ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ – ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ – ΤΟΜΕΑΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΛΕΩΦ. ΚΝΩΣΟΥ, 714 09 ΗΡΑΚΛΕΙΟ. ΤΗΛ: +30 2810393801, FAX +30 2810393881

ΜΙΧΑΛΗΣ ΚΟΛΟΥΝΤΖΑΚΗΣ, Αναπληρωτής Καθηγητής

Φθινοπωρινό Εξάμηνο 2005-06

Θεωρία Μέτρου

Δεύτερο Διαγώνισμα

1. (α) Διατυπώστε το Θ. Banach-Steinhaus.
(β) Περιγράψτε πώς αυτό χρησιμοποιείται για να δείξουμε ότι υπάρχουν $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοιες ώστε η σειρά Fourier τους στο 0 δε συγκλίνει. Μπορείτε να υποθέσετε ως γνωστό ότι η L^1 νόρμα του πυρήνα του Dirichlet τάξης n πάει στο ∞ με το n.

2. (α) Δείξτε ότι ο χώρος c_0 (πραγματικές ακολουθίες $a_n, n = 1, 2, \ldots$ που συκλίνουν στο 0 όταν $n \to \infty$, εφοδιασμένες με την $\|\cdot\|_\infty$ νόρμα) είναι διαχωρίσιμος.
(β) Δείξτε ότι ο χώρος $L^\infty([0,1])$ με το μέτρο Lebesgue δεν είναι διαχωρίσιμος.
(*Υπόδειξη:* Ίσως σας είναι ευκολότερο να το δείξετε για τον ℓ^∞ πρώτα. Μπορείτε να υποθέσετε ως γνωστό ότι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ δεν είναι αριθμήσιμο.)

3. Έστω S γραμμικός υπόχωρος του $L^2([0,1])$ (με το μέτρο Lebesgue) με την ιδιότητα ότι υπάρχει πεπερασμένη θετική σταθερά K τέτοια ώστε για κάθε $f \in S$ να ισχύει $\|f\|_\infty \le K\|f\|_2$. Δείξτε ότι η διάσταση του S είναι το πολύ K^2.
(*Υπόδειξη:* Αν η διάσταση είναι $\ge n$ τότε υπάρχουν $f_1, \ldots, f_n \in S$ που αποτελούν ορθοκανονικό σύστημα. Δείξτε κατ' αρχήν ότι για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε $\sum_{i=1}^n |f_i(x)|^2 \le K^2$.)

4. Έστω μ Borel μέτρο στον $\mathbb{T}$. Ορίζουμε τους συντελεστές Fourier του

$$\widehat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{T}} e^{-int} d\mu(t), \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Αν $\lim_{n\to+\infty} \widehat{\mu}(n) = 0$ δείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} \widehat{\mu}(-n) = 0$, ακολουθώντας τα εξής βήματα.
(α) Δείξτε το πρώτα για πραγματικά μέτρα μ.
(β) Αν f τριγωνομετρικό πολυώνυμο και ισχύει η υπόθεση τότε ισχύει και για το μέτρο $f\,d\mu$.
(γ) Αν $f \in C(\mathbb{T})$ και ισχύει η υπόθεση τότε ισχύει και για το μέτρο $f\,d\mu$.
(δ) Αν f φραγμένη και Borel μετρήσιμη και ισχύει η υπόθεση τότε ισχύει και για το μέτρο $f\,d\mu$.
(*Υπόδειξη:* Θ. Lusin.)
(ε) Χρησιμοποιείστε το Θ. Radon-Nikodym για να δείξετε ότι αν η υπόθεση ισχύει για ένα μέτρο τότε ισχύει και για οποιοδήποτε άλλο μέτρο που είναι απολύτως συνεχές ως προς αυτό. Εφαρμόστε αυτό για τα μέτρα μ και $\|\mu\|$ που είναι *αμοιβαία* απολύτως συνεχή και επικαλεστείτε το (α) για να τελειώσετε την απόδειξη.