Ανισότητα Cauchy-Schwarz

$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$: $\boxed{\left(\mathbb{E}(XY)\right)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(Y^2)}$.

Ισότητα ισχύει αν και μόνο αν (α) $Y \equiv 0$ ή
(β) $X = \alpha Y$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

Cauchy-Schwarz στο $\mathbb{R}^n$:

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$

$$\boxed{\vec{x} \cdot \vec{y} \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}$$

$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

ομοίως του $\vec{y}$

$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

εσωτερικό γινόμενο

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \mathbb{E}\left[(X + \lambda Y)^2\right] = \mathbb{E}\left[Y^2 \lambda^2 + 2XY\lambda + X^2\right] = \mathbb{E}(Y^2)\lambda^2 + 2\,\mathbb{E}(XY)\lambda + \mathbb{E}(X^2)$$

Τριώνυμο ως προς λ

$$\Rightarrow \Delta = 4\left(\mathbb{E}(XY)\right)^2 - 4\,\mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(Y^2) \leq 0 \Rightarrow \text{C-S}.$$

Ισότητα στην C-S $\Rightarrow$ $\Delta = 0$ $\Rightarrow$ $\exists \lambda : \mathbb{E}\left[\underbrace{(X + \lambda Y)^2}_{Z \geq 0}\right] = 0 \Rightarrow X \equiv -\lambda Y$

$Z \geq 0,\ \mathbb{E}Z = 0 \Rightarrow Z \equiv 0$ (με πιθ. $= 1$)

Συντελεστής συσχέτισης δύο ΤΜ

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}$$

C-S $\Rightarrow -1 \leq \rho \leq 1$

$|Cov(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$ ✓

$\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$

$|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}X^2}\sqrt{\mathbb{E}Y^2}$

$X \leftarrow X-\mu_X \;,\; Y \leftarrow Y-\mu_Y$

$|\mathbb{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[(X-\mu_X)^2]}\sqrt{\mathbb{E}[(Y-\mu_Y)^2]}$

$|Cov(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$

X,Y ανεξ $\Rightarrow \rho = 0$ ($\rho=0 \Rightarrow$ ασυσχέτιστες)

