Ο κανόνας $E[\,\underline{E[X|Y]}\,] = E[\,X\,]$

$$\mathbb{E}\Big(\underbrace{\mathbb{E}(X|Y)}_{=\varphi(Y)}\Big) = \sum_y \varphi(y)\,\mathbb{P}(Y=y) = \sum_y \mathbb{E}(X\,|\,Y=y)\,\mathbb{P}(Y=y)$$

$$\varphi(y) = \mathbb{E}(X\,|\,Y=y)$$

$$= \sum_y \sum_n n\,\mathbb{P}(X=n\,|\,Y=y)\,\mathbb{P}(Y=y)$$

$$\mathbb{E}(X\,|\,Y=y) = \sum_n n\,\mathbb{P}(X=n\,|\,Y=y)$$

$$= \sum_n n \underbrace{\sum_y \mathbb{P}(X=n\,|\,Y=y)\,\mathbb{P}(Y=y)}_{\text{τύπος ολικής πιθ} \;=\; \mathbb{P}(X=n)}$$

$$= \sum_n n\,\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{E}X.$$

Άθροισμα τυχαίου πλήθους από ΤΜ: η μέση τιμή

$X_1, X_2, X_3, \ldots$

$$S = \sum_{j=1}^{N} X_j$$ όπου X_j ισόνομες τυχαίες μεταβλητές

και N επίσης ΤΜ

και $\forall j$: X_j, N ανεξάρτητες

$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}N \cdot \mathbb{E}X_1$$

Λάθος απόδειξη: $\mathbb{E}S \overset{\text{γραμμικ.}}{=} \sum_{j=1}^{N} \mathbb{E}X_j = N \cdot \mathbb{E}X_1 \overset{?}{=} \mathbb{E}N \cdot \mathbb{E}X_1$

γιατί η γραμμικότητα αφορά σταθερό πλήθος προσθετέων

Απόδειξη συνέπεια του $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}Y$

$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}(\mathbb{E}(S|N)) = \mathbb{E}(N \cdot \mathbb{E}X_1) = \mathbb{E}X_1 \cdot \mathbb{E}N \checkmark$$