Η αρμονική σειρά: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ και η σταθερά του Euler

23/11/12, Μιχ. Κολουντζάκης

Έστω $x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$. Θα δείξουμε ότι $x_n \downarrow \gamma$, όπου γ μια θετική σταθερά (σταθερά του Euler).

1 x_n φθίνουσα: Δείχνουμε $x_n - x_{n+1} \geq 0$

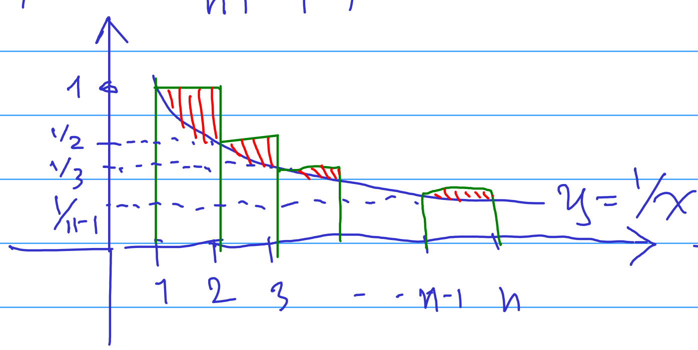
$$
\begin{aligned}
x_n - x_{n+1} &= 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\log(n+1)\right)\\
&= \log\frac{n+1}{n} - \frac{1}{n+1} = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = \int_1^{1+1/n}\frac{dx}{x} - \frac{1}{n+1}\\
&\geq \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} = 0
\end{aligned}
$$

Επειδή $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ στο ολοκλήρωσης διάστημα

2 $x_n \geq 0$: Ισχύει κάτι ακόμη ισχυρότερο:

Ορίζουμε $x_n - \frac{1}{n} = S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\log n$ και δείχνουμε ≥ 0 (ακόμη και χωρίς το $\frac{1}{n}$)

Έχουμε $S_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1} - \int_1^n \frac{dx}{x}$ και παρατηρούμε ότι τα αθροίσματα στο S_n μπορούμε κι αυτά να τα δούμε σαν εμβαδά:



Το ύψος του ορθογωνίου πάνω από το διάστημα $[k, k+1]$ είναι η τιμή της $1/x$ στο αριστερό άκρο, δηλ. $1/k$. Τόσο είναι και το εμβαδό του ορθογωνίου αυτού.

Πράγματι το εμβαδό των πράσινων ορθογωνίων είναι ακριβώς οι αριθμοί $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n-1$. Παρατηρείστε επίσης ότι, συνολικά, το εμβαδό των ορθογωνίων αυτών είναι $\geq$ από το εμβαδό κάτω από την καμπύλη $y=\frac{1}{x}$. Αυτό οφείλεται στο ότι η $\frac{1}{x}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση. Άρα ισχύει η ζητούμενη ανισότητα.

Αφού λοιπόν $x_n \geq 0$ και $x_n \downarrow$ έπεται ότι υπάρχει το όριο

$$\gamma = \lim_n x_n \geq 0.$$

Η σταθερά γ ονομάζεται σταθερά του Euler και η τιμή της είναι περίπου 0.5772156649. Μπορούμε να δούμε την ακολουθία S_n ως το εμβαδό ανάμεσα στην καμπύλη $y = 1/x$ και κάτω από τις άνω πλευρές των πράσινων ορθογωνίων παραλλήλων που είναι σκιασμένο με κόκκινο. Είναι φανερό ότι η ακολουθία S_n είναι αύξουσα (αφού όταν αυξηθεί το n κατά 1 προστίθεται στο S_n ένα ακόμη σκιασμένο κομμάτι πάνω από το διάστημα $[n, n+1]$). Ισχύει συνεπώς

$$x_n \geq \gamma \geq S_n \quad \forall n$$

με τη x_n να συγκλίνει στο γ φθίνοντας και την S_n να συγκλίνει στο γ αυξάνοντας. Αφού

$$S_n = x_n - \frac{1}{n}$$

για να βρούμε μια προσέγγιση του γ με ακρίβεια π.χ. ενός χιλιοστού δεν έχουμε παρά να πάρουμε το S_{1000} ή το x_{1000} τα οποία μπορούμε να τα υπολογίσουμε εύκολα με υπολογιστή. Ισχύει λοιπόν

$$|x_n - \gamma|, \ |S_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}.$$