Συντελεστές και σειρά Fourier μιας $f \in L^1(\mathbb{T})$

$\mathbb{T} = [0, 2\pi]$

$⨍ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi}$

$\widehat{f}(n) = ⨍ f(x) e^{inx} dx$

Συντελεστές Fourier: $\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$ για $n \in \mathbb{Z}$

Σειρά Fourier: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx}$

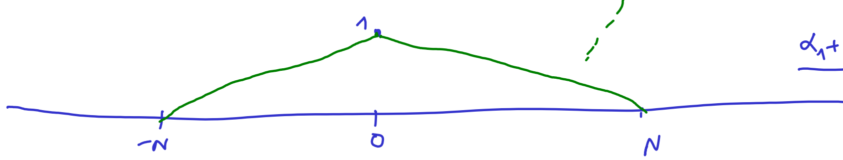
Μερικά Αθροίσματα της Σ. Fourier: $(S_N f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e^{ikx}$ → τριγ. πολυώνυμα

Μέσοι όροι μερικών αθροισμάτων:

$(\sigma_N f)(x) = \frac{1}{N+1}(S_0 f(x) + S_1 f(x) + \cdots + S_N f(x)) = \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \widehat{f}(k) e^{ikx}$

Σύγκλιση των $S_N f \implies$ σύγκλιση των $\sigma_N f$ αλλά όχι αντίστροφα.

$$a_n \to a$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \to a$$



Πυρήνες Dirichlet και Fejér

Ως συνελίξεις:

$$S_N f(x) = D_N * f(x) \quad \text{και} \quad \sigma_n f(x) = K_N * f(x)$$

με

$$D_N \cancel{f}(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} (\text{πυρήνας Dirichlet τάξης } N),$$

και

$$K_N \cancel{f}(x) = \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) e^{ikx} = \underbrace{\frac{1}{N+1} \frac{\sin^2\frac{(N+1)x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}}_{\geq 0} (\text{πυρήνας Fejér τάξης } N).$$

Αθροισιμότητα σειράς Fourier

Θεώρημα (Fejér)

(α) Αν $f \in C(\mathbb{T})$ *(συνεχής, 2π-περιοδική) τότε*

$$\sigma_N(f) \to f,$$

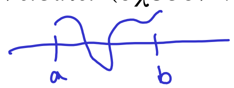
→ τριγ. πολ.

ομοιόμορφα. L^∞

(β) Αν $1 \le p < \infty$ *και* $f \in L^p(\mathbb{T})$ *τότε* $\|\sigma_N(f) - f\|_p \to 0$.

Πόρισμα (Μοναδικότητα)

Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ *τότε η* f *καθορίζεται μοναδικά (σχεδόν παντού) από τους συντελεστές Fourier της.*



[0, 2π]
f(0) = f(2π)

Πόρισμα

Θ. Weierstrass

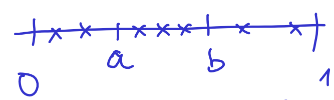
Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στο $C(\mathbb{T})$ *στην ομοιόμορφη* (L^∞) *μετρική.*

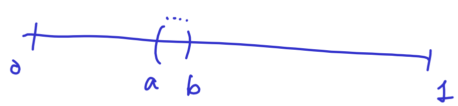
Ομοιόμορφη κατανομή ακολουθίας στο $[0,1]$.

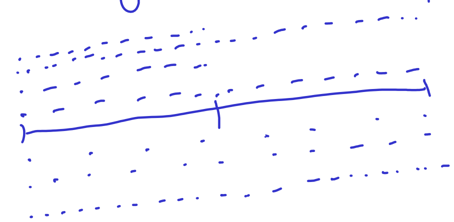
Η ακολουθία $a_n \in [0,1]$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη αν

$$\forall [a,b] \subseteq [0,1] : \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \left|\left\{1 \le i \le n : \quad a_i \in [a,b]\right\}\right| = b - a.$$

Ομοιόμορφα κατανεμημένη $\Longrightarrow$ *πυκνή* in $[0,1]$.







Ομοιόμορφη κατανομή ακολουθίας στο $[0, 1]$.

Παράδειγμα: Η ακολουθία

$$\underbrace{0, \frac{1}{2}}_{2}, \overbrace{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}}^{3}, \overbrace{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}}^{4}, \overbrace{0, \frac{1}{5}, \dots}^{5}$$

είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη.

