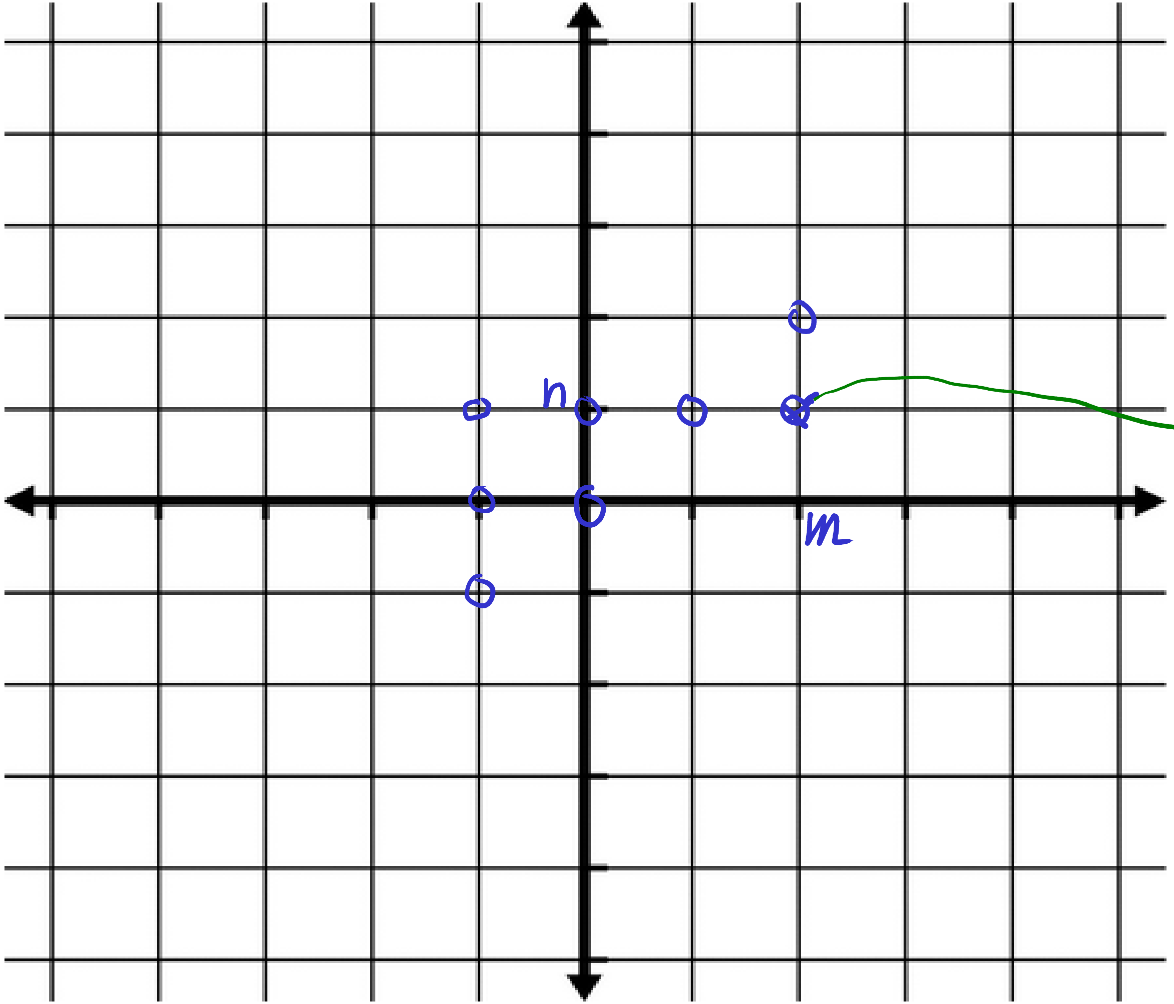
Κοινή πυκνότητα δύο ΤΜ

$X, Y : \Omega \to \mathbb{Z}$ $\quad f_X , f_Y$ (περιθώριες)

