Η ανισότητα ~~του~~ απόκλισης του Markov

υποθέτουμε υπάρχει

$X:\Omega\to\mathbb{R}$ τ.υ. $\underline{X\geq 0}$ πάντα, $\underline{\lambda}>0$.

Τότε $\mathbb{P}(X\geq\lambda\mu)\leq\frac{1}{\lambda}$ (όπου $\mu=\mathbb{E}X$)

άχρηστη για $\lambda\leq 1$

$\boxed{\Omega: \text{αριθμήσιμο}}$

$$\mathbb{E}X=\sum_{k\in\mathbb{Z}}k\,\mathbb{P}(X=k)=\boxed{\sum X(\omega)\,p(\omega)}$$

$E_j=\{\omega_j\}$ $\quad$ $\omega\in\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\dots\}$

E_1, E_2, E_3, x_1, x_2, x_3

$$\mathbb{E}X=\sum_{j=1}^{\infty}x_j\cdot\mathbb{P}(E_j)$$

Ω: $X<\lambda\mu$, $X\geq\lambda\mu$

$$\boxed{\mathbb{P}(X\geq\alpha)\leq\frac{\mu}{\alpha}}$$

$\alpha=\lambda\mu\Rightarrow\lambda=\alpha/\mu$

$$\mathbb{E}X=\sum_{X(\omega)\geq\lambda\mu}X(\omega)p(\omega)+\cancel{\sum_{X(\omega)<\lambda\mu}X(\omega)p(\omega)}\geq\sum_{X(\omega)\geq\lambda\mu}X(\omega)p(\omega)\geq\sum_{X(\omega)\geq\lambda\mu}\lambda\mu\,p(\omega)$$

$$=\lambda\mu\sum_{X(\omega)\geq\lambda\mu}p(\omega)=\lambda\mu\,\mathbb{P}(X\geq\lambda\mu)\Longrightarrow\frac{1}{\lambda}\geq\mathbb{P}(X\geq\lambda\mu)$$

Andrei Markov (1856-1922)

Εφαρμογή ανισότητας Markov

$X =$ το ύψος του τυχαίου Έλληνα

Βλέμμα αφ υψηλού

Σχεδόν τρία εκατοστά ψήλωσαν οι Έλληνες τα τελευταία 20 χρόνια

Δημοσίευση: 19 Noε. 2004 22:15

Το μέσο ύψος της νέας γενιάς στην Ελλάδα έχει αυξηθεί στο 1,78 για τους άνδρες και στο 1,66 για τις γυναίκες. Αυτό σημαίνει ότι οι σημερινοί εικοσάρηδες είναι τρία εκατοστά ψηλότεροι από τους σαραντάρηδες και τέσσερα εκατοστά ψηλότεροι από τους πενηντάρηδες, ενώ οι εικοσάχρονες σήμερα είναι δύο εκατοστά ψηλότερες από τις σαραντάχρονες και τρία εκατοστά ψηλότερες σε σχέση με τις πενηντάχρονες.

μ

Το πολύ ποια είναι η πιθανότητα το ύψος κάποιου άνδρα να είναι 1,90 και πάνω;

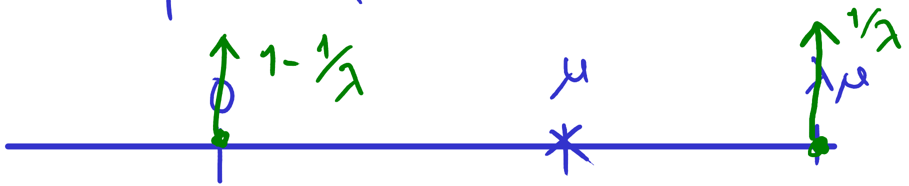
$$\mathbb{P}(X \geq 1.90) = \mathbb{P}\Big(X \geq \underbrace{\tfrac{1.90}{1.78}}_{\lambda} \cdot \underbrace{1.78}_{\mu}\Big) \leq \frac{1.78}{1.90} = 0{,}936\ldots$$

Άσθενής

Γιατί δε βελτιώνεται η ανισότητα του Markov;

$\mathbb{P}(X \geq \lambda\mu) \leq \frac{1}{\lambda}$ (⊛) $\boxed{X \geq 0,\ \mu = \mathbb{E}X,\ \lambda > \cancel{0}\,1}$

Βρίσκουμε παράδ. X και η (⊛) ισχύει ως ισότητα.



$\mathbb{P}(X = \lambda\mu) = \frac{1}{\lambda}$

$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \frac{1}{\lambda}$

$$\mathbb{E}X = 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) + \lambda\mu\,\frac{1}{\lambda} = \mu$$

$\mathbb{P}(X \geq \lambda\mu) = \mathbb{P}(X = \lambda\mu) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow$ η (⊛) ισχύει ως ισότητα