = 1$

Το εσωτερικό γινόμενο: προβολή και βέλτιστη προσέγγιση

$\{\phi_k\}_{k=1}^N$ ΟΚΣ και $V = \mathrm{span}\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$ ο γραμμικός χώρος που παράγουν.
Προβολή του $f \in L^2(\mathbb{T})$ στο V είναι το

$$v = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k$$



$$Pf = \sum_{k=1}^N \langle f, \phi_k \rangle \phi_k \in V.$$

$$\langle f, v\rangle = \langle f, \sum_1^N a_k \varphi_k \rangle = \sum_1^N \overline{a_k} \langle f, \varphi_k \rangle$$

$$0 = \langle f - Pf, v \rangle$$

Ισχύει: αν $v \in V$ τότε $\langle f, v \rangle = \langle Pf, v \rangle$. Άρα

$$\forall v \in V : (f - Pf) \perp v - Pf$$

$$\langle Pf, v \rangle = \langle \sum_1^N \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k, \sum_1^N a_k \varphi_k \rangle = \sum_{k=1}^N \langle f, \varphi_k \rangle \overline{a_k}$$

και, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα,

$$\rightarrow \quad \|f - v\|_2^2 = \|f - Pf\|_2^2 + \|Pf - v\|_2^2,$$

άρα $\|f - Pf\|_2 < \|f - v\|_2$, $\forall v \in V \setminus \{Pf\}$.

Pf είναι το εγγύτερο σημείο στο f από το V.

Το εσωτερικό γινόμενο: η ανισότητα Bessel

$\{\phi_k\}_{k=1}^N$ ΟΚΣ και $V = \mathrm{span}\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$ ο γραμμικός χώρος που παράγουν.

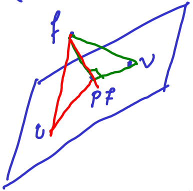
$$Pf = \sum_{k=1}^N \langle f, \phi_k \rangle \phi_k \in V.$$

Pf = πλησιέστερο στοιχείο του V στο f

$f \in V \Longleftrightarrow \boxed{Pf = f}$

Δείξαμε $\forall v \in V : \|f - v\|_2^2 = \|f - Pf\|_2^2 + \|Pf - v\|_2^2.$

Για $v = 0$ παίρνουμε $\|f\|_2^2 = \|\overbrace{f - Pf}^{V^\perp}\|_2^2 + \|\overbrace{Pf}^{V}\|_2^2$, άρα $\boxed{\|Pf\|_2^2 \le \|f\|_2^2}$.



Ανισότητα Bessel:

$\forall$ ΟΚΣ $\varphi_1 \cdots \varphi_N$

$\forall f \in L^2$

$$\left\| \sum_{k=1}^N \langle f, \phi_k \rangle \phi_k \right\|_2^2 = \boxed{\sum_{k=1}^N |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \le \|f\|_2^2.} \quad (1)$$

$\to \varphi_1, \ldots, \varphi_N$, $\|\varphi_j\| = 1$

Αν (1) ισχύει $\forall f$

$\Longrightarrow \varphi_1, \ldots, \varphi_N$ ορθογ.

$f = \varphi_1$ $\quad \langle \varphi_j, \varphi_1 \rangle = 0, \ j \neq 1$

Το εσωτερικό γινόμενο: σύγκλιση άπειρης σειράς

$\phi_n \in L^2(\mathbb{T})$ ΟΚΣ και $\sum_n |a_n|^2 < \infty \Longrightarrow$

$n = 1, 2, \ldots$

υπάρχει $f \in L^2(\mathbb{T})$ τ.ώ. $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n$ (σύγκλιση της σειράς στη νόρμα L^2).

Επίσης $\forall n$: $a_n = \langle f, \phi_n \rangle$.

$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n$ δείξουμε S_N Cauchy

$M \geq N$

$$\|S_M - S_N\|_2^2 = \left\| \sum_{n=N+1}^{M} a_n \varphi_n \right\|_2^2 = \sum_{N+1}^{M} |a_n|^2 \leq \sum_{N+1}^{\infty} |a_n|^2 \xrightarrow[N]{} 0 \quad \text{Cauchy}$$

$$\langle f, \varphi_n \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k , \varphi_n \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle a_k \varphi_k , \varphi_n \rangle = \langle a_n \varphi_n , \varphi_n \rangle = a_n$$

Το εσωτερικό γινόμενο: προβολή σε απειροδιάστατο χώρο

$\sum |a_n|^2 < \infty \Rightarrow \sum a_n \varphi_n$ συγ.

