Είμαι σίγουρος ότι υπάρχει καλύτερη λύση, όμως και αυτή πρέπει να είναι σωστή. Γενικεύεται για πεπερασμένους διανυσματικούς χώρους -Γ.Τ.

Πρόταση. *Έστω* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *ώστε* $|a_n - a_m| \geq 1, \forall n \neq m$. *Τότε* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-3} < \infty$.

Απόδειξη.

Ισχυρισμός 1. $\forall M > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *ώστε* $|a_n| > M$, $\forall n \geq n_0$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $\exists$ άπειρο πλήθος όρων στο $\overline{B}(0, M)$, τότε λόγω της συμπάγειας έπεται ότι η ακολουθία θα έχει σ.σ, που είναι άτοπο από την υπόθεσή μας. □

Θεωρώ το σύνολο

$$G_n = \overline{B}(0, n+1) \setminus \overline{B}(0, n)\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

όπως φαίνεται από τον ισχυρισμό που αποδείξαμε, κάθε G_n περιέχει πεπερασμένο πλήθος όρων της ακολουθίας. Το εμβαδόν του G_n ισούται με

$$\begin{aligned} E_n = E(G_n) &= E(\overline{B}(0, n+1)) - E(\overline{B}(0, n)) \\ &= \pi(n+1)^2 - \pi n^2 = (2n+1)\pi \end{aligned}$$

Ισχυρισμός 2. *Το πλήθος των ορων* k *που περιέχονται στο* G_n *είναι της τάξης* $O(n)$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Έστω $a_{n_1}, \dots, a_{n_k}$ οι όροι της ακολουθίας που περιέχονται στο G_n. Απο υπόθεση, οι σφαίρες $B(a_{n_i}, 1/2)$, $1 \leq i \leq k$, είναι ξένες ανά δυο και επιπλέον περιέχονται στο $G_{n-1} \cup G_n \cup G_{n+1}$. Επομένως

$$E\left(\bigcup_{i=1}^{k} B(a_{n_i}, 1/2)\right) \leq E(G_{n-1} \cup G_n \cup G_{n+1})$$

Επιπλέον

$$E\left(\bigcup_{i=1}^{k} B(a_{n_i}, 1/2)\right) = \sum_{i=1}^{k} E\left(B(a_{n_i}, 1/2)\right) = k \cdot \frac{\pi}{4}$$

και

$$\begin{aligned} E(G_{n-1} \cup G_n \cup G_{n+1}) &= E_{n-1} + E_n + E_{n+1} \\ &= (2n-1)\pi + (2n+1)\pi + (2n+3)\pi = (6n+3)\pi \end{aligned}$$

τελικά

$$k \cdot \frac{\pi}{4} \leq (6n+3)\pi \quad \Longrightarrow \quad k \leq 24n + 12$$ □

Ορίζω τώρα την ακολουθία

$$c_n = \begin{cases} 0, & G_n \cap \{a_n\} = \emptyset \\ \sum_{a_i \in G_n} \frac{1}{|a_i|^3}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

τότε $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^3}$.
Ισχύει $|a_i| > n$, για κάθε $a_i \in G_n$, συνεπώς

$$\frac{1}{|a_i|^3} < \frac{1}{n^3} \tag{1}$$

Αφού $k_n = |\{a_n\} \cap G_n| \sim O(n)$, έπεται ότι υπάρχει $t \in \mathbb{N}$ ώστε $k_n \leq t \cdot n$. Συνεπώς

$$c_n = \sum_{a_i \in G_n} \frac{1}{|a_i|^3} < k_n \cdot \frac{1}{n^3} \leq tn \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{t}{n^2}$$

Αφού $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t}{n^2} < +\infty$, από κριτήριο σύγκρισης έπεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^3} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n < +\infty \qquad \square$$