Πρόβλημα 2.3

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι είναι ισοδύναμο να δείξουμε το ζητούμενο για το διάστημα $(0,1)$, καθώς υπάρχει συνεχής και 1-1 συνάρτηση από το διάστημα αυτό επί του $\mathbb{R}$. Θα δείξουμε πρώτα το παρακάτω λήμμα που αφορά σε σύνολα τύπου Cantor.

Λήμμα 0.1. *Έστω $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του $[0,1]$ τέτοια ώστε:*
(α) $K_n = \bigcup_{i=1}^{k_n} I_{n,i}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, όπου τα $I_{n,i}$ είναι κλειστά διαστήματα, ξένα ανά δύο για σταθερό n.
(β) $k_1 = 2$. Επίσης, για κάθε n και για κάθε $i\{1,2,...,k_n\}$, ακριβώς δύο στοιχεία του συνόλου $\{I_{n+1,j} : j = 1,2,...,k_{n+1}\}$ είναι υποσύνολα του $I_{n,i}$.
Τότε η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n^o$, όπου K_n^o το εσωτερικό του K_n, είναι μη κενή.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι για κάθε φθίνουσα ακολουθία διαστημάτων $\{I_{n,i_n}\}_{n=1}^{\infty}$ έχουμε ότι

$$\lim_n diam(I_{n,i_n}) = 0, \tag{0.1}$$

γιατί στην αντίθετη περίπτωση το συμπέρασμα είναι τετριμμένο. Θέτουμε

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n, \quad L = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n^o.$$

Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση $f : [0,1] \to K$ ως εξής: Έστω $x \in [0,1]$. Αν $x = 0$, θέτουμε $f(x) = \inf K$. Ας είναι τώρα $x > 0$. Υπάρχει τότε μία μοναδικά καθορισμένη ακολουθία $\{a_j\} \subset \{0,1\}$ τέτοια ώστε άπειροι όροι της να είναι διάφοροι του μηδενός και $x = 0._2 a_1 a_2 ....$ Κατασκευάζουμε τότε ακολουθία διαστημάτων $\{J_n\}$ ως εξής: Αν $a_1 = 0$, τότε θέτουμε το J_1 να είναι το αριστερό διάστημα από τα δύο που αποτελούν το K_1. Διαφορετικά το θέτουμε να είναι το δεξιό. Αν $a_2 = 0$, τότε θέτουμε το J_2 να είναι το αριστερό διάστημα από τα δύο στοιχεία του $\{I_{2,j} : j = 1,2,...,k_{n+1}\}$ που είναι υποσύνολα του J_1. Διαφορετικά το θέτουμε να είναι το δεξιό. Συνεχίζουμε τη διαδικασία ως άνω. Ας είναι τώρα y το μοναδικό στοιχείο της τομής $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$ (μοναδικό λόγω της σχέσης 0.1). Θέτουμε τότε $f(x) = y$. Η συνάρτηση f είναι εύκολο να δούμε ότι είναι 1-1. Άρα το σύνολο K είναι υπεραριθμήσιμο. Επιπλέον είναι εύκολο να δούμε ότι το σύνολο $K \setminus L$ είναι αριθμήσιμο. Άρα το σύνολο L είναι υπεραριθμήσιμο και έχουμε τελειώσει. □

Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχουν ξένα ανά δύο κλειστά διαστήματα $I_n,\ n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε

$$(0,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Θα καταλήξουμε σε κάτι που αντικρούει το λήμμα που μόλις αποδείξαμ-ε. Κατασκευάζουμε λοιπόν μία φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων $\{K_n\}$ ως εξής: Θέτουμε

$$L_1 = (0,1) \setminus I_1 \quad \text{και} \quad K_1 = \bar{L_1}.$$

Τότε το K_1 είναι ένωση δύο ξένων κλειστών διαστημάτων, δηλαδή $K_1 = J_{1,1} \cup J_{1,2}$. Παίρνουμε τώρα τους δύο μικρότερους δείκτες j_1, j_2 ώστε $I_{j_1} \subset J_{1,1}$ και $I_{j_2} \subset J_{1,2}$. Θέτουμε

$$L_2 = L_1 \setminus (I_{j_1} \cup I_{j_2}) \quad \text{και} \quad K_2 = \bar{L_2}.$$

Τότε το K_2 είναι ένωση τεσσάρων ξένων ανά δύο κλειστών διαστημάτων, ακριβώς δύο εκ των οποίων είναι υποσύνολα του $J_{1,1}$ και ακριβώς δύο εκ των οποίων είναι υποσύνολα του $J_{1,2}$. Συνεχίζουμε τη διαδικασία ως άνω και κατασκευάζουμε ακολουθίες συνόλων $\{L_n\}$ και $\{K_n\}$. Μπορούμε να δείξουμε σχετικά εύκολα ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} L_n = (0,1) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset,$$

δηλαδή ότι κατα την παραπάνω διαδικασία εκλέγονται όλα τα I_n. Όμως η ακολουθία $\{K_n\}$ ικανοποιεί τις συνθήκες του λήμματος που αποδείξαμε παραπάνω. Επομένως

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n^o = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n \neq \emptyset,$$

πράγμα άτοπο. Άρα το $(0,1)$ (και επομένως και η πραγματική ευθεία) δεν μπορεί να γραφτεί ως ξένη ένωση κλειστών και φραγμένων διατημάτων.

Επίσης, το $\mathbb{R}$ δεν μπορεί να γραφτεί ως ξένη ένωση κλειστών διατημάτων με εξαίρεση την τετριμμένη περίπτωση $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Για να το δείξουμε υποθέτουμε αντίθετα ότι

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \text{με} \;\; I_n \neq \mathbb{R}, \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Τότε τουλάχιστον ένα από τα $I_n,\ n = 1, 2, ...,$ θα είναι μη φραγμένο. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $I_1 = (-\infty, a]$. Τα υπόλοιπα θα πρέπει να είναι όλα φραγμένα, γιατί αν κάποιο από αυτά ήταν το $[b, +\infty)$ για κάποιο $b \in (a, +\infty)$, τότε το διάστημα (a, b) θα καλυπτόταν από ξένα ανά δύο, κλειστά και φραγμένα διαστήματα, κάτι το οποίο δε γίνεται, όπως δείξαμε παραπάνω. Επομένως το $(a, +\infty)$ καλύπτεται από ξένα ανά δύο, κλειστά και φραγμένα διαστήματα. Άρα και το $\mathbb{R}$, μέσω της συνάρτησης $f(x) = \ln(x - a)$, πράγμα άτοπο.

Παρατήρηση 0.1. Στην πραγματικότητα η παραπάνω επιχειρηματολογία αποδεικνύει κάτι πιο ισχυρό. Αν $I_1, I_2, ...$ είναι ξένα ανά δύο, κλειστά διαστήματα, τότε το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ είναι υπεραριθμήσιμο.