$X: \quad f_X(n) = \mathbb{P}(X=n)$



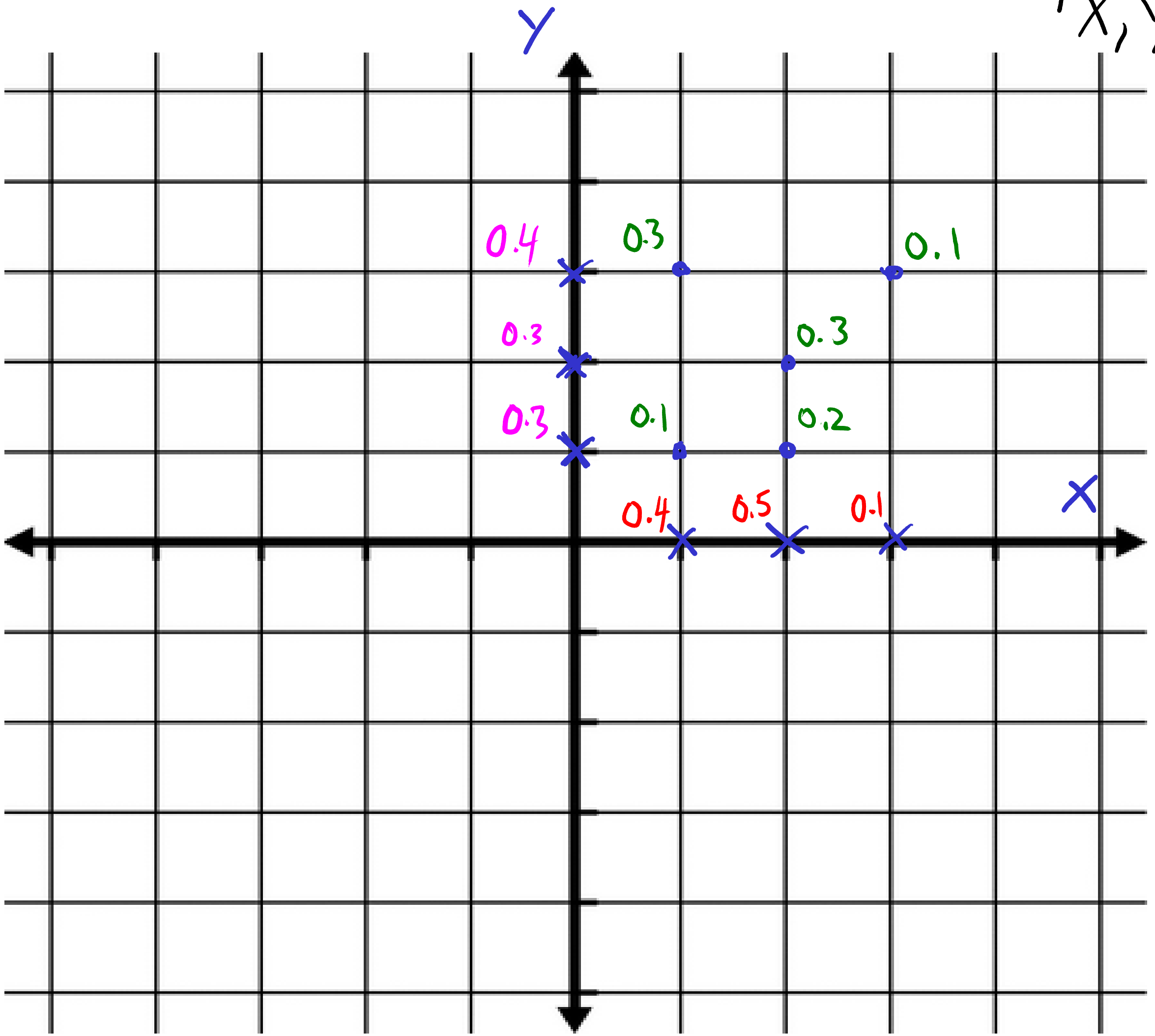
$(X,Y) \in \mathbb{Z}^2$

$f_{(X,Y)} = f_{X,Y} : \mathbb{Z}^2 \to [0,1]$

$f_{X,Y}(m,n) = \mathbb{P}(X=m, Y=n)$

↳ πυκνότητα

Περιθώριες πυκνότητες της $f_{X,Y}(m,n) \to f_X(m), f_Y(n)$