$\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ΟΚΣ και $f \in L^2(\mathbb{T})$.
Ορίζουμε και πάλι την **προβολή** της f να είναι η

$\sum_{n=1}^{N} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 \le \|f\|^2$

$$Pf = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k$$ (συγκλίνει από την αν. Bessel $\|Pf\|_2^2 \le \|f\|_2^2$)

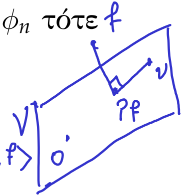
$\sum_{1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 < \infty$

Αν v είναι όριο πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών των ϕ_n τότε

$P_N f = \sum_{k=1}^{N} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$

$$f - Pf \perp \overset{v_N}{v} - Pf.$$

$= \lim P_N f$ $\quad = \langle f - P_N f, v_N - P_N f \rangle = 0$



Και πάλι προκύπτει ότι

$$\|f - Pf\|_2 \le \|f - v\|_2$$ (ιδιότητα βέλτιστης προσέγγισης).

V = όρια των πεπ. γρ. συνδυασμών των $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$

Το εσωτερικό γινόμενο: πλήρη ΟΚΣ

ΟΚΣ $\{\phi_n\} \subseteq L^2(\mathbb{T})$ **πλήρες** σημαίνει

$$\boxed{(\forall n:\ f \perp \phi_n)} \Longrightarrow f = 0.$$

Ισοδύναμα: οι γραμμικοί συνδυασμοί $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} c_k \phi_{n_k}$ πυκνοί στο $L^2(\mathbb{T})$.

$\Longleftarrow$ Αν οι $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} c_k \phi_{n_k}$ πυκνοί τότε υπάρχει γρ. συν. $\sum_{k=1}^{N} c_k \phi_{n_k}$ με

$\epsilon \le \frac{1}{2}\|f\|^2$

$$\|f\|^2 + \sum_{1}^{N} \|c_k \phi_{n_k}\|^2 = \left\| f - \sum_{k=1}^{N} c_k \phi_{n_k} \right\|_2^2 < \epsilon, \quad \Longrightarrow \quad \|f\|^2 < \epsilon$$

άρα, υποθέτοντας $f \perp \phi_n$ για κάθε n, έχουμε από το Πυθ. Θεώρημα $\|f\|_2^2 \le \epsilon$.

Το εσωτερικό γινόμενο: πλήρη ΟΚΣ (συνέχεια)

$\Longrightarrow$

$Pf = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$

Ας είναι $\{\phi_k\}$ ένα πλήρες ΟΚΣ.

$\langle f, \varphi_k \rangle = \langle Pf, \varphi_k \rangle$

Παρατηρούμε ότι $\langle f - Pf, \phi_k \rangle = 0$ για κάθε k. Πληρότητα $\Longrightarrow \boxed{f = Pf.}$

$f = Pf$

Άρα

$P_N f$

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k \right\|_2 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k - \sum_{k=1}^{N} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k \right\|_2 \to 0.$$

και η f προσεγγίζεται από γραμμικούς συνδυασμούς των ϕ_k.

$P_N f \xrightarrow{L^2} f$

Το εσωτερικό γινόμενο: ταυτότητα του Parseval

$Pf = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$

Αν $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ΟΚΣ τότε

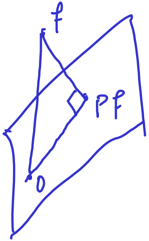
$$\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ πλήρες } \iff \forall f \in L^2(\mathbb{T}) : \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 = \|f\|_2^2$$

$\le$

$\Longrightarrow$ Αν $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ πλήρες τότε $f = Pf$, και $\|Pf\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \phi_n \rangle|^2$

$f - Pf \perp \varphi_n$

$\Longleftarrow$ Η υπόθεσή μας είναι ότι $\|f\|_2^2 = \|Pf\|_2^2$.
Αλλά πάντα ισχύει $f - Pf \perp \phi_n$ για όλα τα n, άρα $f - Pf \perp Pf$ και



$$\|f\|_2^2 = \|Pf\|_2^2 + \|f - Pf\|_2^2$$

που δίνει

$$\|f - Pf\|_2^2 = 0,$$

άρα $f = Pf$ και $f \in \overline{\text{span}\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}}$.

