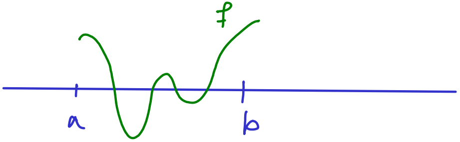
Το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass



κλειστό διάστημα

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists$ πολυώνυμο $\cdots\to$ βαθμού n

$$\underline{\underline{p(x)}} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

τ.ω. $\quad \forall x \in [a,b] : \quad |p(x) - \underline{\underline{f(x)}}| \leq \varepsilon$

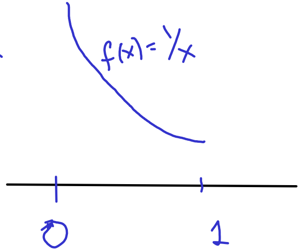
$$\|p - f\|_\infty \leq \varepsilon$$

$\forall f \in C([a,b]) : \quad \exists\, p_n$ πολυώνυμα : $\quad p_n \to f$ ομοιόμ.

$$\|p_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\varepsilon = 1/n$

• <u>κλειστό</u>



$$|f(x) - p(x)| < \epsilon$$

αδύνατο

$$x \to 0^+$$

• <u>φραγμένο</u> διάστημα :

$[1, \infty)$ . . . .

$$f_1(x) = e^x$$

$$|p(x) - e^x| \to \infty$$

$$e^x \left| \frac{p(x)}{e^x} - 1 \right| \to \infty, \quad \frac{p(x)}{e^x} \to 0$$

$$f_2(x) = \sin x$$

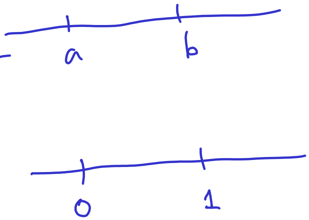
$$|p(x) - \sin x| < 1/2 \; \ldots$$

$$p(x) = c_0$$

$|c_0 - \sin x| \geq 1$ για κάποιο x

Απόδειξη του Bernstein για το Θ. προσέγγισης Weierstrass

Αρχικά το διάστημα [0,1]



$f:[a,b]\to\mathbb{R}$

$f(x+a)$ $\quad [0,\ b-a]$

$f((b-a)x+a)$ $\quad [0,1]$

$$g(x)=f((b-a)x+a)$$

$$g:[0,1]\to\mathbb{R}$$

$$y=(b-a)x+a$$

$$y-a=(b-a)x$$

$$\frac{y-a}{b-a}=x$$

$$\|g-p\|_\infty\le\varepsilon \iff \left|f(\underbrace{(b-a)x+a}_{y})-p(x)\right|\le\varepsilon,\quad \forall x\in[0,1]$$

$$\left|f(y)-\boxed{p\left(\frac{y-a}{b-a}\right)}\right|\le\varepsilon,\quad \forall y\in[a,b]$$

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$, συνεχής

Πολυώνυμα Bernstein: $B_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

Θα δείξουμε $\|B_n(f)-f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$

<u>Τυχαία μεταβλητή διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $\overset{[0,1]}{x}$, $\overset{n\geq 1}{n}$</u>:

Πόσες κορώνες φέρνουμε σε n ρίψεις ενός νομίσματος με πιθανότητα κορώνας x.

$$B_{x,n} = \overset{0 \text{ ή } 1}{I_1} + I_2 + \dots + I_n$$

δείκτριες

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{αν στην } k \text{ ρίψη} \to \text{κορώνα} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$B_{x,n} = \underbrace{I_1 + \dots + I_n}_{\text{ανεξάρτητες}} \qquad \mathbb{E} I_1 = x\cdot 1 + (1-x)\cdot 0 = x$$

$$\mathbb{E} B_{x,n} = \mathbb{E} I_1 + \mathbb{E} I_2 + \dots + \mathbb{E} I_n = n\,\mathbb{E} I_1 = n\cdot x$$

$$\sigma^2(B_{x,n}) = \mathrm{Var}(B_{x,n}) = \sigma^2(I_1) + \dots + \sigma^2(I_n) = n\,\sigma^2(I_1) = n\,x(1-x)$$

$$0 \le B_{x,n} \le n \qquad \sigma^2(I_1) = \mathbb{E}(I_1^2) - (\mathbb{E} I_1)^2 = \mathbb{E} I_1 - (\mathbb{E} I_1)^2 = x(1-x)$$

$$\mathbb{E} f\left(\frac{B_{x,n}}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{P}(B_{x,n} = k) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= B_n(f)(x)$$