$$f_X(m) = \mathbb{P}(X=m)$$

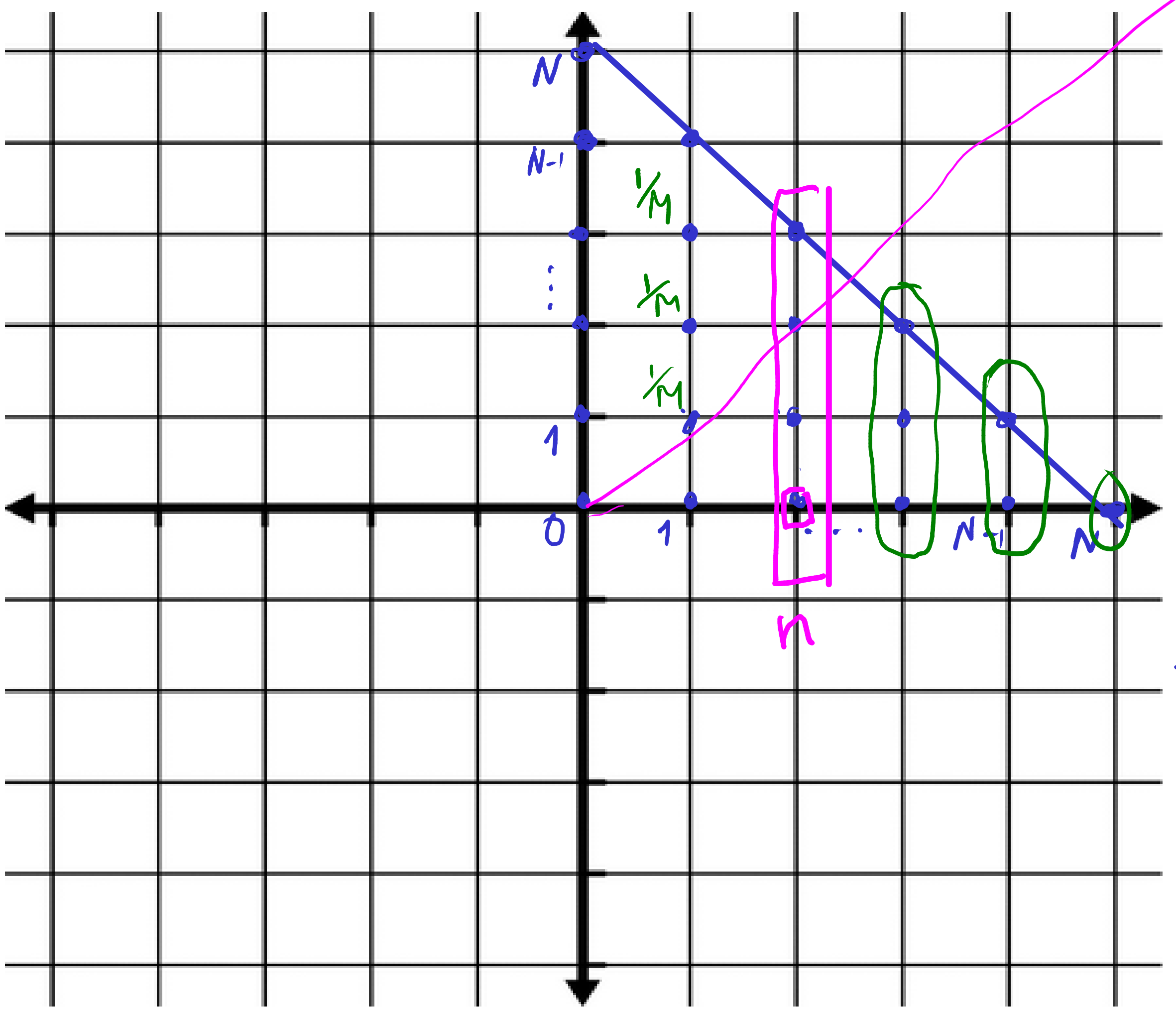
$$\{X=m\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{X=m, Y=k\}$$

$$\mathbb{P}(X=m) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(X=m, Y=k)$$