Το εσωτερικό γινόμενο: το πλήρες ΟΚΣ e^{inx}, $n \in \mathbb{Z}$

Οι συναρτήσεις $e_n(x) = e^{inx}$, για $n \in \mathbb{Z}$, αποτελούν ΟΚΣ.

πλήρες

Αν $f \in L^2(\mathbb{T})$ και $f \perp e_n$ για όλα τα n τότε

$$\langle f, e_n \rangle = \fint f(x) e^{-inx}\, dx = \widehat{f}(n) = 0,$$

και από το θεώρημα μοναδικότητας $f \equiv 0$.

Άρα $e_n(x) = e^{inx}$, για $n \in \mathbb{Z}$, αποτελούν **πλήρες** ΟΚΣ.

Το εσωτερικό γινόμενο: ανάλυση Fourier στον L^2

Συνέπειες της πληρότητας των e^{inx}: $\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle$ ✓

1. Αν $f \in L^2(\mathbb{T})$ τότε $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx}$ (σύγκλιση σειράς στον L^2)
2. Επίσης $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right|^2$ (ταυτότητα Parseval)
3. Αν $a_n \in \mathbb{C}$ ικανοποιεί $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ τότε η σειρά
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$$
συγκλίνει (στη νόρμα L^2) σε μια συνάρτηση $f \in L^2(\mathbb{T})$ και μάλιστα $\boxed{\widehat{f}(n) = a_n.}$
4. Αν $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ τότε $\langle f, g \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)}$

Το εσωτερικό γινόμενο: ο χώρος $\ell^2(\mathbb{Z})$

Ο χώρος $\ell^2(\mathbb{Z})$ αποτελείται από όλες τις ακολουθίες $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, τ.ώ.

$L^2(\mathbb{T})$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Σε αυτόν ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο $\langle a_n, b_n \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n}$ και νόρμα

$$\|a_n\| = \sqrt{\langle a_n, a_n \rangle} = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2}.$$

$\|f\|_{L^2} = \int |f|^2$

Ο χώρος $\ell^2(\mathbb{Z})$ είναι επίσης πλήρης χώρος.

Η αντιστρέψιμη γραμμική απεικόνιση $\boxed{L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})}$: $f \to \left\{\widehat{f}(n)\right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο και τη νόρμα (ισομετρία).

Parseval $\langle f, g \rangle = \sum_n \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}$

Το εσωτερικό γινόμενο: εφαρμογή

Να υπολογιστεί το $\int_0^{2\pi} (\sin x + \cos x)^2 \, dx$.

$$\int_0^{2\pi} |\sin x + \cos x|^2 dx = \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} + \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \right|^2 dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \Bigg| \underbrace{\frac{1-i}{2} e^{ix} + \frac{1+i}{2} e^{-ix}}_{f(x)} \Bigg|^2 dx = 2\pi \|f\|_2^2 = 2\pi \Bigg(\underbrace{\left|\frac{1-i}{2}\right|^2}_{1/2} + \underbrace{\left|\frac{1+i}{2}\right|^2}_{1/2} \Bigg)$$

$$= 2\pi$$

Το εσωτερικό γινόμενο: εφαρμογή

Αν $f \in C^1(\mathbb{T})$ και $\boxed{\int f = 0}$ τότε $\quad \hat{f}(0) = 0$

δε μπορεί να παραλειφθεί ($f \equiv 1$, $f' = 0$)

$$\int |f|^2 \le \int |f'|^2. \iff \|f\|_2^2 \le \|f'\|_2^2$$

$$\iff \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f'}(n)|^2$$

$$\iff \sum_{n \ne 0} |\hat{f}(n)|^2 \le \sum_{n \ne 0} |n|^2 |\hat{f}(n)|^2$$

$$\widehat{f'}(n) = \int f'(x) e^{-inx} dx$$

$$= \cancel{\frac{1}{2\pi} f(x) e^{-inx} \Big|_0^{2\pi}} - \int f(x)(-in) e^{-inx} dx$$

=0 λόγω περιοδικότητας

$$= i n \hat{f}(n)$$

$$\boxed{\widehat{f'}(n) = i n \hat{f}(n)}$$

$n \ne 0$ $\quad |\hat{f}(n)|^2 \le |n|^2 |\hat{f}(n)|^2$

≥ 1