0 a b 1

$$(*) \quad \frac{|\{1 \le i \le n : a_i \in [a,b]\}|}{n} \to b-a$$

αρκεί η περίπτωση $a=0$.

$$n = 2+3+4+5+\dots+k$$

$$a_1, \dots, a_n$$

$$0, \frac{1}{2}, \dots, 0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}$$

$$\frac{i}{\ell} \le b \iff i \le b\cdot\ell \iff i \le \lfloor b\ell \rfloor = b\ell - \varepsilon_\ell \quad (\varepsilon_\ell = 0, b\ell - \lfloor b\ell \rfloor \le 1)$$

$$\lfloor b 2 \rfloor + \lfloor b\cdot 3 \rfloor + \dots + \lfloor b\cdot k \rfloor = 2\cdot b + 3\cdot b + \dots + k\cdot b - (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_k) = \left(\frac{k(k+1)}{2} - 1\right)b - \overset{\text{το πολύ}}{k}$$

Το πλήθος των $a_1, \dots, a_n$ στο $[0,b]$, για $n = 2+3+\dots+k$, είναι

$$\frac{1}{n}\left[\underbrace{\left(\frac{k(k+1)}{2} - 1\right)}_{n} \cdot b - \underbrace{\left(\varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_k\right)}_{\text{το πολύ } k}\right] = b - \frac{\varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_k}{n}$$

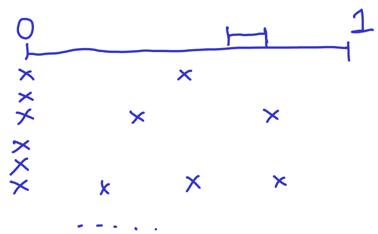
$$\to b \ \checkmark$$

Ομοιόμορφη κατανομή ακολουθίας στο $[0,1]$.

Παράδειγμα: Η ακολουθία

$$0, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{5}, \ldots$$

ΔΕΝ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη (αλλά είναι πυκνή στο $[0,1]$).



$[0, 0.1]$

ποσοστό $\sim 1/2$

Ομοιόμορφη κατανομή και ολοκληρώματα

$0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \frac{3}{N}, \dots$

Θεώρημα

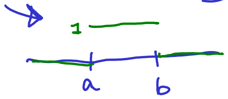
Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ *συνεχής και* $a_n\in[0,1]$ *ομοιόμορφα κατανεμημένη. Τότε*

$$(*)\quad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(a_i) \to \int_0^1 f(x)\,dx \quad as\ N\to\infty.$$

$\sum_{i=1}^{N} \chi_{[a,b]}(a_i) =$ = πόσοι από τους $a_1, \dots, a_N$ είναι στο $[a,b]$

- Αν ισχύει για f και g τότε και για γραμμικούς συνδυασμούς $\lambda f+\mu g$.

Ομοιόμορφη κατανομή $\implies$ ισχύει για $f=\chi_{[a,b]}$.



$b-a = \int_0^1 \chi_{[a,b]}$

Άρα ισχύει για όλες τις κλιμακωτές συναρτήσεις (κατά τμήματα σταθερές).

Ομοιόμορφη κατανομή και ολοκληρώματα

$\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(a_i) - \int_0^1 f\right| =$

Αν ισχύει για f_n και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$ τότε ισχύει για f.

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,\ \forall x \in [0,1]$

$\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_n(a_i) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(a_i)\right| \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \underbrace{|f_n(a_i) - f(a_i)|}_{\leq \varepsilon} \leq \varepsilon$

$f_n \to f$ ομ. $\Rightarrow \int_0^1 f_n \to \int_0^1 f$

$= \left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(a_i) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_n(a_i)\right.$ I

$+ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_n(a_i) - \int_0^1 f_n$ II

III $\left. + \int_0^1 f_n - \int_0^1 f\right| \leq$

$\leq \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} \leq \varepsilon + \underset{\leq \varepsilon}{\mathrm{II}} + \varepsilon \leq 3\varepsilon$

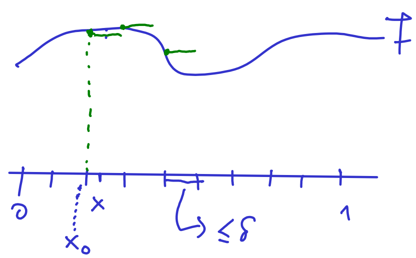
Οι κλιμακωτές συναρτήσεις προσεγγίζουν ομοιόμορφα κάθε συνεχή συνάρτηση στο $[0,1]$.

ομοιόμορφη αν συνεχής στο $[0,1]$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta : |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Έστω f συνεχής στο $[0,1]$ και $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχει κλιμακωτή συνάρτηση g με $|f(x)-g(x)|\leq \varepsilon$, $\forall x\in[0,1]$.