$$f_X(m) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{X,Y}(m,k)$$

$$f_Y(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{X,Y}(k,n)$$

Παράδειγμα υπολογισμού περιθωρίων



(X,Y) ομοιόμ. κατανεμ. στο τρίγωνο $(0,0)-(N,0)-(0,N)$

$M =$ αριθμός σημείων

$$M = 1+2+3+4 \cdots + N+1$$

$$M = \frac{(N+1)(N+2)}{2} \qquad f_X \equiv f_Y$$

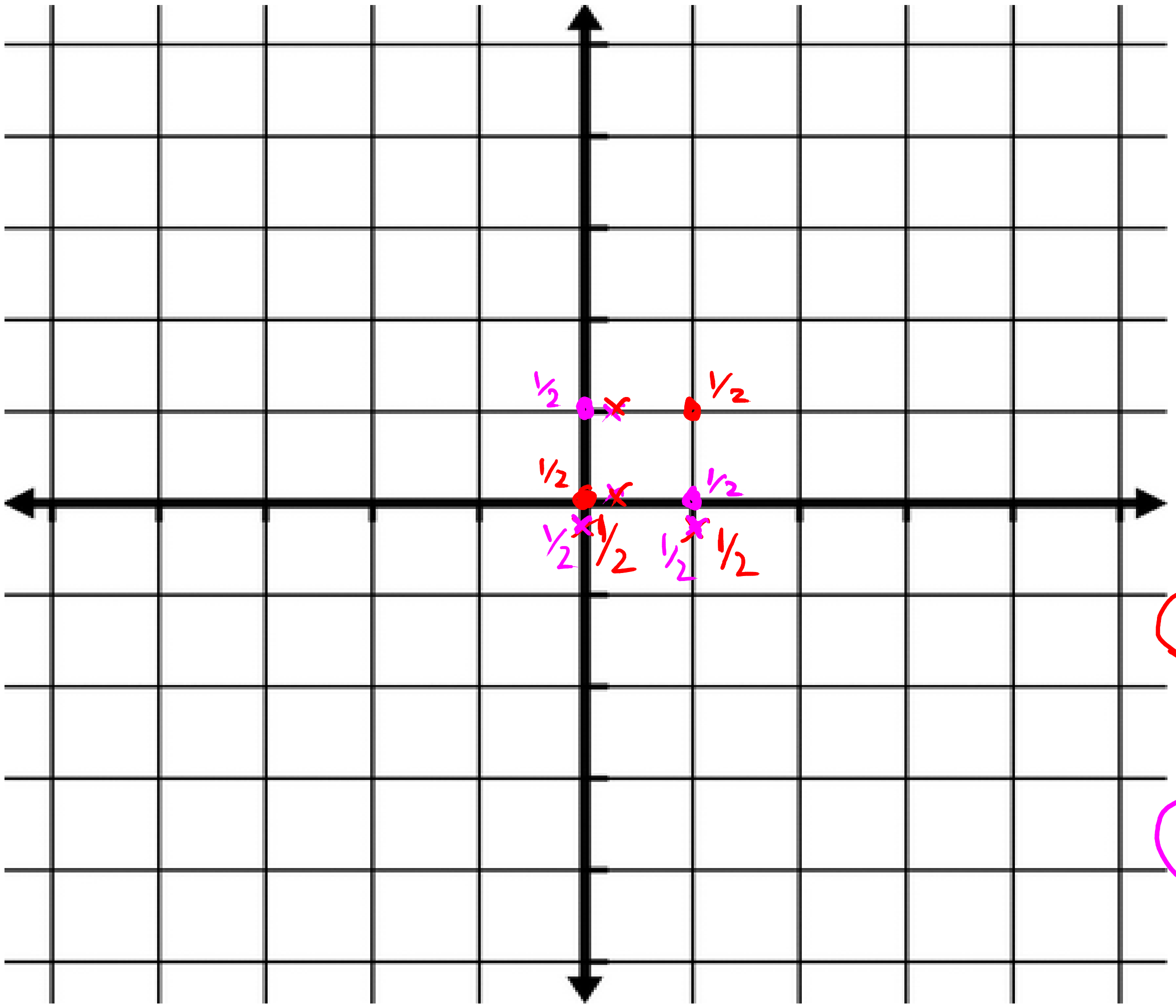
$$f_X(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{X,Y}(n,k)$$

$$= (N-n+1)\frac{1}{M}$$

$$0 \le n \le N$$

$$= \frac{(N-n+1)\cdot 2}{(N+1)(N+2)} = f_X(n)$$

Οι περιθώριες δεν καθορίζουν την κοινή πυκνότητα



(X,Y)

