Πρόβλημα 2.6

Αρκεί να αποδείξουμε το ισοδύναμο του προβλήματος για την πραγματική ευθεία. Τότε το πρόβλημα αποδεικνύεται αυτόματα για όλες τις διαστάσεις. Πράγματι: ας υποθέσουμε ότι ισχύει στη διάσταση 1 και ας θεωρήσουμε τα k-διάστατα ορθογώνια

$$T_n = I_{n,1} \times I_{n,2} \times \cdots \times I_{n,k}, \quad n = 1, .., N$$

με την ιδιότητα ανά δύο να έχουν μη κενή τομή. Σταθεροποιούμε ένα $j \in \{1, ..., k\}$. Τότε εύκολα βλέπουμε ότι τα διαστήματα της οικογένειας $\{I_{n,j}\}_{n=1}^{N}$ έχουν ανά δύο μη κενή τομή. Από την υπόθεση λοιπόν, η τομή όλων των διαστημάτων της οικογένειας αυτής θα είναι μη κενή. Άρα

$$\bigcap_{n=1}^{N} T_n = \left(\bigcap_{n=1}^{N} I_{n,1} \right) \times \cdots \times \left(\bigcap_{n=1}^{N} I_{n,k} \right) \neq \emptyset.$$

Θα δείξουμε λοιπόν τώρα το πρόβλημα στη διάσταση ένα. Πρώτα μία παρατήρηση.

$$(a, b) \cap (a', b') \neq \emptyset \Leftrightarrow a < b' \wedge a' < b.$$

Ας είναι τώρα λοιπόν τα ανοιχτά διαστήματα $I_n = (a_n, b_n), \ \ n = 1, ..., N$, τέτοια ώστε ανά δύο να τέμνονται. Τότε από την παρατήρηση, καθώς και από την προφανή σχέση $a_n < b_n$, $\forall n$, θα έχουμε ότι

$$a_n < b_m, \quad \forall n, m = 1, ..., N.$$

Θέτουμε $a = \max_{1 \leqslant n \leqslant N} a_n$ και $b = \min_{1 \leqslant n \leqslant N} a_n$. Τότε $a < b$ και άρα

$$\bigcap_{n=1}^{N} I_n = (a, b) \neq \emptyset.$$