ασυσχέτιστες $\not\Rightarrow$ ανεξάρτητες

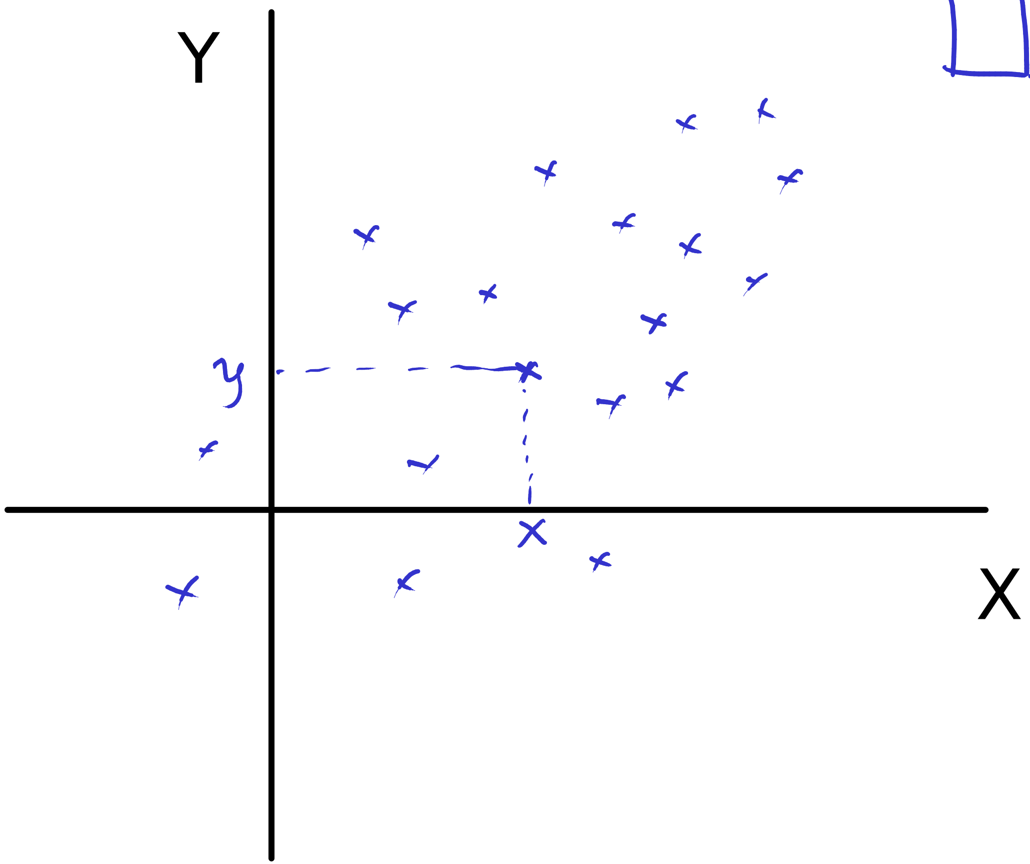
$X = \pm 1, \pm 2$ με ίση πιθ. $1/4$

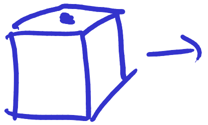
$$Y = \begin{cases} +1 & \text{αν } X = \pm 1 \\ -1 & \text{αν } X = \pm 2 \end{cases}$$

$X \rightarrow Y \Rightarrow$ όχι ανεξ.

1) X,Y κεντραρισμένες
2) $Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY)$
3) $XY = \pm 1, \pm 2$ με πιθ. $1/4$
$\Rightarrow \mathbb{E}(XY) = 0$
$\Rightarrow$ ασυσχέτιστες

Γραφική παράσταση δειγμάτων των X, Y





(x, y)

$\rho > 0$ θετικά συσχετισμ.

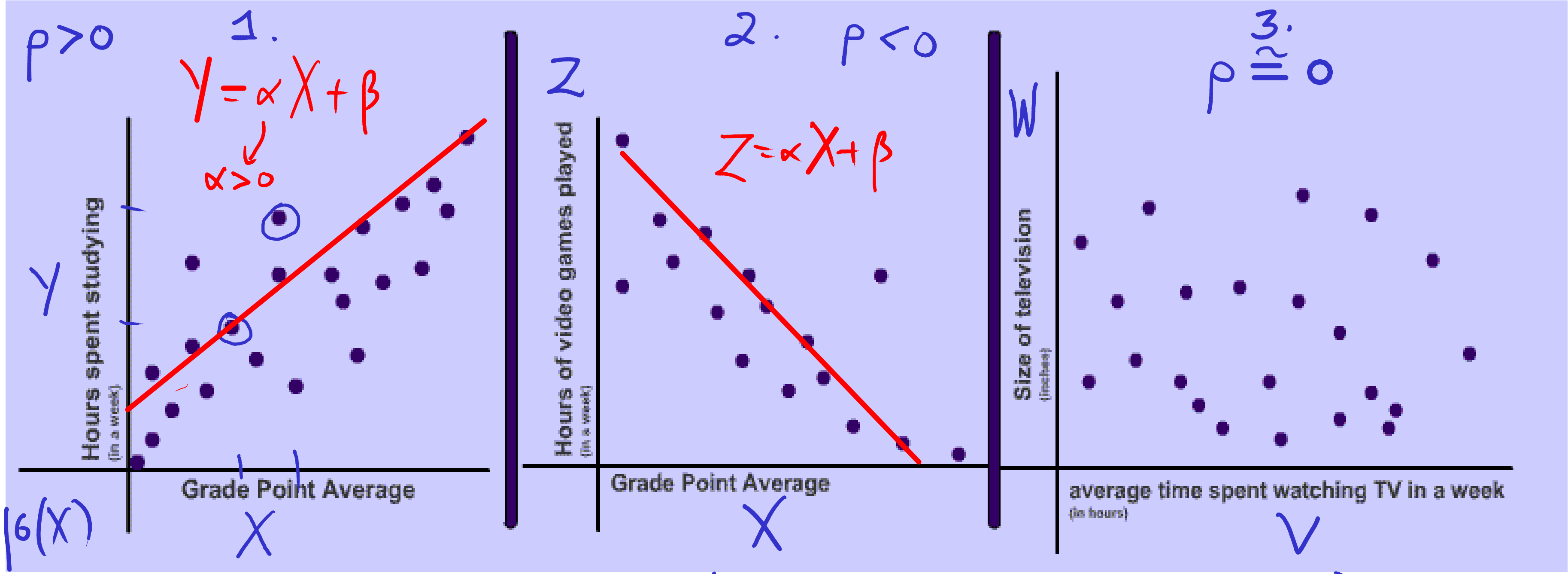
"αν ξέρουμε ότι η μία μεγάλη ⇒ αυξάνει η πιθ. και η άλλη μεγάλη"