$f_{X,Y} \longrightarrow f_X, f_Y$

$\not\longleftarrow$

Π_1 (X_1, Y_1) Π_2 (X_2, Y_2)

$f_{X_1} = f_{X_2}$

$f_{Y_1} = f_{Y_2}$ αλλά $f_{X_1,Y_1} \neq f_{X_2,Y_2}$

Δύο νομίσματα Α, Β

Π_1: $X_1 = 1$ αν Α=Κ, 0 αν Α=Γ

Β=Α $(0,0) \to \frac{1}{2}$ $(1,1) \to \frac{1}{2}$

$Y_1 = 1$ αν Β=Κ, 0 αν Β=Γ

Π_2: $X_2 = 1$ αν Α=Κ, 0 αν Α=Γ

Β≠Α $(0,1) \to \frac{1}{2}$ $(1,0) \to \frac{1}{2}$

$Y_2 = 1$ αν Β=Κ, 0 αν Β=Γ

Κοινή πυκνότητα δύο ανεξαρτήτων ΤΜ

X, Y ανεξάρτητες

$$f_{X,Y}(m,n) = \mathbb{P}(\underline{X=m}, \underline{Y=n}) = \mathbb{P}(X=m)\,\mathbb{P}(Y=n) = f_X(m)\, f_Y(n)$$

<u>Χωρισμός μεταβλητών</u>

$$f_{X,Y}(m,n) = f_X(m)\, f_Y(n)$$

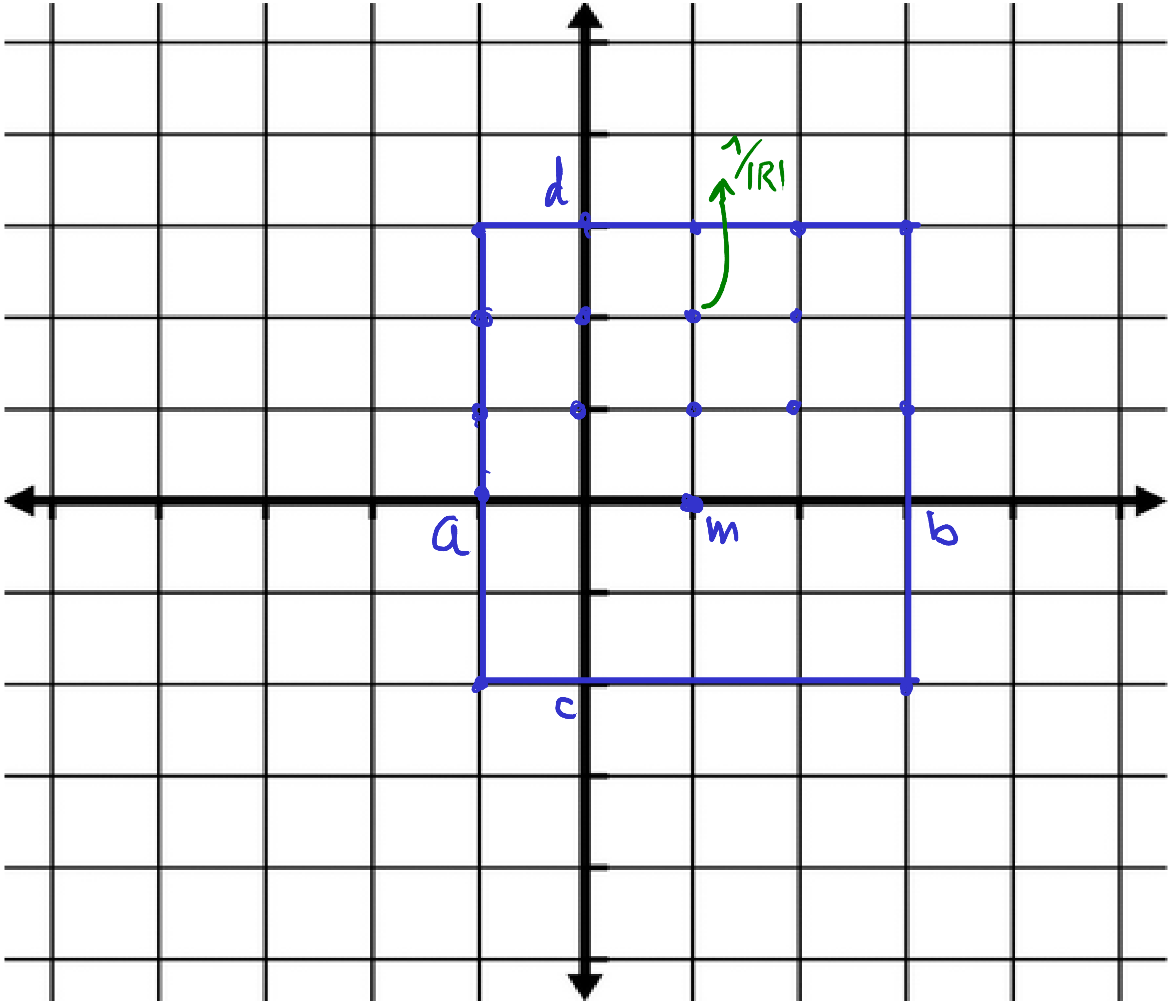
Ανεξαρτησία: περιθώριες $\Longrightarrow$ κοινή πυκνότητα

