

ΟΛΟΗΜΕΡΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2012 - 7ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ

Άσκηση 1. Γράψτε το παρακάτω όριο με τη μορφή ολοκληρώματος.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}.$$

Άσκηση 2. Αποδείξτε ότι

(1) $\int_k^{k+1} (x - [x] - \frac{1}{2}) dx = 0$ για κάθε ακέραιο k .

(2) $\int_k^{k+\frac{1}{2}} (x - [x] - \frac{1}{2}) dx = -\frac{1}{8}$ για κάθε ακέραιο k .

Άσκηση 3. Αποδείξτε ότι

(1) $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$

(2) Η ακολουθία (x_n) με $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα με κάτω φράγμα το 0. Τι συμπεραίνετε ως προς τη σύγκλιση της ακολουθίας;

(Υπόδ. Χρησιμοποιήστε την ανισότητα στο (α) για να αποδείξετε το (β)).

Άσκηση 4. Να βρεθούν όλα τα σημεία τού άξονα x που ισαπέχουν από τις ευθείες $12x - 5y + 3 = 0$ και $5x - 12y + 17 = 0$.

Άσκηση 5. Να βρεθεί διάνυσμα μήκους 2 \vec{w} κάθετο στο επίπεδο των $\vec{u} = (1, 1, 1)$ και $\vec{v} = (1, 0, 2)$.

Άσκηση 6. Βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία που περνάει από τα σημεία $A(-1, 2, -1)$ και $B(1, -1, 0)$ τέμνει τα επίπεδα συντεταγμένων.