$\rho < 0$ αρνητ. συσχ.

$\rho = 0$ ασυσχέτιστες

Scatter Plots

$$-1 \le \rho \le 1$$



$$\sigma(Y) = |\alpha|\,\sigma(X)$$

$\Uparrow$

(X, Y) $\qquad$ (X, Z) $\qquad$ (V, W)

$$Y = \alpha X + \beta$$

$$\alpha > 0$$

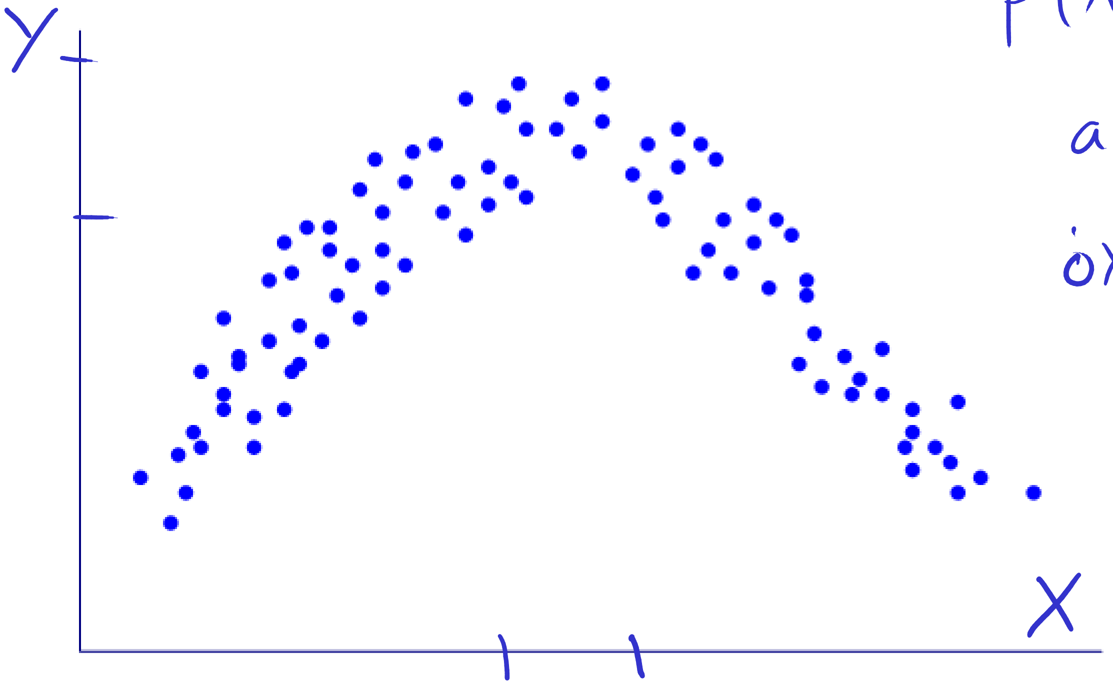
$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\left[(X-\mu_X)(\alpha X + \cancel{\beta} - \alpha\mu_X - \cancel{\beta})\right]$$

$$= \alpha\, \mathbb{E}\left[(X-\mu_X)^2\right] = \alpha\,\sigma^2(X) \geq 0$$

$$\Longrightarrow \rho(X,Y) \geq 0$$

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)} = \frac{\alpha\,\sigma^2(X)}{\alpha\,\sigma^2(X)} = 1$$

Scatter plots



$\rho(X,Y) \approx 0$

ασυσχέτιστες

όχι ανεξάρτητες