X, Y ανεξ. $\iff f_{X,Y}(m,n) = f_X(m)\, f_Y(n) \quad \forall m,n$

$\Longrightarrow$

Παράδειγμα

(X,Y) ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $\{a,\dots,b\}\times\{c,\dots,d\}$



$R=\{(m,n):\ \underbrace{a\le m\le b}\,,\ c\le n\le d\}$

διακριτό ορθογώνιο

$|R| = (d-c+1)(b-a+1)$

$f_X(m) = \dfrac{d-c+1}{|R|} = \dfrac{1}{b-a+1}$

$f_Y(n) = \dfrac{b-a+1}{|R|} = \dfrac{1}{d-c+1}$

X ομοιόμ. στο $\{a,\dots,b\}$

Y ομοιόμ. ... $\{c,\dots,d\}$

$f_X(m)f_Y(n) = \dfrac{1}{|R|} = f_{X,Y}(m,n)$

άρα X,Y ανεξάρτητες

Χωρισμός μεταβλητών συνεπάγεται ανεξαρτησία

$f_{X,Y}(m,n) = f_X(m) f_Y(n) \Longrightarrow X, Y$ ανεξ.

X, Y ανεξ $\overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall$ ενδεχόμενα A, B που το A εξαρτάται μόνο από τη X
και το B - - - - - - Y

ισχύει ότι τα A, B είναι ανεξάρτητα

<u>A εξαρτάται από το X</u> $\Longleftrightarrow$ αν ξέρουμε την τιμή του X τότε ξέρουμε
αν ισχύει το A ή όχι.

$\mathbb{Z} = A_1 \dot\cup A_2$ $\quad A_1 = \{n \in \mathbb{Z} : X = n \Rightarrow A \text{ ισχύει}\}$ $\quad \mathbb{Z} = B_1 \dot\cup B_2$

$A_2 = \{n \in \mathbb{Z} : X = n \Rightarrow A \text{ δεν ισχύει}\}$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X \in A_1) = \sum_{a \in A_1} \mathbb{P}(X = a) = \sum_{a \in A_1} f_X(a)$$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{b \in B_1} f_Y(b)$$

Χωρισμός μεταβλητών συνεπάγεται ανεξαρτησία

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \sum_{a \in A_1} f_X(a) \\ \mathbb{P}(B) &= \sum_{b \in B_1} f_Y(b) \end{aligned}\right\} \underline{\underline{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)}} = \underbrace{\sum_{a \in A_1} \sum_{b \in B_1} f_X(a)\, f_Y(b)}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{P}(A \cap B)}} = \mathbb{P}(X \in A_1, Y \in B_1) = \mathbb{P}\big((X,Y) \in A_1 \times B_1\big)$$

$$= \sum_{(a,b) \in A_1 \times B_1} f_{X,Y}(a,b) = \sum_{(a,b) \in \underline{A_1 \times B_1}} f_X(a)\, f_Y(b)$$

$$= \underbrace{\sum_{a \in A_1} \sum_{b \in B_1} f_X(a)\, f_Y(b)}$$

$\forall A, B$ που εξαρτ. μονο απο X, Y (ανε)

A, B ανεξ.

$$\Downarrow$$

X, Y ανεξ.