Γενικευμένη ανισότητα Markov

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mu}{\lambda}$$

$\underline{X \geq 0} \quad \mu = \mathbb{E}X$

$\mathbb{P}(X \geq 2\mu) \leq \frac{1}{2}$

$\mathbb{E}(X^2) = \tilde{\mu}^2$

$\mathbb{P}(X \geq 2\tilde{\mu}) = \mathbb{P}(X^2 \geq 4\tilde{\mu}^2) \leq \frac{1}{4}$

$g : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, $g \uparrow$ (αύξουσα, γνήσια)

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) = \mathbb{P}(\underline{g(X)} \geq g(\lambda)) = \mathbb{P}\left(g(X) \geq \frac{g(\lambda)}{\mathbb{E}g(X)} \mathbb{E}g(X)\right)$$

$$\overset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}g(X)}{g(\lambda)}$$

- $\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \dfrac{\mathbb{E}g(X)}{g(\lambda)}$ (γενικευμένη)
- $\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \dfrac{\mathbb{E}X}{\lambda}$ (συνηθισμένη)

Παράδειγμα χρήσης γενικευμένης Markov

$X \geq 0$, $g(x) = e^{x} \uparrow$

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{X}]}{e^{\lambda}}$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}X}{\lambda}$$

$\lambda \to +\infty$

$$\frac{1}{\lambda}$$

$\frac{1}{e^{\lambda}}$ πάει πιο γρήγορα στο 0

Η ανισότητα του Chebyshev

X τ.μ. με $\mathbb{E}(X^2) < \infty$

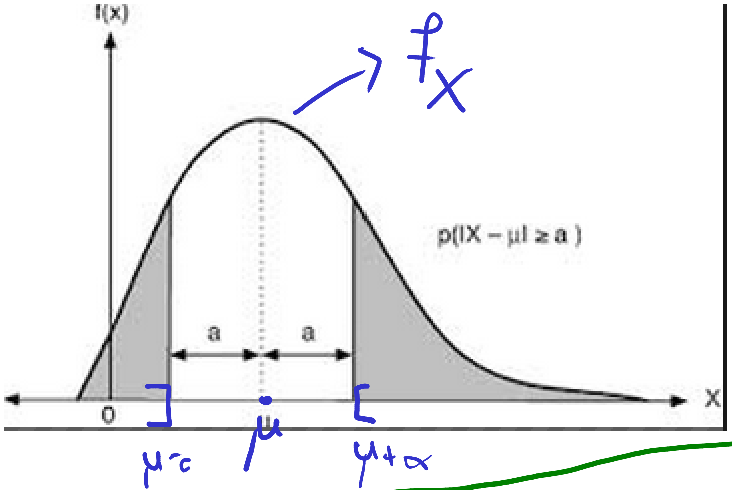
$\Rightarrow \mathbb{E}X$ υπάρχει $= \mu$

$\Rightarrow \sigma^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$

$\lambda > 0$

$$\boxed{\mathbb{P}(|X-\mu| \geq \lambda\sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2}}$$

$$\mathbb{P}\big(\underbrace{(X-\mu)^2}_{Y} \geq \underbrace{\lambda^2\sigma^2}_{\mathbb{E}Y}\big) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$



$$\boxed{\mathbb{P}(|X-\mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}}$$

$$= \mathbb{P}\left(|X-\mu| \geq \frac{a}{\sigma}\sigma\right)$$

$$\leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

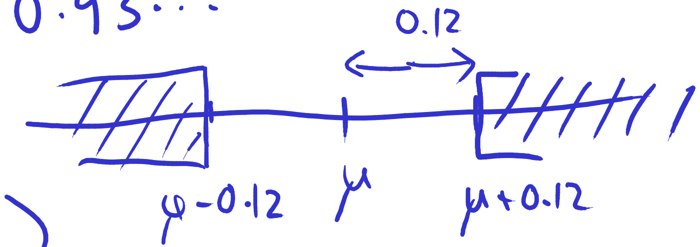
Αν $\sigma \geq a$ άχρηστη

Εφαρμογή της ανισότητας Chebyshev

X = ύψος του τυχαίου Έλληνα

$\mathbb{E}X = \underset{\text{"}\mu\text{"}}{1.78} \xrightarrow{\text{Markov}} \mathbb{P}(X \geq 1.90) \leq 0.93\ldots$

Υποθέτουμε $\boxed{\sigma(X) = 0.05}$



$$\mathbb{P}(X \geq 1.90) = \mathbb{P}(X-\mu \geq 0.12)$$

$$\leq \mathbb{P}(0.12 \leq X-\mu \text{ ή } \mu - X \geq 0.12)$$

$$= \mathbb{P}(|X-\mu| \geq 0.12) = \mathbb{P}\Big(|X-\mu| \geq \overbrace{\frac{0.12}{0.05}}^{\lambda}\,\overbrace{0.05}^{\sigma}\Big)$$

$$\leq \frac{1}{\lambda^2} = \left(\frac{0.05}{0.12}\right)^2 = 0.1736\ldots$$