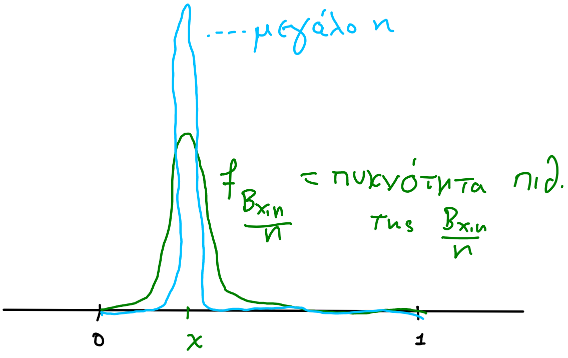
$$\mathbb{P}(B_{x,n} = k) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$(B_n f)(x) = \mathbb{E} f\left(\frac{B_{x,n}}{n}\right)$$

$$(B_n f)(x) = \mathbb{E}\, f\left(\frac{B_{x,n}}{n}\right)$$

"$\dfrac{B_{x,n}}{n} = x$" ιδανικό

$$\mathbb{E}\,\frac{B_{x,n}}{n} = x$$



"$\dfrac{B_{x,n}}{n} = \mathbb{E}\,\dfrac{B_{x,n}}{n}$" ← υπάρχει συγκέντρωση της πυκνότητας της $\frac{B_{x,n}}{n}$ γύρω από το x

Ανισότητα Chebyshev

$$X = \frac{B_{x,n}}{n}$$

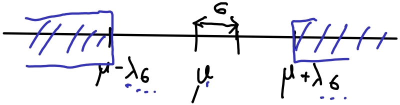
Αν $X \in \mathbb{Z}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή με

$$\mathbf{E}\left[|X|^2\right] < \infty,$$

και αν $\mu = \mathbf{E}[X]$ και $\sigma = \sqrt{\mathbf{Var}[X]}$ τότε

$$\longrightarrow \quad \mathbf{Pr}\left[|X-\mu| \geq \lambda\sigma\right] \leq \frac{1}{\lambda^2},$$

για κάθε $\lambda > 0$.



$$X = \frac{B_{x,n}}{n}$$

$$\mu = \mathbb{E}\, X = x$$

$$\sigma^2 = \sigma^2\left(\frac{B_{x,n}}{n}\right), \quad \sigma = \frac{\sqrt{x(1-x)}}{n^{1/2}} \leq \frac{1}{n^{1/2}} \longrightarrow 0$$

$$\sigma^2\left(\frac{1}{n} B_{x,n}\right) = \frac{1}{n^2}\sigma^2(B_{x,n}) = \frac{1}{n^2} n\, x(1-x) = \frac{x(1-x)}{n}$$

Ενδεχόμενο: $E_n = \left\{ \left| \frac{B_{x,n}}{n} - x \right| \geq \frac{1}{n^{1/3}} \right\}$

$$\frac{1}{n^{1/3}} = n^{1/6} \frac{1}{n^{1/2}} \geq n^{1/6}\, \underbrace{\sigma\left(\frac{B_{x,n}}{n}\right)}_{= \frac{\sqrt{x(1-x)}}{n^{1/2}}}$$

$$E_n \Longrightarrow \left| \frac{B_{x,n}}{n} - x \right| \geq \underbrace{n^{1/6}}_{\lambda}\, \sigma\left(\frac{B_{x,n}}{n}\right)$$

$$\mathbb{P}(E_n) \leq \mathbb{P}\Big(\text{———} \;\;||\;\; \text{———} \Big) \overset{\text{Chebyshev}}{\leq} \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{n^{1/3}}$$

$$\mathbb{P}(E_n) \leq \frac{1}{n^{1/3}}$$

$$\left|f(x) - \mathbb{E}f\left(\frac{B_{x,n}}{n}\right)\right| = \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\mathbf{Pr}\left[B_{x,n} = k\right]\right|$$

$\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n} f(x)\mathbf{Pr}\left[B_{x,n} = k\right] - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbf{Pr}\left[B_{x,n} = k\right]\right| \quad (\text{αφού} \sum_{k} \mathbf{Pr}\left[B_{x,n} = k\right] = 1)$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n}(f(x) - f(k/n))\mathbf{Pr}\left[B_{x,n} = k\right]\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \overbrace{|f(x) - f(k/n)|}^{\leq 2\|f\|_\infty} \cdot \mathbf{Pr}\left[B_{x,n} = k\right] \text{ (τριγωνική ανισότητα)} = \sum_{\substack{k=0 \\ |x-k/n|<n^{-1/3}}}^{n} + \sum_{\substack{k=0 \\ |x-k/n|\geq n^{-1/3}}}^{n} = I + II \leq 2\epsilon$$

$$II \leq 2\|f\|_\infty \sum_{\substack{k=0 \\ |x-\frac{k}{n}| \geq \frac{1}{n^{1/3}}}}^{n} \mathbb{P}(B_{x,n} = k)$$

$$= \mathbb{P}\left(\left|\frac{B_{x,n}}{n} - x\right| \geq \frac{1}{n^{1/3}}\right)$$

$$\leq 1/n^{1/3} \longrightarrow 0$$

Παίρνουμε n μεγάλο ώστε

$$|s-t| \leq \frac{1}{n^{1/3}} \Longrightarrow |f(s) - f(t)| \leq \epsilon \quad (\text{ομοιόμορφη συνέχεια})$$

$$\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \varepsilon \Longrightarrow I \leq \varepsilon \sum \Pr \leq \varepsilon$$