$\exists \delta>0$: $\quad \underline{|x-y|\leq\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|\leq\varepsilon.}$



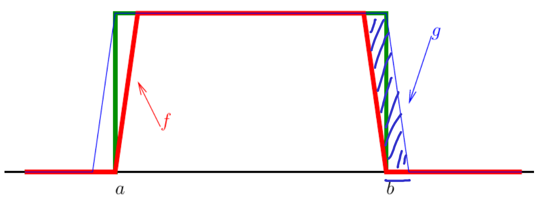
$g(x)$ έχει την τιμή της f στο αριστερό άκρο του διαστήμ. όπου ανήκει το x.

$$|f(x)-g(x)| = |f(x)-g(x_0)| = |f(x)-f(x_0)+f(x_0)-g(x_0)| \leq$$

$$\leq |f(x)-f(x_0)| + |\underbrace{f(x_0)-g(x_0)}_{=0}| \qquad |x-x_0|\leq\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|\leq\varepsilon.$$

Ομοιόμορφη κατανομή και ολοκληρώματα

Συνεχείς συναρτήσεις προσεγγίζουν τη χαρακτηριστική συνάρτηση διαστήματος (όχι ομοιόμορφα)



$$0 \le f \le \chi_{[a,b]} \le g$$

$$\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} f(a_i) \le \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} \chi_{[a,b]}(a_i)}_{y_N} \le \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} g(a_i)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\int f \qquad\qquad\qquad\qquad \int g$$

$\limsup y_N \le \int g$

$\liminf y_N \ge \int f$

$\le \varepsilon$

Αυτό δίνει την αντίστροφη κατεύθυνση:

Θεώρημα

Η a_n είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη **αν και μόνο αν** *για κάθε συνεχή $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ ισχύει*

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(a_i) \to \int_0^1 f(x)\,dx \quad as \ N \to \infty.$$

Ελέγχοντας την ομοιόμορφη κατανομή

Θεώρημα του Fejér $\Longrightarrow$ Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα $p(x) = \sum_{k=-N}^{N} p_k e^{2\pi i k x}$ προσεγγίζουν ομοιόμορφα κάθε συνεχή f.

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(a_i) \to \int_0^1 f(x)\,dx \quad as\ N \to \infty \qquad (*)$$

Γραμμικότητα: Αρκεί να το ελέγξουμε για κάθε εκθετικό $e^{2\pi i k x}$, για όλα τα $k \in \mathbb{Z}$.

$k=0 \qquad e^{2\pi i k x} = 1 \qquad$ η $(*)$ ok

$$k \neq 0 \qquad \int_0^1 e^{2\pi i k x}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{e^{2\pi i k x}}{2\pi i k}\right)' dx = \frac{1}{2\pi i k}\left(e^{2\pi i k \cdot 1} - e^{2\pi i k \cdot 0}\right) = 0$$

Ελέγχοντας την ομοιόμορφη κατανομή: θεώρημα του Weyl

Θεώρημα (Weyl)

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1. $a_n \in [0,1]$ *είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη*
2. $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(a_i) \to \int_0^1 f(x)\,dx$ *για κάθε* $f \in C([0,1])$.
3. $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e^{2\pi i k a_i} \to 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Ομοιόμορφη κατανομή της $\{na\}$

$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \quad 0 \le \{x\} < 1$

Σταθεροποιούμε $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ας είναι $a_n = \{na\}$ (όπου $\{x\}$ είναι το *κλασματικό μέρος* του $x \in \mathbb{R}$).

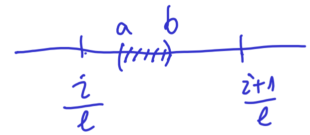
$a = \sqrt{2}$ $\quad \{\sqrt{2}\}, \{2\sqrt{2}\}, \{3\sqrt{2}\}, \ldots$

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1} = \frac{1 - x^k}{1 - x}, \quad x \neq 1$$

$\{na\}$ είναι πυκνή

$a \in \mathbb{Q} \implies a_n$ δεν είναι ομοιόμορφη κατανεμημένη (εύκολο).

$a = \frac{k}{\ell} \qquad na = \frac{nk}{\ell} \implies \{na\} = \frac{k'}{\ell}$



Θεώρημα Weyl $\implies$ όταν $a \in \mathbb{Q}^c$ η a_n είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη.

$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e^{2\pi i k a_i} \to 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$N \to \infty \qquad |\cdot| \le 2 \qquad \to 0$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{2\pi i k (ja - \lfloor ja \rfloor)} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} (e^{2\pi i k a})^j = e^{2\pi i k a}\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} (e^{2\pi i k a})^j = \frac{e^{2\pi i k a}}{N}\,\frac{1 - e^{2\pi i k a N}}{1 - e^{2\pi i k a}}$$