Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων – Τομεας Αναλυσης
Λεωφ. Κνωσου, 714 09 Ηρακλειο. Τηλ: +30 2810393801, Fax +30 2810393881

Μιχαλης Κολουντζακης, Αναπληρωτής Καθηγητής

Φθινοπωρινό Εξάμηνο 2005-06

Θεωρία Μέτρου – Τρίτο Διαγώνισμα

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

4 Φεβρουαρίου 2006

1. Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ τότε ορίζουμε $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x}\, dx$. Δείξτε ότι $\lim_{|\xi| \to \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$. (*Υπόδειξη:* Δείξτε το πρώτα όταν f χαρακτηριστική συνάρτηση διαστήματος.) Δείξτε επίσης ότι η συνάρτηση $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

2. (α) Αν $f \in L^1(\mathbb{R}), g \in L^\infty(\mathbb{R})$ δείξτε ότι $f * g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(β) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ έχουν θετικό μέτρο Lebesgue δείξτε ότι το σύνολο $A + B = \{a + b : \ a \in A, b \in B\}$ περιέχει κάποιο διάστημα.
(γ) Δείξτε ότι υπάρχουν $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ με $f * g$ να μην είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

3. Έστω ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι απολύτως συνεχής και $f' \in L^p(\mathbb{R})$, για $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Τότε ισχύει

$$|f(y) - f(x)| \le C |x - y|^{1/q}, \quad \text{όπου } C \text{ σταθερά που εξαρτάται από την } f \text{ μόνο.}$$

Ποιο είναι το σωστό συμπέρασμα αν $p = 1$;

4. Δείξτε ότι η τριγωνική ανισότητα

$$\left(\int_X |f(x) + g(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} \le \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} + \left(\int_X |g(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}$$

δεν ισχύει για $0 < p < 1$. Ισχύει όμως γι' αυτά τα p η ανισότητα

$$\int_X |f(x) + g(x)|^p \, d\mu(x) \le \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \ + \int_X |g(x)|^p \, d\mu(x).$$

5. Έστω f_n, f, g_n, g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε ένα χώρο μέτρου με $f_n \to f$ και $g_n \to g$ σχεδόν παντού. Έστω ακόμη ότι $|f_n| \le g_n$ και ότι $\int g_n \to \int g$. Δείξτε ότι $\int f_n \to \int f$. Επίσης ότι $\int |f_n - f| \to 0$. Μπορείτε να υποθέσετε ότι οι συναρτήσεις f_n είναι πραγματικές. (*Υπόδειξη:* Πρόκειται για παραλλαγή του Θ. Κυριαρχημένης Σύγκλισης με παρόμοια απόδειξη. Αρκεί το Λ. Fatou.)